УДК 531.383

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ И КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМИ ДАТЧИКАМИ УПРАВЛЕНИЯ[1]

**Д.А. Маслов**

*Рассматривается волновой твердотельный гироскоп с цилиндрическим резонатором и электростатическими датчиками управления. Используется математическая модель вынужденных колебаний цилиндрического резонатора, учитывающая разночастотность и разнодобротность, а также кубическую нелинейность колебаний резонатора и квадратичную нелинейность сил управления. Для разомкнутого режима функционирования гироскопа предложена алгоритмическая компенсация дрейфа гироскопа, вызванного нелинейностью колебаний и погрешностями характеристик резонатора. Показана возможность учета не только кубической нелинейности колебаний резонатора, но и квадратичной нелинейности сил управления, вызванных электростатическими датчиками. Предложены способы устранения нелинейности датчиков управления и погрешностей гироскопа в компенсационном режиме функционирования гироскопа. В предложенных методах компенсации погрешностей используются значения коэффициентов математической модели динамики гироскопа, которые определяются по специальной методике идентификации параметров.*

***Ключевые слова:*** *волновой твердотельный гироскоп, нелинейные колебания, идентификация параметров, компенсация погрешностей.*

# IDENTIFICATION AND ERRORS COMPENSATION METHODS FOR WAVE SOLID-STATE GYROSCOPE WITH ELECTROSTATIC CONTROL SENSORS

**D.A. Maslov**

*Wave solid-state gyroscope with the cylindrical resonator and the electrostatic control sensors is considered. The mathematical model of forced oscillations of the cylindrical resonator is used. This mathematical model takes into account the frequency difference, the quality factor difference, the cubic nonlinearity of the resonator oscillations and the quadratic nonlinearity of the control forces. Algorithmic compensation of gyroscope drift caused by nonlinearity of oscillations and errors of the resonator characteristics is suggested for the open-loop mode of gyroscope operation. The possibility of taking into account not only the cubic nonlinearity but also the quadratic nonlinearity of the control forces caused by electrostatic sensors is shown. The methods for eliminating the nonlinearity of control sensors and errors of gyroscope are suggested for the compensation feedback mode of gyroscope operation. The values of coefficients of the mathematical model of the gyroscope resonator dynamics are used in the proposed methods of errors compensation. Aforementioned coefficients of the mathematical model are identified by a the special method of parameters identification.*

***Keywords:*** *wave solid-state gyroscope, nonlinear oscillations, parameters identification, errors compensation.*

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00772-а, № 16-08-01269-а).

### Введение

В настоящее время волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации [1–3]. Большое внимание уделяется вопросам, связанным с повышением точности ВТГ, которая определяется рядом факторов: нелинейными колебаниями резонатора [4–6], неоднородностью материала резонатора, неравномерностью упругих характеристик, анизотропией демпфирования и другими технологическими погрешностями изготовления резонатора [4–8].

Повысить точность гироскопа можно с помощью алгоритмов компенсации, использующих значения параметров ВТГ, определенных по методикам идентификации параметров ВТГ. Вопросы идентификации параметров ВТГ рассмотрены в работах [8–12]. В статье [13] предложены методики компенсации дефектов ВТГ без учета нелинейности сил управления.

Поэтому целью данного исследования является разработка методики компенсации дрейфа ВТГ с цилиндрическим резонатором и емкостными датчиками управления, вызванного нелинейностью колебаний и анизотропией характеристик резонатора с учетом нелинейности сил управления.

### Постановка задачи

Рассматривается тонкий упругий цилиндрический резонатор, один край которого свободен, а другой жестко прикреплен к подвижному основанию. Для поддержания незатухающих колебаний цилиндрической оболочки используются емкостные датчики управления, образованные свободной кромкой цилиндрической оболочки резонатора и шестнадцатью электродами (рис. 1).

Разность потенциалов между электродами и резонатором задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
U_1 = U_9 &= U_0(1 - u_1 \sin\omega_0 t + u_2 \cos\omega_0 t),\\
U_5 = U_{13} &= U_0(1 + u_1 \sin\omega_0 t - u_2 \cos\omega_0 t),\\
U_3 = U_{11} &= U_0(1 - u_3 \sin\omega_0 t + u_4 \cos\omega_0 t),\\
U_7 = U_{15} &= U_0(1 + u_3 \sin\omega_0 t - u_4 \cos\omega_0 t),
\end{aligned} \tag{1}$$

где $U_0$ – постоянное опорное напряжение; $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ – нормализованные по отношению к $U_0$ амплитуды напряжения; $\omega_0$ – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора. На остальных электродах разность потенциалов задается равной $U_0$.

При учете закона управления (1) уравнения динамики цилиндрического резонатора ВТГ в безразмерном времени $\tau = \omega t$ имеют вид [11]:

$$\begin{aligned}
\ddot{f} + f = \varepsilon\Big[&-(c+h_c)f - (n+h_s)g - (\gamma+b_c)\dot{f} -\\
&-(\nu+b_s)\dot{g} + \xi(f^2+g^2)f + (1+3f^2)\times\\
&\times\big(-u_1 \sin\mu\tau + u_2 \cos\mu\tau\big)\Big],\\
\ddot{g} + g = \varepsilon\Big[&-(c-h_c)g - (-n+h_s)f - (\gamma-b_c)\dot{g} -\\
&(-\nu+b_s)\dot{f} + \xi(f^2+g^2)g + (1+3g^2)\times\\
&\times\big(-u_3 \sin\mu\tau + u_4 \cos\mu\tau\big)\Big],
\end{aligned} \tag{2}$$

где $f(\tau)$ и $g(\tau)$ – обобщенные координаты второй основной формы колебаний, равные радиальным смещениям резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом $45^{\circ}$; $\nu$ – безразмерная угловая скорость; $\gamma$ – безразмерный коэффициент демпфирования колебаний, $\mu = \omega_0/\omega = (\omega+\lambda)/\omega$, $\lambda = \omega_0 - \omega$ – частотная настройка между частотой возбуждения колебаний $\omega_0$ и основной резонансной частотой $\omega$; параметр $\varepsilon$ характеризует малость величины электрических сил, действующих на резонатор, и зависит от опорного напряжения $U_0$; с и $n$ – параметры позиционных сил; $h_s = h\sin 4\alpha$, $h_c = h\cos 4\alpha$ и $b_s = b\sin 4\beta$, $b_c = b\cos 4\beta$ – компоненты, характеризующие упругую и вязкую анизотропию; $h$ и $b$ – модули разночастотности и разнодобротности; $\alpha$ и $\beta$ – углы ориентации главных осей жесткости и главных осей диссипации относительно отсчетных осей; $\xi$ – коэффициент нелинейности; точкой обозначено дифференцирование по без-

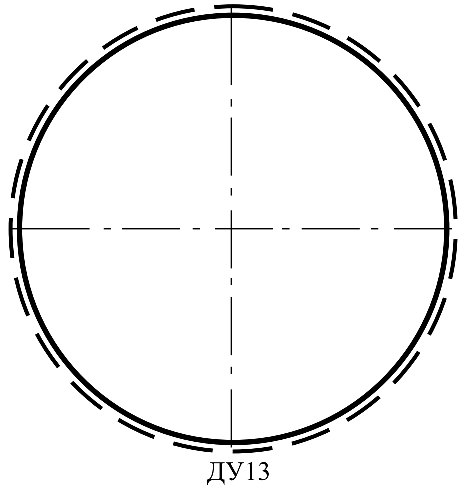


**Рис. 1. Расположение емкостных датчиков управления (ДУ)**

размерному времени $\tau$. Уравнения динамики цилиндрического резонатора ВТГ (2) кроме характерной для всех ВТГ кубической нелинейности [5], содержат слагаемые, учитывающие влияние нелинейности на амплитуду вынуждающего воздействия [11].

Ставится задача компенсации дрейфа рассматриваемого гироскопа, вызванного определяемыми параметрами: разночастотностью, разнодобротностью, коэффициентом нелинейности. Решение поставленной задачи включает идентификацию параметров гироскопа при стационарных режимах колебаний, в том числе коэффициента нелинейности колебаний; алгоритмическую компенсацию погрешностей, вызванных определяемыми параметрами в разомкнутом режиме функционирования гироскопа; силовую компенсацию погрешностей в замкнутом режиме функционирования ВТГ.

### Идентификация параметров ВТГ

Сначала проводим осреднение системы (2) по методу Крылова-Боголюбова в первом приближении по малому параметру $\varepsilon$. Для этого используем переход к медленным переменным $p_1(\tau),\ q_1(\tau),\ p_2(\tau),\ q_2(\tau)$ с помощью замены [11, 14]

$$
\begin{aligned}
&f = p_1 \sin\mu\tau + q_1\cos\mu\tau,\\
&g = p_1\cos\mu\tau - q_1\sin\mu\tau,\\
&\dot f = \mu(p_2\sin\mu\tau + q_2\cos\mu\tau),\\
&\dot g = \mu(p_2\cos\mu\tau - q_2\sin\mu\tau).
\end{aligned}
$$

Получена система

$$
\begin{aligned}
&2\dot q_1 = -\gamma q_1 - b_c q_1 - \nu q_2 - b_s q_2 + c p_1 + h_c p_1 +\\
&+n p_2 + h_s p_2 - 2p_1\lambda/\omega + u_1(1+k_5) + u_2 k_9 + \xi k_1;\\
&2\dot p_1 = -\gamma p_1 - b_c p_1 - \nu p_2 - b_s p_2 - c q_1 - h_c q_1 -\\
&n q_2 - h_s q_2 + 2q_1\lambda/\omega + u_1 k_9 + u_2(1+k_6) + \xi k_2;\\
&2\dot q_2 = -\gamma q_2 + b_c q_2 + \nu q_1 - b_s q_1 + c p_2 - h_c p_2 -\\
&-n p_1 + h_s p_1 - 2p_2\lambda/\omega + u_3(1+k_7) + u_4 k_{10} + \xi k_3;\\
&2\dot p_2 = -\gamma p_2 + b_c p_2 + \nu p_1 - b_s p_1 - c q_2 + h_c q_2 +\\
&+n q_1 - h_s q_1 + 2q_2\lambda/\omega + u_3 k_{10} + u_4(1+k_8) + \xi k_4,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&k_1 = -p_1E - q_2X,\ k_2 = q_1E - p_2X,\\
&k_3 = -p_2E + q_1X,\ k_4 = q_2E + p_1X,\\
&E = 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4,\ K = (p_2q_1 - p_1q_2)/2.\\
&k_5 = 3(3p_1^2 + q_1^2)/4,\ k_6 = 3(p_1^2 + 3q_1^2)/4,\\
&k_7 = 3(3p_2^2 + q_2^2)/4,\ k_8 = 3(p_2^2 + 3q_2^2)/4,\\
&k_9 = -3q_1p_1/2,\ k_{10} = -3q_2p_2/2.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты $k_5,\ldots,k_{10}$, учитывают влияние нелинейности на амплитуду вынуждающих сил.

Переводим (3) в размерное время $t$:

$$
\begin{aligned}
&2\dot q_1 = -\gamma q_1 - b_c q_1 - \nu q_2 - b_s q_2 + \tilde c p_1 + \tilde h_c p_1 + \tilde n p_2 +\\
&+\tilde h_s p_2 - 2\lambda p_1 + \tilde u_1(1+k_5) + \tilde u_2 k_9 + \tilde\xi k_1;\\
&2\dot p_1 = -\gamma p_1 - b_c p_1 - \nu p_2 - b_s p_2 - \tilde c q_1 - \tilde h_c q_1 - \tilde n q_2 -\\
&-\tilde h_s q_2 + 2\lambda q_1 + \tilde u_1 k_9 + \tilde u_2(1+k_6) + \tilde\xi k_2;\\
&2\dot q_2 = -\gamma q_2 + b_c q_2 + \nu q_1 - b_s q_1 + \tilde c p_2 - \tilde h_c p_2 - \tilde n p_1 +\\
&+\tilde h_s p_1 - 2\lambda p_2 + \tilde u_3(1+k_7) + \tilde u_4 k_{10} + \tilde\xi k_3;\\
&2\dot p_2 = -\gamma p_2 + b_c p_2 + \nu p_1 - b_s p_1 - \tilde c q_2 + \tilde h_c q_2 + \tilde n q_1 -\\
&-\tilde h_s q_1 + 2\lambda q_2 + \tilde u_3 k_{10} + \tilde u_4(1+k_8) + \tilde\xi k_4,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени $t$; $\tilde\xi = \xi/\omega$, $\tilde h_c = h_c/\omega$, $\tilde h_s = h_s/\omega$, $\tilde c = c/\omega$, $\tilde n = n/\omega$, $\tilde u_i = u_i/\omega$, $i = 1,2,3,4$.

Для идентификации параметров рассмотрим $N$ стационарных режимов вынужденных колебаний резонатора, которые определяются системами алгебраических уравнений, полученными из (4), и соответствуют частотным настройкам $\lambda_j$:

$$
\mathbf{y}_j = \mathbf{D}_j\mathbf{z} + \mathbf{e}_j,\ j = 1,\ldots,N,
\tag{5}
$$

где вектор параметров

$$
\mathbf{z} = \left(\gamma,\nu,b_c,b_s,\tilde c,\tilde n,\tilde h_c,\tilde h_s,\tilde u_1,\tilde u_2,\tilde u_3,\tilde u_4,\tilde\xi\right)^T,
$$

измеряемая матрица

$$
\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix}
-q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 & 1+k_5 & k_9 & 0 & 0 & k_1\\
-p_1 & -p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & k_9 & 1+k_6 & 0 & 0 & k_2\\
-q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 & 0 & 0 & 1+k_7 & k_{10} & k_3\\
-p_2 & p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & 0 & 0 & k_{10} & 1+k_8 & k_4
\end{pmatrix},
$$

измеряемый вектор

$$\mathbf{y}_j = 2\lambda_j \left( p_1, -q_1, p_2, -q_2 \right)^T,$$

вектор случайных ошибок измерений $\mathbf{e}_j$, подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием.

Далее составляется переопределенная система алгебраических уравнений из $N$ блоков (5), соответствующих заданным частотным настройкам $\lambda_j$, $j = 1,...,N$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Dz} + \mathbf{e}, \tag{6}$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, .., \mathbf{D}_N^T)^T, \ \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, .., \mathbf{y}_N^T)^T,$$

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, .., \mathbf{e}_N^T)^T, \ \mathbf{e} \sim N(0, \sigma_e^2 \mathbf{I}),$$

$N$ – число стационарных режимов колебаний резонатора.

При условии, что матрица $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ не является вырожденной, по методу наименьших квадратов получаем оценку параметров математической модели

$$\hat{\mathbf{z}} = \left( \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right)^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{y},$$

которая минимизируют остаточную дисперсию

$$\hat{\sigma}^2 = \left( \mathbf{y} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{z}} \right)^T \left( \mathbf{y} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{z}} \right) / \left( 4N - k \right),$$

где $n = 4N$ – число уравнений $k = 13$ – число идентифицируемых параметров. Доверительный интервал для определяемых параметров задаем неравенствами

$$\hat{z}_j - t_p \hat{\sigma}_{\text{ост}} \sqrt{c_{jj}} \le z_j \le \hat{z}_j + t_p \hat{\sigma}_{\text{ост}} \sqrt{c_{jj}},$$
$$j = 1,...,k,$$

где $c_{jj}$ – диагональные элементы матрицы $\mathbf{C} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}$, $t_p$ – квантиль порядка $p = (1 + P_\text{Д})/2$ распределения Стьюдента с $n - k$ степенями свободы, $P_\text{Д}$ – доверительная вероятность. Если число $n - k$ мало, то $t_p$ выбирают по таблице распределения Стьюдента, если $n - k > 30$, то $t_p$ можно выбирать из таблицы функций Лапласа.

## Алгоритмическая компенсация дрейфа гироскопа

Для вычисления угловой скорости из уравнений (4) выводятся формулы, учитывающие нелинейность колебаний и параметры резонатора гироскопа:

$$\nu = \frac{a_1}{q_1}, \tag{7}$$

$$\nu = \frac{a_2}{p_1}, \tag{8}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{q_1{}^2 + p_1{}^2}}, \tag{9}$$

где

$$a_1 = (\tilde{\xi} X - b_s) q_1 + (-\tilde{n} + \tilde{h}_s) p_1 + (\tilde{c} - 2\lambda - \tilde{\xi} E - \tilde{h}_c) \times$$
$$\times p_2 + (-\gamma + b_c) q_2 - (1 + k_7) \tilde{u}_3 - k_{10} \tilde{u}_4,$$

$$a_1 = (\tilde{\xi} X - b_s) q_1 + (-\tilde{n} + \tilde{h}_s) p_1 + (\tilde{c} - 2\lambda - \tilde{\xi} E - \tilde{h}_c) \times$$
$$\times p_2 + (-\gamma + b_c) q_2 - (1 + k_7) \tilde{u}_3 - k_{10} \tilde{u}_4,$$

$$a_2 = (\tilde{\xi} X - b_s) p_1 + (\tilde{n} - \tilde{h}_s) q_1 + (-\tilde{c} + 2\lambda + \tilde{\xi} E + \tilde{h}_c) \times$$
$$\times q_2 + (-\gamma + b_c) p_2 - k_{10} \tilde{u}_3 - (1 + k_8) \tilde{u}_4.$$

Формула (9) позволяет определить модуль скорости, для определения направления скорости нужно использовать формулы (7) и (8). Условием выбора одной из формул (7) и (8) является отличие от нуля величин $q_1$ и $p_1$ соответственно.

Если компонентами упругой $\tilde{h}_s$, $\tilde{h}_c$ и вязкой анизотропией $b_s$, $b_c$ резонатора, а также параметрами позиционных сил $\tilde{c}$, $\tilde{n}$ и нелинейностью можно пренебречь, т.е. $\tilde{h}_s = \tilde{h}_c = b_s = b_c = \tilde{c} = \tilde{n} = \tilde{\xi} = 0$, то выражения для определения скорости основания (9) при $\tilde{u}_3 = \tilde{u}_4 = 0$ совпадает с формулой [5]:

$$\nu = \frac{B\sqrt{\gamma^2 + 4\lambda^2}}{A}.$$

где $A = \sqrt{q_1{}^2 + p_1{}^2}$, $B = \sqrt{q_2{}^2 + p_2{}^2}$.

## Устранение нелинейности датчиков управления

Уравнения (2) содержат слагаемые, содержащие нелинейности при амплитудах вынуждающего воздействия. Будем формировать напряжения управляющих электродов с учетом информации датчиков измерения, позволяющей исключить нелинейность управляющего воздействия [15]:

$$U_1 = U_9 = U_0 \left( 1 + (1 - 3f^2)(-u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t) \right),$$
$$U_5 = U_{13} = U_0 \left( 1 - (1 - 3f^2)(-u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t) \right),$$
$$U_3 = U_{11} = U_0 \left( 1 + (1 - 3g^2)(-u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t) \right),$$
$$U_7 = U_{15} = U_0 \left( 1 - (1 - 3g^2)(-u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t) \right),$$
$$U_i = U_0, \ i = 2,4,6,8,10,12,14,16. \tag{10}$$

В этом случае уравнения динамики резонатора ВТГ в медленных переменных $p_1(t),\ q_1(t),\ p_2(t),\ q_2(t)$ совпадают с уравнениями (4) при $k_5 = \ldots = k_{10} = 0$.

### Силовая компенсация дрейфа гироскопа

Рассматриваются стационарные колебания, описываемые уравнениями (4) с проведенной линеаризацией датчиков управления (10). Построен пропорциональный регулятор. Управление $\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_4$ задаем в виде пропорциональной обратной связи по измерению медленных переменных $p_1, q_1, p_2, q_2$ с компенсацией предварительно определенных параметров ВТГ, включая коэффициент нелинейности:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_1 = b_c q_1 - (\tilde{c} + \tilde{h}_c - 2\lambda) p_1 + b_s q_2 - \\
&-(\tilde{h}_s + \tilde{n}) p_2 + \tilde{\xi}(E p_1 + X q_2) - K_1\left(q_1 - \overline{q}_1\right), \\
&\tilde{u}_2 = (\tilde{c} + \tilde{h}_c - 2\lambda) q_1 + b_c p_1 + (\tilde{h}_s + \tilde{n}) q_2 + \\
&+b_s p_2 + \tilde{\xi}(-E q_1 + X p_2) - K_1\left(p_1 - \overline{p}_1\right), \\
&\tilde{u}_3 = b_s q_1 - (\tilde{h}_s - \tilde{n}) p_1 - b_c q_2 + \\
&+(-\tilde{c} + \tilde{h}_c + 2\lambda) p_2 + \tilde{\xi}(-X q_1 + E p_2) - K_1 q_2, \\
&\tilde{u}_4 = (\tilde{h}_s - \tilde{n}) q_1 + b_s p_1 - (-\tilde{c} + \tilde{h}_c + 2\lambda) q_2 - \\
&-b_c p_2 + \tilde{\xi}(-X p_1 - E q_2) - K_1 p_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $K_1$ – коэффициент усиления в цепи обратной связи, выбираемый из условия обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы управления, $\overline{q}_1$, $\overline{p}_1$ – заданные программные значения. Целью управления является возбуждение и поддержание заданной амплитуды первичных колебаний и вторичных колебаний, поэтому программные значения $\overline{q}_2 = \overline{p}_2 = 0$.

Подставляя (11) в (4) получаем систему линейных дифференциальных уравнений, решение которой можно представить в виде суммы асимптотически устойчивого решения, зависящего от начальных условий и требуемых значений $\overline{q}_1$, $\overline{p}_1$ и стационарных частных решений. Установившиеся решения:

$$\begin{aligned}
&q_{1*} = K_1\overline{q}_1(K_1 + \gamma)/P,\ q_{2*} = -K_1\overline{q}_1\nu/P, \\
&p_{1*} = K_1\overline{p}_1(K_1 + \gamma)/P,\ p_{2*} = -K_1\overline{p}_1\nu/P,
\end{aligned}$$

где $P = \nu^2 + (K_1 + \gamma)^2$.

Оценка угловой скорости основания может быть определена по измерениям установившихся значений медленных переменных:

$$\hat{\nu} = -\left(K_1 + \gamma\right)\frac{p_{2*}}{p_{1*}}, \tag{12}$$

$$\hat{\nu} = -\left(K_1 + \gamma\right)\frac{q_{2*}}{q_{1*}}. \tag{13}$$

Условием выбора одной из формул (12) и (13) является отличие от нуля величин $p_{1*}$ и $q_{1*}$ соответственно. Из формул (12) и (13) следует формула для модуля оценки угловой скорости:

$$\hat{\nu} = \left(K_1 + \gamma\right)\sqrt{\frac{(p_{2*})^2 + (q_{2*})^2}{(p_{1*})^2 + (q_{1*})^2}}.$$

### Вычислительные эксперименты

Приведенные формулы (12), (13) подтверждаются результатами моделирования (рис. 2, 3), которое проводилось при близких к существующим конструктивным параметрам гироскопа [1] с цилиндрическим резонатором. Гироскоп находится на подвижном основании, вращающемся с постоянной угловой скоростью 300°/с. Характерная частота собственных колебаний резонатора составляет $\omega = 2340$ с$^{-1}$, коэффициент демпфирования равняется $\gamma = 0{,}7$ с$^{-1}$. Расщепление частот $h = 10{,}2$ с$^{-1}$, анизотропия демпфирования $b = 0{,}0027$ с$^{-1}$. При построении решения задаются коэффициент усиления $K_1 = 500$ с$^{-1}$, программные значения $\overline{q}_1 = 1,\ \overline{p}_1 = 0,$ и начальные условия $q_{10} = 0,$ $p_{10} = 1,\ q_{20} = 0{,}6,\ p_{20} = 0{,}3$.

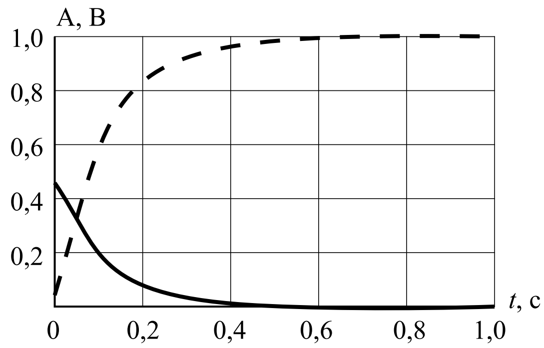


**Рис. 2. Выход на режим установившихся колебаний без применения обратной связи:**
- - - - - – амплитуда колебаний А, ———— – В)

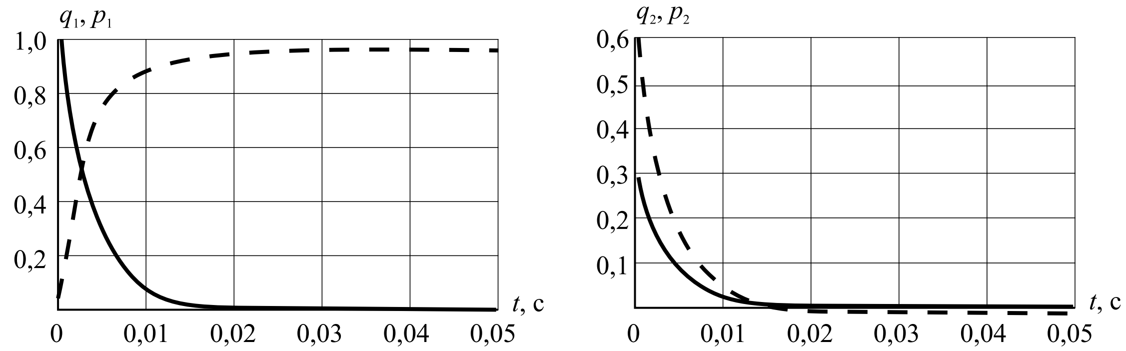


**Рис. 3. Выход на режим установившихся колебаний при применении обратной связи:**
- - - - - – $q_1, q_2$, ——— – $p_1, p_2$.

Время выхода на режим установившихся колебаний составляет примерно 0,5 с (рис. 2) без применения обратной связи и 0,02 с (рис. 3) в компенсационном режиме функционирования гироскопа. Таким образом, применение пропорционального регулятора позволяет существенно сократить время окончания переходных процессов. Значения $q_1$, $q_2$ в установившемся режиме не совпадают с заданными значениями, т.е. имеется статическая ошибка регулирования, вызванная наличием угловой скорости основания.

Рассчитанная по формуле (13) зависимость угловой скорости основания от времени (рис. 4) показывает высокую точность определения угловой скорости при компенсации дрейфа, вызванного дефектами резонатора.

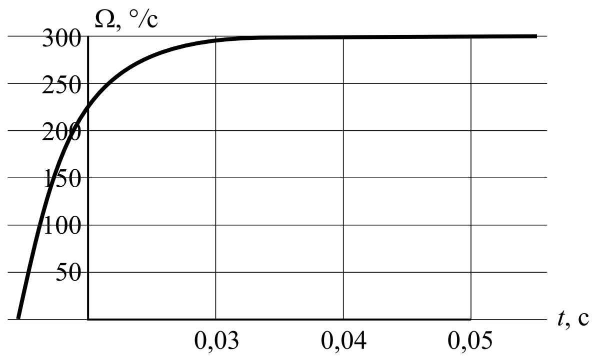


**Рис. 4. Зависимость расчетной угловой скорости от времени**

Реализация компенсационного режима позволяет существенно сократить время функциональной готовности прибора и повысить точность определения угловой скорости.

## Заключение

Для волнового твердотельного гироскопа с цилиндрическим резонатором и электростатическими датчиками управления предложены методы компенсации погрешностей гироскопа: алгоритмическая компенсация дрейфа гироскопа и управляющие сигналы с использованием обратной связи. Описанные методы используют значения коэффициентов математической модели динамики резонатора, которые определяются по специальной методике идентификации параметров.

## Список литературы


1. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов / *М.А. Басараб, Б.С. Лунин, В.А. Матвеев, А.В. Фомичев, Е.А. Чуманкин, А.В. Юрин* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 80−96.
2. *Мейер Д., Розелле Д.* Инерциальная навигационная система на основе миниатюрного волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2012. № 3. С. 45–54.
3. *Жанруа А., Буве А., Ремиллье Ж.* Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении // Гироскопия и навигация. 2013. № 4. С. 24–34.
4. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. − 125 с.
5. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. № 6. 1997. С. 27−35.
6. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. − 228 с.
7. *Журавлев В.Ф.* Дрейф несовершенного ВТГ. // Изв. РАН. МТТ. №4. 2004. С. 19−23.

8. *Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.* Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. − 167с.
9. *Журавлев В.Ф.* Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. АН. МТТ. 2000. № 5. С. 186−192.
10. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 18−23.
11. *Маслов Д.А.* Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду вынуждающего воздействия // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1 (50). С. 24−31.
12. Развитие теории создания волновых твердотельных гироскопов с металлическим резонатором. *В.А. Матвеев, М.А. Басараб, Б.С. Лунин, Е.А. Чуманкин, А.В. Юрин* // Вестник РФФИ. 2015. № 3 (87). С. 84−96.
13. *Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Компенсация погрешностей и учет нелинейности колебаний вибрационного кольцевого микрогироскопа в режиме датчика угловой скорости // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 2. С. 227−241.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. – 503 с.
15. *Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Линеаризация колебаний резонатора волнового твердотельного гироскопа и сил электростатических датчиков управления // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 3. С 413−421.



**МАСЛОВ**
**Дмитрий Александрович**

E-mail: **MaslovDmA@mpei.ru,**
**dm_93@live.ru**
Тел.: **(916)247-51-00**

Аспирант кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: теория колебаний и устойчивость движения, математическое моделирование, теоретическая механика, гироскопия. Автор 11 научных работ по исследованию динамики волновых твердотельных и микромеханических гироскопов.