

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ*

И.П. Лян, Г.Я. Пановко

В статье представлены результаты моделирования поведения сыпучей среды на вибрирующей шероховатой поверхности. Приведена система уравнений механики сплошной среды и реологическое уравнение, описывающее свойства среды как неньютоновской (дилатантной) жидкости. Численное решение полученной математической модели строится на основе модифицированного метода крупных частиц. Предложен алгоритм решения задачи для сред с различными свойствами при внешних воздействиях. Выполнен параметрический анализ влияния вибрации на поведение сыпучей среды.

Ключевые слова: сыпучая среда, вибрация, шероховатая поверхность, моделирование, метод крупных частиц, вибротранспортирование.

MODELING THE GRANULAR MEDIUM DYNAMICS ON A ROUGH VIBRATING PLANE WITH THE METHOD OF LARGE PARTICLES

I.P. Lyan, G.Y. Panovko

The article represents the results of modeling a granulated medium behavior on a vibrating surface. The system of equations of continuous medium mechanics is provided, as well as a rheological equation presenting a granulated medium as a non-Newtonian (dilatant) fluid. The numerical solution of the given system of equations is based on the modified method of large particles. The presented algorithm can be used for modeling the processes with granular media having different properties under periodical loads. The parametric analysis of vibration influence on the granular media behavior was conducted.

Keywords: granular medium, vibration, rough surface, modeling, method of large particles, vibrotransportation.

Введение

В современных технологических процессах переработки сыпучих или гранулированных сред широко используются различные методы вибрационной обработки. Эффекты действия вибрации в сыпучих средах широко применяются в таких технологических процессах, как транспортирование, перемешивание, уплотнение/разрыхление, разделение и др. Вибрация позволяет существенно интенсифицировать течение подобных процессов, а в ряде случаев оказывается единственно возможным вариантом реализации технологического процесса [1–3].

При вибрации в сыпучей среде могут проявиться различные эффекты, в частности, она [среда] может течь подобно жидкости [2, 3]. Такое состояние сыпучей среды принято называть псевдооживлением или псевдотекучестью. По мере увеличения интенсивности вибрации возможно нарушение связей между отдельными частицами среды, и она ведет себя подобно газу (виброкипение).

Учет свойств обрабатываемых сыпучих или гранулированных сред необходим для выбора рациональных параметров вибрации и конструкции рабочего органа вибромашины, обеспечивающих повышение эффективности технологического процесса.

* Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00708).

Для осуществления вибрационных технологических процессов широко используются вибрационные машины с инерционными самосинхронизирующимися вибровозбудителями. В подобных машинах эффект самосинхронизации вибровозбудителей зависит от целого ряда параметров, в том числе от положения центра масс динамической системы. При перемещении сыпучей среды по лотку такой машины происходит существенное смещение центра масс всей системы вследствие неоднородности распределения материала по рабочему органу.

В настоящей работе рассматривается задача о движении сыпучей среды по вибрирующей поверхности (лотку) с целью определения закона перемещения центра масс системы.

Постановка задачи и расчетная схема

В работе рассматривается динамика сыпучей среды (кварцевый песок), поступающей на лоток вибротранспортера (рис. 1). Сыпучая среда под действием гравитации высыпается из бункера 1, образуя насыпь 2. Лоток 5 вибротранспортера, наклоненный к горизонту под углом ϑ , совершает однонаправленные гармонические колебания $\xi(t)$ под углом α к поверхности лотка. Лоток считается абсолютно жестким. Для того, чтобы избежать ссыпания груза на другую сторону вибротранспортера, слева установлен ограничитель 3. Предполагаемое распределение сыпучей среды по поверхности под действием вибрации показано пунктирной линией 4.

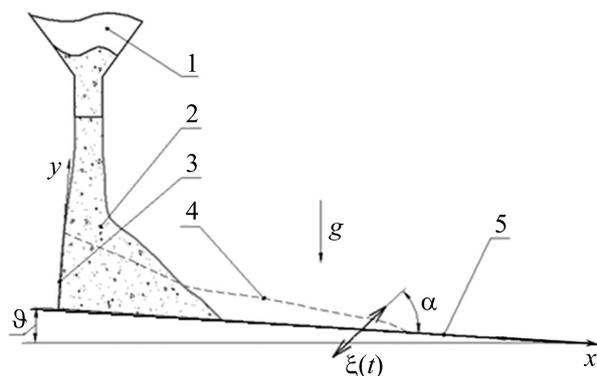


Рис. 1. Расчетная схема динамики сыпучей среды на лотке вибротранспортера

Описание поведения сыпучих материалов в условиях вибрации в зависимости от поставленной задачи базируется на соответствующих расчетных моделях [1–16]. Эти модели можно

подразделить на два основных типа: дискретные модели сыпучей среды в виде материальных частиц или твердых тел с упруговязкими связями между ними [2, 4, 5] и континуальные модели, использующие подходы механики сплошной среды во всем объеме сыпучего материала [7–11, 13–16] либо в каждом его элементарном слое [12].

В настоящей работе моделирование движения сыпучей среды основано на работах [11, 13, 15], в которых рассматривается движение сыпучей среды как вязкой дилатантной жидкости.

Особенности течения такой сплошной среды закладываются в реологическое уравнение, связывающее скорости деформации с напряжениями. Вместе с уравнениями сохранения массы и импульса они замыкают систему уравнений механики сплошной среды. Численная реализация полученных уравнений основана на применении метода крупных частиц, разработанного О.М. Белоцерковским и Ю.М. Давыдовым [18–20].

В подобной постановке задача уже рассматривалась в работах [11, 13]. Однако анализ этих работ показал, что использованные конечно-разностные схемы численного решения полученных уравнений приводят к возникновению асимметрии характерных движений среды, которые по своей природе должны обладать симметрией.

Математическая модель

При моделировании сыпучей среды приняты следующие гипотезы и допущения:

- рассматривается плоская задача в поле действия силы тяжести;
- течение сыпучей среды рассматривается без отрыва от поверхности лотка;
- среда является однофазной (моногенной), при этом средний значащий размер частицы среды считается во много раз меньше размеров расчетной области.

Математическая модель исследуемого процесса в работе описывается системой, состоящей из трех групп уравнений: реологических уравнений, связывающих компоненты тензора напряжений со скоростями деформаций сыпучей среды; закона сохранения импульса системы и закона сохранения массы системы [6, 11, 13, 15].

В настоящей работе реологические уравнения получены при использовании подходов, описанных в работе [11]. В отличие от работы

[11] ниже учитываются скорости угловых деформаций в виде $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$, что обеспечивает более корректное описание движения среды под действием вибрации. В результате дифференциальные уравнения связи скоростей деформаций и напряжений в проекциях на оси x, y , связанных с лотком, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\alpha_4 + \alpha_5 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \times \\ &\times \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ &+ \left(\alpha_2 + \alpha_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right); \\ \sigma_y &= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\alpha_4 + \alpha_5 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \times \\ &\times \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ &+ \left(\alpha_2 + \alpha_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \alpha_1 + \alpha_3 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \times \right. \\ &\times \alpha_5 \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right] \left. \right\} \times \\ &\times \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты двумерного тензора напряжений; $\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$ – компоненты тензора скоростей деформации; $\alpha_i = \alpha_i(v), i = 0, \dots, 5$ – коэффициенты, учитывающие диссипативные свойства среды, v – объемная концентрация среды.

Коэффициенты $\alpha_i = \alpha_i(v), i = 0, \dots, 5$, определяются экспериментально и являются функциями объемной концентрации среды v [11, 13, 15]. Если концентрация среды превышает некоторое значение v_d , то возникает скачкообразное увеличение уровня напряжений в среде при тех же скоростях деформаций. Для учета данного эффекта в математической модели коэффициенты $\alpha_i = \alpha_i(v), i = 0, \dots, 5$, задаются в виде кусочно-заданных функций, значения которых увеличиваются при концентрации выше значения v_d .

Уравнения сохранения импульса имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1}{\nu \rho_0} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \\ &- g_x + \ddot{\xi}_x + R_x; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{1}{\nu \rho_0} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) - \\ &- g_y + \ddot{\xi}_y + R_y, \end{aligned} \quad (2)$$

где t – текущее время; ρ_0 – средняя плотность частицы сыпучей среды; g_x, g_y – проекции на оси x, y ускорения свободного падения; $\ddot{\xi}_x, \ddot{\xi}_y$ – проекции на оси x, y ускорения внешнего вибрационного воздействия; R_x, R_y – проекции на оси x, y сил аэродинамического сопротивления.

Уравнение сохранения массы имеет вид [11]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (v v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (v v_y)}{\partial y} = 0.$$

В результате получена полная система нелинейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, описывающая движение сыпучей среды по вибрирующей поверхности. Принципиальной особенностью данной системы уравнений является то, что свободная граница сыпучей среды заранее неизвестна. Для решения подобных задач может быть использован метод крупных частиц, хорошо зарекомендовавший себя в расчетной практике [11, 13–15]. При использовании этого метода свободная граница среды определяется на каждом шаге интегрирования.

Решение задачи

Метод крупных частиц представляет собой разновидность метода частиц в ячейках Харлоу, использующего подходы Лагранжа и Эйлера при численном решении задач механики сплошной среды [18–20]. Данный метод сочетает в себе в определенных чертах преимущества лагранжева и эйлера подходов. Область решения разбивается неподвижной (эйлеровой) сеткой, однако сплошная среда трактуется как дискретная модель, т.е. рассматривается совокупность «частиц» фиксированной массы (лагранжева сетка частиц), которые движутся через эйлерову сетку. Движение такой системы частиц за время Δt осуществляется сначала в виде изменения внутреннего состояния, в предположении неподвижности сетки, –

эйлеров этап. Затем рассматривается смещение всех частиц без изменения внутреннего состояния – лагранжев этап. На заключительном этапе происходит пересчет сетки в изначальное состояние.

В соответствии с основной идеей метода крупных частиц расчетная область разбивается на прямоугольную сетку с размерами ячейки $\Delta x \times \Delta y$ (рис. 2).

Каждая ячейка имеет четыре границы (см. рис. 2, б), на которых определяются нормальные и касательные напряжения, а внутри ячейки вычисляются векторы скоростей и значение объемной концентрации.

Эйлеров этап. На первом (эйлеровом) этапе рассматриваем изменение скоростей и напряжений, энергии без эффектов массопереноса. Для последующей численной реализации запишем уравнения (1) в конечно-разностной форме на текущем шаге интегрирования:

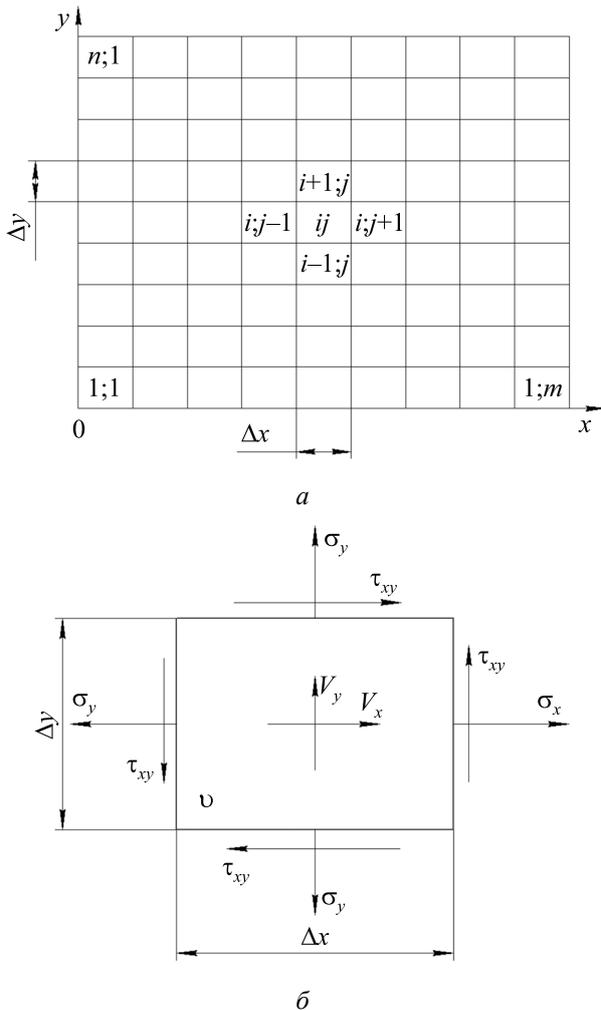


Рис. 2. Прямоугольная сетка расчетной области (а) и ее отдельная ячейка (б)

$$\begin{aligned} \sigma_{x,i,j} &= \alpha_0 + \alpha_1 V_{xx} + \left(\alpha_0' + \alpha_1' V_{xx} \right) (V_{xx} + V_{yy}) + \\ &+ \left(\alpha_0'' + \alpha_1'' V_{xx} \right) \left(V_{xx} V_{yy} - \frac{1}{4} [V_{xy} + V_{yx}]^2 \right); \\ \sigma_{y,i,j} &= \alpha_0 + \alpha_1 V_{yy} + \left(\alpha_0' + \alpha_1' V_{yy} \right) (V_{yy} + V_{xx}) + \\ &+ \left(\alpha_0'' + \alpha_1'' V_{yy} \right) \left(V_{yy} V_{xx} - \frac{1}{4} [V_{yx} + V_{xy}]^2 \right); \\ \tau_{xy,i,j} &= \frac{1}{2} (V_{xy} + V_{yx}) \left(\alpha_1 + \alpha_1' [V_{xx} + V_{yy}] + \right. \\ &+ \left. \alpha_1'' \left[V_{xx} V_{yy} - \frac{1}{4} \{V_{xy} + V_{yx}\}^2 \right] \right), \\ V_{xx} &= \frac{v_{x,i+1,j} - v_{x,i-1,j}}{2\Delta x}, \quad V_{yy} = \frac{v_{y,i+1,j} - v_{y,i-1,j}}{2\Delta y}, \\ V_{xy} &= \frac{v_{x,i+1,j} - v_{x,i-1,j}}{2\Delta y}, \quad V_{yx} = \frac{v_{y,i+1,j} - v_{y,i-1,j}}{2\Delta x}, \end{aligned} \quad (3)$$

где i, j – номера строк и столбцов соответственно, в которых находится ячейка сетки расчетной области.

Запишем уравнения для нахождения промежуточных скоростей для каждого шага по времени в конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{x,i,j} &= v_{x,i,j} + \frac{\Delta t}{2\nu\rho_0} \left(\frac{\sigma_{x,i+1,j} - \sigma_{x,i-1,j}}{2\Delta x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\tau_{xy,i,j+1} - \tau_{xy,i,j-1}}{2\Delta y} + R_x \right) - g_x \Delta t + \ddot{\xi}_x \Delta t; \\ \tilde{v}_{y,i,j} &= v_{y,i,j} + \frac{\Delta t}{2\nu\rho_0} \left(\frac{\tau_{xy,i+1,j} - \tau_{xy,i-1,j}}{2\Delta x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_{y,i,j+1} - \sigma_{y,i,j-1}}{2\Delta y} + R_y \right) - g_y \Delta t + \ddot{\xi}_y \Delta t. \end{aligned} \quad (4)$$

На данном этапе, согласно идее метода крупных частиц, конвективные слагаемые уравнений (2) опускаются [11, 15, 18–20]. Заметим, что в уравнениях (3) присутствует деление на концентрацию так, что во избежание возникновения сингулярных слагаемых в ячейках с нулевыми концентрациями скорости среды считаются равными нулю.

Лагранжев этап. На этом этапе скорости элемента объема сыпучего материала на границах ячейки на каждом шаге интегрирования усредняются со скоростью в смежной ячейке на этой границе. Для ячейки с номером i, j скорость на границах определяется формулой:

$$U_{k,i,j} = \frac{v_{q,i+s,j+s} + v_{q,i+s,j+s}}{2}, \quad (5)$$

здесь $k = \{1, 2, 3, 4\}$ – индекс границы ячейки ($k = 1$ соответствует левой границе, $k = 2$ – нижней границе, $k = 3$ – правой границе, $k = 4$ – верхней границе), $q = \{x, y\}$ – направление скорости, $s = \{-1, 0, 1\}$ – коэффициент, определяющий номер смежной ячейки с границей k . Например, для ячейки i, j скорость протекания материала сквозь левую границу:

$$U_{1,i,j} = (v_{x,i,j} + v_{x,i,j-1})/2.$$

Используя полученные значения скоростей на границах ячейки, можно определить массы, протекающие через k -ю границу ячейки за время Δt :

$$\begin{aligned} \Delta M_{1,i,j} &= \begin{cases} \Delta x U_{1,i,j} v_{i,j-1} \Delta t, & \text{если } U_1 > 0; \\ \Delta x U_{1,i,j} v_{i,j} \Delta t, & \text{если } U_1 \leq 0; \end{cases} \\ \Delta M_{2,i,j} &= \begin{cases} \Delta x U_{2,i,j} v_{i-1,j} \Delta t, & \text{если } U_2 > 0; \\ \Delta x U_{2,i,j} v_{i,j} \Delta t, & \text{если } U_2 \leq 0; \end{cases} \\ \Delta M_{3,i,j} &= \begin{cases} \Delta x U_{3,i,j} v_{i,j} \Delta t, & \text{если } U_3 > 0; \\ \Delta x U_{3,i,j} v_{i,j+1} \Delta t, & \text{если } U_3 \leq 0; \end{cases} \\ \Delta M_{4,i,j} &= \begin{cases} \Delta x U_{4,i,j} v_{i,j} \Delta t, & \text{если } U_4 > 0; \\ \Delta x U_{4,i,j} v_{i+1,j} \Delta t, & \text{если } U_4 \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда изменение массы и новое значение концентрации в ячейке:

$$\Delta M = \Delta M_{1,i,j} + \Delta M_{2,i,j} - \Delta M_{3,i,j} - \Delta M_{4,i,j};$$

$$v_{i,j}^{\{n+1\}} = v_{i,j}^{\{n\}} + \frac{\Delta M}{\Delta x \Delta y},$$

где $\{n\}$ – текущий, а $\{n+1\}$ – следующий шаг интегрирования по времени.

Заключительный этап. Для описания состояния ячейки вводится функция $D_{k,i,j}$, которая определяется следующим образом: $D_{kij} = 1$, если материал втекает в ячейку (i, j) через границу k ; $D_{kij} = 0$, если материал вытекает из ячейки (i, j) через границу k .

Тогда значения скоростей ячейки на следующем шаге интегрирования $\{n+1\}$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} v_{x,i,j}^{\{n+1\}} &= \{D_{1,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{x,i,j+1}^{\{n\}} \cdot |\Delta M_{1,i,j}^{\{n\}}| + D_{2,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{x,i-1,j}^{\{n\}} \times \\ &\times |\Delta M_{2,i,j}^{\{n\}}| + D_{3,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{x,i,j-1}^{\{n\}} \cdot |\Delta M_{3,i,j}^{\{n\}}| + \\ &+ D_{4,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{x,i+1,j}^{\{n\}} \cdot |\Delta M_{4,i,j}^{\{n\}}| + \tilde{v}_{x,i,j}^{\{n\}} [v_{i,j}^{\{n\}} \Delta x \Delta y - \\ &- (1 - D_{1,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{1,i,j}^{\{n\}}| - (1 - D_{2,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{2,i,j}^{\{n\}}| - \\ &- (1 - D_{3,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{3,i,j}^{\{n\}}| - (1 - D_{4,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{4,i,j}^{\{n\}}|]\} / \\ &/ (v_{i,j}^{\{n+1\}} \Delta x \Delta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{y,i,j}^{\{n+1\}} &= \{D_{1,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{y,i,j+1}^{\{n\}} \cdot |\Delta M_{1,i,j}^{\{n\}}| + D_{2,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{y,i-1,j}^{\{n\}} \times \\ &\times |\Delta M_{2,i,j}^{\{n\}}| + D_{3,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{y,i,j-1}^{\{n\}} \cdot |\Delta M_{3,i,j}^{\{n\}}| + \\ &+ D_{4,i,j}^{\{n\}} \cdot \tilde{v}_{y,i+1,j}^{\{n\}} \cdot |\Delta M_{4,i,j}^{\{n\}}| + \tilde{v}_{y,i,j}^{\{n\}} [v_{i,j}^{\{n\}} \Delta x \Delta y - \\ &- (1 - D_{1,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{1,i,j}^{\{n\}}| - (1 - D_{2,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{2,i,j}^{\{n\}}| - \\ &- (1 - D_{3,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{3,i,j}^{\{n\}}| - (1 - D_{4,i,j}^{\{n\}}) |\Delta M_{4,i,j}^{\{n\}}|]\} / \\ &/ (v_{i,j}^{\{n+1\}} \Delta x \Delta y), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta M_{k,i,j}^{\{n\}}$ играют роль весовых коэффициентов. В отличие от работы [11], значения $\Delta M_{k,i,j}^{\{n\}}$ берутся по абсолютной величине, что обеспечивает симметрию полученных решений.

Дополнительно вводится следующее условие: как только концентрация в ячейке достигла предельного значения v_d , скорость на границе, через которую материал втекает в (i, j) -ю ячейку, обнуляется:

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j} > v_d \\ D_{1,i,j} = 1 \end{cases} \rightarrow U_{1,i,j} = 0,$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j+1} > v_d \\ D_{1,i,j} = 0 \end{cases} \rightarrow U_{1,i,j} = 0;$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j} > v_d \\ D_{2,i,j} = 1 \end{cases} \rightarrow U_{2,i,j} = 0,$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j+1} > v_d \\ D_{2,i,j} = 0 \end{cases} \rightarrow U_{2,i,j} = 0;$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j} > v_d \\ D_{3,i,j} = 1 \end{cases} \rightarrow U_{3,i,j} = 0,$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j+1} > v_d \\ D_{3,i,j} = 0 \end{cases} \rightarrow U_{3,i,j} = 0;$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j} > v_d \\ D_{4,i,j} = 1 \end{cases} \rightarrow U_{4,i,j} = 0,$$

$$\text{если } \begin{cases} v_{i,j+1} > v_d \\ D_{4,i,j} = 0 \end{cases} \rightarrow U_{4,i,j} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, материал в данную ячейку не втекает, но может вытекать.

Согласно работам [11, 18–20], для получения устойчивых решений необходимо, чтобы в процессе всего интегрирования выполнялось условие:

$$v_{q,i,j} \leq \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad \Delta q = \{\Delta x, \Delta y\}.$$

Заметим, что в формулах (3)–(8) используются параметры смежных ячеек, что приводит к проблеме их использования на границах расчетной области. Для преодоления этой проблемы расчетная область окружается «фиктивными» ячейками, параметры которых принимаются равными (с точностью до знаков скоростей) параметрам смежных ячеек расчетной области [19, 20].

Для формирования граничных условий введем коэффициенты прилипания β и протекания γ [18–20]:

$$\begin{aligned} -1 \leq \beta \leq 1, \\ -1 \leq \gamma \leq 1. \end{aligned}$$

При $\beta = 1$ компонента скорости, параллельная границе расчетной области в фиктивной ячейке, будет иметь тот же знак и абсолютное значение, что и ячейка расчетной области, смежная с этой границей. Тем самым задается условие отсутствия прилипания среды к поверхности.

При $\beta = -1$ компонента скорости, параллельная границе расчетной области в фиктивной ячейке, будет иметь обратный знак и то же абсолютное значение, что и ячейка расчетной области, смежная с этой границей. Тем самым задается условие прилипания среды к поверхности.

Частичное прилипание можно задать, приняв $|\beta| < 1$.

При $\gamma = 1$ компонента скорости, нормальная к границе расчетной области в фиктивной ячейке, будет иметь тот же знак и абсолютное значение, что и ячейка расчетной области, смежная с этой границей. На выходе имеем возможность протекания материала через границу расчетной области.

При $\gamma = -1$ компонента скорости, нормальная к границе расчетной области в фиктивной ячейке, будет иметь обратный знак и то же абсолютное значение, что и ячейка расчетной области, смежная с этой границей. Тем самым скорость на границе будет обращаться в ноль, и будет наложен запрет на протекание материала через границу.

Частичное протекание можно задать, приняв $|\gamma| < 1$. Например, на верхней границе расчетной области граничные условия для области интегрирования размером $N \times M$ запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{i,M} &= v_{i,M-1}, & \sigma_{y,i,M} &= \sigma_{y,i,M-1}, \\ \sigma_{x,i,M} &= \sigma_{x,i,M-1}, & v_{x,i,M} &= \beta v_{x,i,M-1}, \\ \tau_{xy,i,M} &= \tau_{xy,i,M-1}, & v_{y,i,M} &= \gamma v_{y,i,M-1}. \end{aligned}$$

Анализ результатов

При численной реализации изложенного алгоритма в качестве среды был выбран кварцевый песок, непрерывно поступающий из бункера на наклонную поверхность лотка,

Таблица 1

Реологические коэффициенты для кварцевого песка

Реологические параметры	Кварцевый песок, $v_d = 0,59$	
	$v < v_d$	$v \geq v_d$
$\alpha_0(v), \text{Н/м}^2$	$\alpha_0 = \begin{cases} -2,5 \cdot 10^6 \frac{v - 0,53}{0,71 - v}, & \text{если } v \geq 0,53 \\ 0, & \text{если } v < 0,53 \end{cases}$	
$\alpha_1, \text{Нс/м}^2$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	1,3
$\alpha_2, \text{Нс/м}^2$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	1,7
$\alpha_3, \text{Нс/м}^2$	$0,7 \cdot 10^{-2}$	2,1
$\alpha_4, \text{Нс}^2/\text{м}^2$	$0,2 \cdot 10^{-1}$	4,2
$\alpha_5, \text{Нс}^2/\text{м}^2$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	0,017

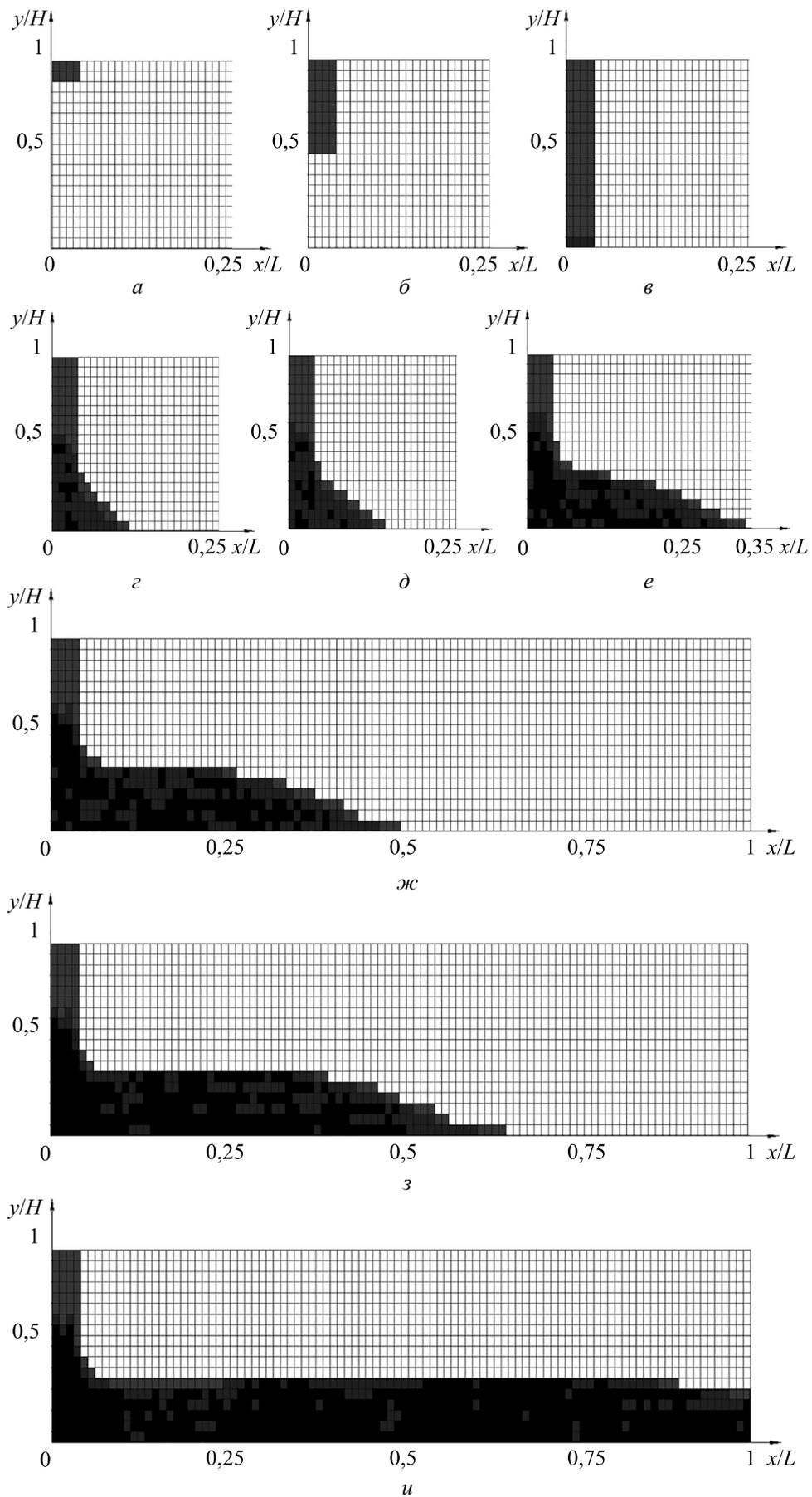


Рис. 3. Рассыпание сыпучей среды по наклонной вибрирующей поверхности при постоянном подсыпании: а-в – падение среды на поверхность; г-е – растекание среды; ж-и – зоны растекания среды

вибрирующего по гармоническому закону в направлении, параллельном его плоскости (см. рис. 1). Верхняя граница расчетной области совпадает с нижней кромкой бункера. На нижней и левой границах расчетной области заданы условия, ограничивающие движение материала; правая и верхняя границы считаются свободными. Принято, что характерный размер сечения выходного отверстия бункера равен четырем ячейкам, расположенным в направлении оси x (рис. 3, a).

Численные расчеты проводились при значениях коэффициентов $\alpha_i, i = 0, \dots, 5$, приведенных в таблице 1 [11]. Параметры эйлеровой сетки: $L = 5$ м, $H = 0,5$ м; $M = 20$, $N = 100$. Начальная концентрация ячеек с материалом – $\nu_d = 0,53$. Плоскость наклонена под углом $\beta = 3^\circ$.

Результаты расчета приведены на рис. 3 в виде нескольких последовательных дискретных во времени распределений сыпучей среды по расчетной области. По мере истечения под действием гравитации происходит падение среды на поверхность лотка, что иллюстрируется заполнением ячеек в направлении оси y (см. рис. 3, a – b). После касания первых слоев среды поверхности лотка сразу же начинается ее растекание (см. рис. 3, z – e). При дальнейшем истечении среды из бункера зона растекания увеличивается (см. рис. 3, $ж$ – $и$). При этом, чем больше объем высыпающегося песка, тем интенсивнее происходит его растекание по поверхности в силу увеличения массы материала и повышения концентрации в нижних слоях.

В настоящей работе также вычислялись координаты центра масс среды во времени, начиная с момента касания первых порций материала с лотком и заканчивая моментом первоначального касания среды правой границы расчетной области (рис. 4). Этап 1 соответствует свободному падению материала из отверстия дозатора (см. рис. 3, a – b), поэтому центр масс

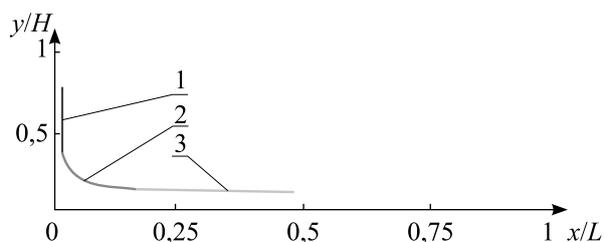


Рис. 4. Изменение координаты центра масс среды во время заполнения лотка:

1 – при падении среды, 2 – при формировании насыпи, 3 – при перемещении среды вдоль лотка

перемещается вертикально. На этапе 2 формируется насыпь, и начинается перемещение среды по поверхности лотка (см. рис. 3, z – e), а на этапе 3 происходит растекание среды и заполнение всей рабочей поверхности лотка равномерным слоем материала (см. рис. 3, e – $и$).

Анализ результатов, приведенных на рис. 4, показывает, что во время формирования насыпи и перемещения среды по вибрирующему лотку, центр масс смещается вдоль оси x и к моменту заполнения лотка имеет положение, близкое к центру расчетной области, что соответствует общим физическим представлениям о процессе. То, что в конечный момент времени координата x центра масс не находится строго по центру лотка, объясняется тем, что в левой части области находится зона подсыпания.

Заключение

В результате выполненной работы сформирована система дифференциальных уравнений, описывающих движение сыпучих материалов на шероховатой вибрирующей поверхности на основе представлений механики сплошной среды. Для решения данной системы уравнений на основе метода крупных частиц разработан и программно реализован численный алгоритм. Предложенный алгоритм позволяет получить как глобальные (перемещение и скорость центра масс, среднюю скорость транспортировки, распределение и форму среды на лотке в зависимости от параметров вибрации), так и локальные параметры (концентрацию и скорость среды в произвольной зоне) в произвольный момент времени.

Результаты, полученные при проведении численного эксперимента, соответствуют физическому представлению о данном процессе. Предложенный алгоритм обладает универсальностью и может быть использован для моделирования движения сыпучих сред при других условиях вибрационных воздействий, в частности, при неоднородном поле вибрационного воздействия.

Авторы выражают благодарность доктору технических наук, профессору О.Г. Локтиновой за ряд ценных замечаний, высказанных при обсуждении данной работы.

Список литературы

1. Сливаковский А.О., Гончаревич И.Ф. Вибрационные конвейеры, питатели и вспомогательные устройства. М.: Машиностроение, 1972. – 327 с.

2. Азбель Г.Г., Блехман И.И., Быховский И.И. Вибрации в технике: справочник в 6 т.: под ред. Э.Э. Левендела. Т.4. М.: Машиностроение, 1981. — 509 с.
3. Gutman I. Industrial uses of mechanical vibrations. London: Business Books Ltd, 1968. — 331 p.
4. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. — 412 с.
5. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. — 374 с.
6. Черняк В.Г., Суетин П.Е. Механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2006. — 352 с.
7. Jaeger H.M., Nagel S.R., Behringer R.P. Granular solids, liquids, and gases. // Rev. of Mod. Phys. 1996. Vol. 68. No. 4. PP. 1259–1273.
8. Ogawa S. Multitemperature theory of granular materials // Proc. of the US – Japan Seminar on Contin-Mechanical and Statistical Approaches Mechanical Granular Material. Tokyo: Gukujustu Bunken Fukuyakai, 1978. P. 208.
9. Vibration-induced phenomena in bulk granular materials / V.A. Golovanovskyi, V.A. Arsenyev, I.I. Blekhman, V.B. Vasilkov, Y.I. Azbel, K.S. Yakimova // Inter. Journ. of Mineral Processing. 2011. Vol. 100. PP. 79-85.
- 10 Some ideas on modeling stress propagation in granular media / E.F. Grecova, A. Castellanos, S.N. Gavrilov et al. // Book of Abstracts of the XXXV Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». June 20–28, 2008. St. Petersburg (Repino), Russia. PP. 423–426.
11. Локтионова О.Г. Динамика вибрационных технологических процессов и машин для переработки неоднородных гранулированных сред: дис. ... док. техн. наук. Курск, 2008. — 215 с.
12. Гортинский В.В. Послойное движение продуктов измельчения зерна при сепарации на плоских ситах // Труды ВУРЕЗ. 1963. № 42. С. 14–17.
13. Маслова О.Г. Исследование динамики и разработка методики расчета вибрационных дозаторов сыпучих материалов методом крупных частиц: дис. ... канд. техн. наук. Курск, 1992. — 165 с.
14. Яцун С.Ф. Математическое моделирование вибрационных машин для переработки сыпучих материалов // Известия Курск. гос. техн. ун-та. 1997. № 1. С. 11–20.
15. Журавлева Е.В. Моделирование динамики процесса вибрационного транспортирования сыпучего материала: дис. ... канд. техн. наук. Курск, 2000. — 129 с.
16. Яцун С.Ф., Журавлева Е.В. Вычислительный эксперимент в динамике сыпучих материалов // Вибрационные машины и технологии. Сборник научных докладов IV Международной научно-технической конференции. Омск. 1999. С. 143–147.
17. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. М.: Стройиздат, 1977. — 256 с.
18. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физ.-мат. литература, 1994. — 448 с.
19. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике: Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982. — 392 с.

ЛЯН

Илья Павлович

E-mail: lyanilyaimash@yandex.ru

Тел.: (499) 135-44-79

Младший научный сотрудник лаборатории вибромеханики ИМАШ РАН. Сфера научных интересов: теория нелинейных колебаний, вибрационная техника и технологии.

ПАНОВКО

Григорий Яковлевич

E-mail: granovko@yandex.ru

Тел.: (499) 135-30-47

Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией вибромеханики ИМАШ РАН, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: теория нелинейных колебаний, динамика машин, вибрационная техника и технологии. Автор более 180 научных работ, в т.ч. пяти монографий и 17 патентов.