УДК 004.383.4+629,735.33.002.2

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.М. Мурзин, А.В. Панфилов, Ю.Л. Сюськина

В работе рассматриваются вопросы определения предполагаемого суммарного времени оптимизационного процесса динамических пространственных конструкций с различным количеством степеней свободы. Конструкции представляют собой системы упруго связанных между собой и основанием твердых тел, имеющих древовидную структуру. Приведен алгоритм, позволяющий упростить аналитические выражения вычисления тройной суммы, входящей в дифференциальное уравнение определения обобщенных координат. Выбран алгоритмический язык программирования, поставлена задача параметрической оптимизации конструкций. Получены графики времени однократного численного интегрирования систем дифференциальных уравнений в зависимости от длительности динамического процесса и максимальной собственной частоты колебаний систем для конструкций с различным числом степеней свободы. Проведен анализ возможности определения одних и тех же локальных минимумов обобщенного критерия при последовательном и параллельном вычислительных процессах оптимизации конструкций, определено уменьшение времени вычислений при параллельных вычислениях с использованием многоядерных процессоров ПЭВМ.

Ключевые слова: *пространственная конструкция, древовидная структура, оптимизация, параллельные вычисления.*

OPTIMIZATION PROBLEM SOLVING FOR SPATIAL STRUCTURES

A.M.Murzin, A.V. Panfilov, Y.L. Siuskina

In the paper there are described issues related to the determination of the total time estimated for optimization process of dynamic spatial structures with different degrees of freedom. Structures constitute the systems of rigid bodies elastically connected with each other and the base of with tree-like structure. An algorithm is presented to simplify the analytical expressions for calculating the triple sum included in the differential equation for determining the generalized coordinates. The algorithmic programming language is chosen, the problem of parametric optimization of constructions is set. Time graphs for a single numerical integration of systems of differential equations depending on the dynamic process duration and the maximum natural frequency of systems oscillations for structures with different degrees of freedom are obtained. The analysis of possibility for determination of the same local minima of the generalized criterion at consecutive and parallel computing processes of structure optimization is carried out, reduction of calculation time is defined at parallel calculations with use of multi-core processors of PC.

Keywords: *spatial construction, tree-like structure, optimization, parallel computing.*

Введение

При проведении динамического анализа пространственных конструкций наилучшим вариантом является случай, когда известен аналитический вид матрицы приведенных моментов инерции и вектора правой части системы дифференциальных уравнений, описывающей движение конструкции. Однако с увеличением числа степеней свободы у системы больше трех объем преобразований, необходимых для получения этих аналитических выражений, резко возрастает.

Рассматриваемые конструкции имеют древовидную структуру, совпадающую со структурой манипуляционных роботов. Существуют различные подходы к формированию уравнений движения манипуляционных роботов с использованием матриц поворота размерности 3×3 и 4×4. Достаточно подробный анализ формирования уравнений динамики роботов-манипуляторов приведен в работе [1]. Матрицы преобразования однородных координат размерности 4×4, обладающие универсальностью в кинематическом описании, практически не используются в задачах реального времени из-за больших вычислительных затрат, необходимых для выполнения операций над ними [2]. В то же время, использование матриц поворотов размерностью 3×3 позволяет получить эффективные алгоритмы расчета кинематики и динамики, что показано в публикациях [1–3]. В работе [4] предложен подход и язык программирования правых частей уравнений движения сложных механических систем. Однако в работе [5] рассмотрены вопросы разработки параллельного алгоритма для системы динамического управления шестизвенным манипуляционным роботом, движение которого описывается уравнениями с использованием матриц поворота размерности 4×4. Также в работе [6] используются пять результирующих матриц перехода размерности 4×4 между кинематическими парами при выводе математической модели робота.

Программная реализация рассмотренных алгоритмов с использованием матриц поворота размерности 3×3 вызывает затруднения для динамического анализа пространственных конструкций с числом степеней свободы больше шести. Поэтому, когда нет жесткой привязки реального времени движения системы к времени численного интегрирования дифференциальных уравнений, для упрощения программной реализации численного анализа многостепенной пространственной конструкции можно использовать расширенные матрицы поворота кинематических пар размерности 4×4 [7]. В этом случае приходится вычислять элементы матрицы масс и вектора правых частей на каждом шаге численного интегрирования, что приводит к увеличению времени вычислений на ПЭВМ, но существенно упрощает процедуру динамического анализа сложных систем. Такой подход требует тщательной проработки алгоритма вычислений с целью получения минимально возможного количество векторно-матричных преобразований.

Целью работы является проверка работоспособности программного обеспечения, полученного с помощью методики, изложенной в работе [7] с использованием расширенных матриц поворота размерности 4×4, и определение времени вычислительного процесса при оптимизации пространственных конструкций с числом степеней свободы, больше шести.

Построение математической модели

Задача настоящей работы состоит в рассмотрении последовательности взаимосвязанных постановок и решений локальных задач, приводящей, в конечном итоге, к определению времени оптимизации пространственных конструкций с использованием многоядерных ПЭВМ.

В настоящее время для робототехнических систем разработана методика вывода дифференциальных уравнений движения манипулятора с использованием расширенных матриц кинематических пар. Дифференциальное уравнение для определения обобщенной координаты q_j пространственной механической конструкции (например, робототехнического манипулятора без учета изгибных податливостей элементов его конструкции) описывается скалярным уравнением [7]:

$$\sum_{i=j}^{N}\sum_{k=1}^{i} tr(U_{ij}H_iU_{ik}^T)\ddot{q}_k + \sum_{i=j}^{N}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr(U_{ij}H_iV_{ikl}^T)\dot{q}_k\dot{q}_l - \\ -\sum_{i=j}^{N} m_i\bar{G}^T U_{ij}\bar{R}_i^* = Q_j, \qquad (1)$$

$$U_{ik} = \frac{\partial T_i}{\partial q_k} = A_1(q_1)A_2(q_2)...\frac{\partial A_k(q_k)}{\partial q_k}...A_i(q_\text{i});$$

$$V_{ikl} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_l} = \\ = A_1(q_1)A_2(q_2)...\frac{\partial A_k(q_k)}{\partial q_k}...\frac{\partial A_l(q_l)}{\partial q_l}...A_i(q_\text{i}),$$

где $A_k(q_k)$ − расширенная матрица k-й кинематической пары размерности 4×4; $T_i = A_1(q_1)A_2(q_2)...A_i(q_\text{i})$ − произведение расширенных матриц кинематических пар; j − номер дифференциального уравнения, j = 1, 2, ..., N; N − число степеней свободы конструкции; H_i − матрица моментов инерции i-го звена; $tr(U_{ij}H_iU_{ik}^T)$ − след квадратной матрицы $U_{ij}H_iU_{ik}^T$; m_i − масса i-го звена; $\bar{R}_i^*$ − вектор-столбец, первые три элемента которого являются координатами центра тяжести звена в системе координат, жестко связанной с этим звеном; $\bar{G}$ − вектор вида $\bar{G}^T = [0,0,-g,0]$; g − ускорение свободного падения; т − символ транспонирования.

Различные структуры кинематических схем механизмов можно задать соответствующим набором расширенных матриц кинематических пар, что позволяет модифицировать программу численного интегрирования системы дифференциальных уравнений при переходе на другую кинематическую схему механизма.

С увеличением количества степеней конструкций тройная сумма выражения (1) приводит к резкому росту объема вычислений. Можно предложить следующий подход для упрощения вычислительного процесса. Тройную сумму запишем как:

$$\sum_{i=j}^{N}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr(U_{ij}H_iV_{ikl}^T)\dot q_k\dot q_l = \sum_{k=1}^{i=1}\sum_{l=1}^{i=1} h_{j,kl}^{(i)}\dot q_k \dot q_l +$$

$$+\sum_{k=1}^{i=2}\sum_{l=1}^{i=2} h^{(i)}_{j,kl}\dot q_k\dot q_l + \ldots + \sum_{k=1}^{i=N}\sum_{l=1}^{i=N} h^{(i)}_{j,kl}\dot q_k\dot q_l, \qquad (2)$$

где $h_{j,kl}^{(i)} = tr(U_{ij}H_iV_{ikl}^T)$.

Учитывая независимость матрицы $U_{ij}H_i$ от матрицы V_{ikl}^T при фиксированном значении i в правой части выражения (2), после преобразований j-й элемент h_j суммарного вектора $\bar h$ размерности N определим по формуле:

$$h_j = \sum_{i=j}^{N} tr(U_{ij}H_iD^{(i)}),\ j = 1, 2, \ldots , N,$$

где $D^{(i=1)} = V_{111}^T\dot q_1^2$;

$$D^{(i=2)} = V_{211}^T\dot q_1^2 + 2V_{212}^T\dot q_1\dot q_2 + V_{222}^T\dot q_2^2;$$

$$D^{(i=3)} = V_{311}^T\dot q_1^2 + 2V_{312}^T\dot q_1\dot q_2 + V_{322}^T\dot q_2^2 +$$

$$+2V_{313}^T\dot q_1\dot q_3 + 2V_{323}^T\dot q_2\dot q_3 + V_{333}^T\dot q_3^2;$$

$$D^{(i=4)} = V_{411}^T\dot q_1^2 + 2V_{412}^T\dot q_1\dot q_2 + V_{422}^T\dot q_2^2 + 2V_{413}^T\dot q_1\dot q_3 +$$

$$+2V_{423}^T\dot q_2\dot q_3 + V_{433}^T\dot q_3^2 + 2V_{414}^T\dot q_1\dot q_4 +$$

$$+2V_{424}^T\dot q_2\dot q_4 + 2V_{434}^T\dot q_3\dot q_4 + V_{444}^T\dot q_4^2;$$

...

$$D^{(i=N)} = V_{N11}^T\dot q_1^2 + 2V_{N12}^T\dot q_1\dot q_2 + V_{N22}^T\dot q_2^2 + 2V_{N13}^T\dot q_1\dot q_3 +$$

$$+2V_{N23}^T\dot q_2\dot q_3 + V_{N33}^T\dot q_3^2 + \ldots + 2V_{N14}^T\dot q_1\dot q_4 + \ldots$$

$$+2V_{N,N-1,N}^T\dot q_{N-1}\dot q_N + V_{N,N,N}^T\dot q_N^2.$$

После преобразований запишем систему дифференциальных уравнений (ДУ) движения конструкции в векторно-матричном виде:

$$M(t)\ddot{\bar q}(t) = \bar h_\Sigma(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t), \qquad (3)$$

$$\bar h_\Sigma(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) = \bar Q(t) - \bar h(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) -$$

$$-\bar h_G(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) - B(t)\dot{\bar q}(t) - C(t)\bar q(t);$$

$$\bar h_G^T(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i\bar G^T U_{i,j=1}\bar R_i^*;\right.$$

$$\left.\sum_{i=2}^{N} m_i\bar G^T U_{i,j=2}\bar R_i^*;\ldots\sum_{i=N}^{N} m_i\bar G^T U_{i,j=N}\bar R_i^*\right],$$

где $M(t) = M^T(t)$ – симметричная матрица приведенных моментов инерции; $B(t)$ и $C(t)$ − матрицы приведенных коэффициентов демпфирования и жесткостей приводов звеньев манипулятора в линейной постановке. Начальные условия имеют вид: $\bar q(t=0) = \bar q_0$; $\dot{\bar q}(t=0) = \dot{\bar q}_0$.

Полученные аналитические выражения легко программируются с использованием соответствующих векторно-матричных, логических операций и функций алгоритмического языка пакета *MATLAB*. Поэтому его можно взять за основной язык реализации выражений (2).

Для решения поставленной задачи были выбраны расчетные схемы, выведены системы дифференциальных уравнений (3) и разработано программное обеспечение параметрической оптимизации на алгоритмическом языке пакета *MATLAB* для трех, пяти, семи и восьми степенных пространственных конструкций, у которых одна степень свободы – поступательная, а остальные – вращательные.

Путем последовательного добавления звеньев с вращательными степенями подвижности к основанию трехстепенной конструкции (рис. 1) были получены расчетные схемы

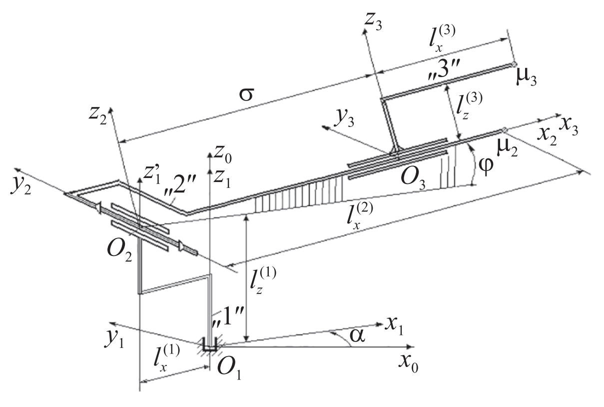

Рис. 1. Расчетная схема трехстепенной пространственной конструкции:
$0_ix_iy_iz_i$ (I = 0, 1, 2, 3) – системы координат, связанные с неподвижным основанием (I = 0) и тремя звеньями; α, φ, σ − обобщенные координаты манипулятора; $l_x^{(1)}$, $l_z^{(1)}$ – координаты т. 0_2, определенные в системе $0_0x_0y_0z_0$; $l_x^{(2)}$, $l_x^{(3)}l_z^{(3)}$ – координаты точечных масс μ_2, μ_3, связанных со звеньями 2 и 3 соответственно

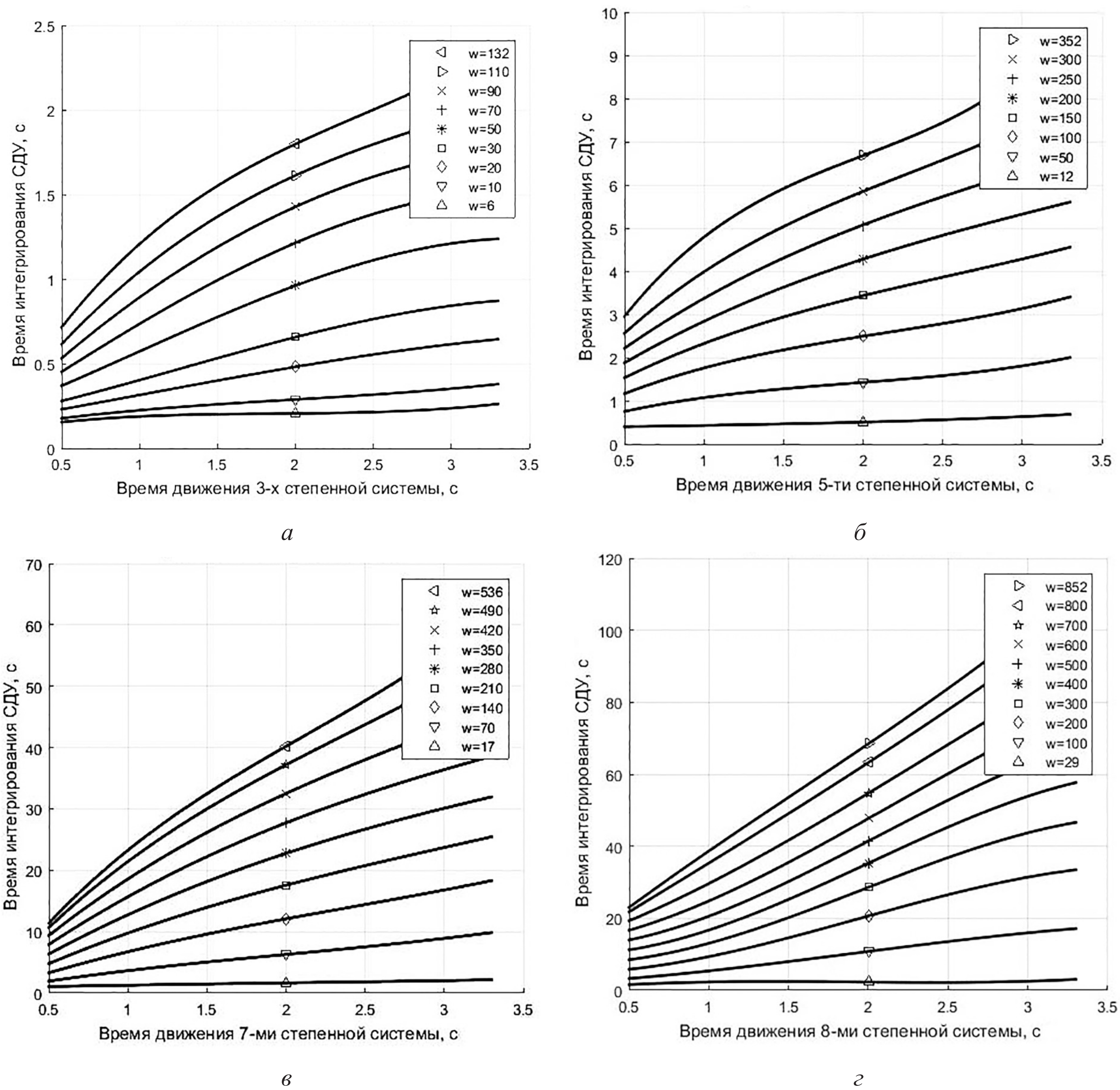

Рис. 2. Время интегрирования систем дифференциальных уравнений для трех-, пяти-, семи- и восьмистепенной конструкции, соответственно *а*, *б*, *в*, *г*:
w – максимальные собственные частоты колебаний системы

для других конструкций. Рассматривался динамический процесс системы при поступательном перемещении звена 3 из статического начального в статическое конечное положение при заторможенных приводах угловых перемещений. Перемещение звена 3 осуществлялось усилием привода, закон изменения которого во времени имел вид двух трапеций.

Поскольку любой многостепенной конструкции, обладающей массово-геометрическими и жесткостными характеристиками, соответствует набор (спектр) частот собственных колебаний, время численного интегрирования систем ДУ с использованием функции *ode45()* зависит от максимальной из частот собственных колебаний и длительности динамического процесса. Для определения этой зависимости были численно проинтегрированы четыре системы дифференциальных уравнений с различным количеством степеней свободы для семи различных жесткостных характеристик заторможенных приводов [0,1; 1,0; 10; 30; 50; 70; 100] $C_{\text{ном}}$ и четырех законов продольного движения звена 3, определяющих длительность динамического процесса [0,5; 1,2; 2,2; 3,3 с], с помощью функции *ode45()* алгоритмического языка пакета *MATLAB* при заданной по умолчанию точности интегрирования. Для тех же наборов массово-геометрических и жесткостных характеристик четырех конструкций, после решения частотных уравнений были определены диапазоны максимальных частот собственных колебаний ([6, 132], [12, 352], [17, 536], [29, 852] рад/с для систем с 3-мя, 5-ю, 7-ю, 8-ю степенями свободы соответственно).

С помощью функции *polyfit()* была проведена интерполяция полиномами третьей степени зависимостей длительности интегрирования систем дифференциальных уравнений от максимальной из частот собственных колебаний для четырех длительностей динамических процессов. Задаваясь дискретными значениями частот собственных колебаний конструкций из диапазонов максимальных частот, с помощью полученных ранее аналитических выражений для полиномов были определены соответствующие значения времени численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

После дополнительной интерполяции был получен набор кривых, помеченных маркерами, характеризующих время численного интегрирования систем дифференциальных уравнений соответствующей размерности (3, 5, 7, 8 дифференциальных уравнений второго порядка) в зависимости от длительности динамического процесса из рассматриваемого диапазона 0,5−3,3 с для соответствующих дискретных значений частот, также помеченных маркерами (рис. 2).

Расхождение между временем численного интегрирования систем дифференциальных уравнений и временем, полученным путем интерполяции (см. рис. 2), достигает максимальной величины 6−8 %.

При постановке задачи параметрической оптимизации системы с учетом работы [8] в качестве управляемых параметров были приняты коэффициенты крутильных жесткостей приводов конструкций, а в качестве функциональных ограничений − ограничения на углы и угловые скорости обобщенных координат в момент окончания движения системы, взятые по модулю, обеспечивающие точность позиционирования. Минимизируемый критерий представляет собой сумму квадратов суммарных отклонений относительно осей неподвижной системы координат вращательных перемещений и скоростей обобщенных координат в момент окончания движения. Функциональные ограничения-неравенства устранялись с помощью метода штрафных функций (метода внешней точки) [9].

Используя функцию условной минимизации *fmincon()* были просчитаны варианты оптимизации конструкций, описываемых системами ДУ с 3, 5, 7 и 8 степенями свободы для 10, 20 и 30 случайных точек входа вектора управляемых параметров. Для ограничения времени вычислений предусматривалось прекращение работы функции условной минимизации *fmincon()* при достижении количества обращений к функции вычисления обобщенного критерия, равного 100.

Пакет *MATLAB* позволяет распределить вычисления между ядрами процессора ПЭВМ. Наиболее просто решается эта задача распараллеливания вычислений в циклических процессах [10]. При сравнительном анализе результатов последовательных и параллельных вычислений необходимо определить коэффициент ускорения вычислений и проверить возможность нахождения одних и тех же локальных минимумов с помощью двух вычислительных процессов.

Результаты оптимизации на ПЭВМ с четырехядерным процессором *Intel(R) Core i7 950* при последовательных и параллельных вычислениях при 10, 20 и 30 точках входа вектора управляемых параметров приведены в табл. 1.

На рис. 3 приведены начальные и конечные точки вектора управляемых параметров (крутильные жесткости приводов) после последовательного оптимизационного процесса (30 точек входа вектора управляемых параметров).

При параллельных вычислениях не удается получить линии и точки для начальных и конечных (после нахождения локального минимума критерия) положений вектора управляемых параметров, аналогичных линиям, приведенным на рис. 3.

Поэтому возможность нахождения одних и тех же локальных минимумов при использовании двух методик можно оценить по величинам обобщенных критериев, полученных по этим методикам, после процесса оптимизации. Результаты расчетов (рис. 4) указывают на совпадение значений обобщенных критериев, полученных по двум методикам, в локальных минимумах. Такое совпадение значений справедливо при оптимизации всех четырех рассматриваемых конструкций.

Анализ результатов и выводы

Полученные результаты необходимо рассматривать с позиций возможности использования ПЭВМ при оптимизации сложных пространственных конструкций: определение пред-

Таблица 1

Коэффициенты ускорения вычислений процесса оптимизации

Число степеней свободы	3	5	7	8
10 точек входа				
Время при последовательных вычислениях, с	146,6	873	2654	5852,4
Время при параллельных вычислениях, с	57,8	316,3	905,2	2060,8
Коэффициент ускорения вычислений	2,54	2,76	2,93	2,84
20 точек входа				
Время при последовательных вычислениях, с	278,8	1742	5303,8	11056
Время при параллельных вычислениях, с	93,8	541,2	1601,2	3499,6
Коэффициент ускорения вычислений	2,7	3,22	3,31	3,16
30 точек входа				
Время при последовательных вычислениях, с	435	2702,9	8504,5	17203
Время при параллельных вычислениях, с	140,9	853,1	2704	5508
Коэффициент ускорения вычислений	3,09	3,17	3,15	3,12

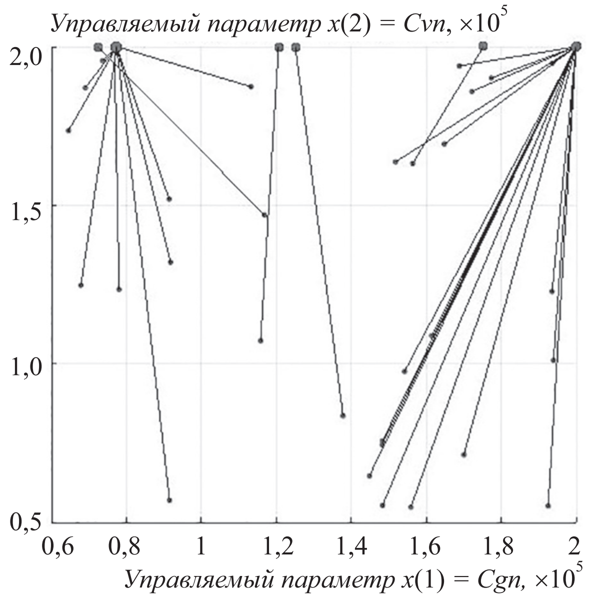

Рис. 3. Начальные и конечные точки вектора управляемых параметров (крутильные жесткости приводов)

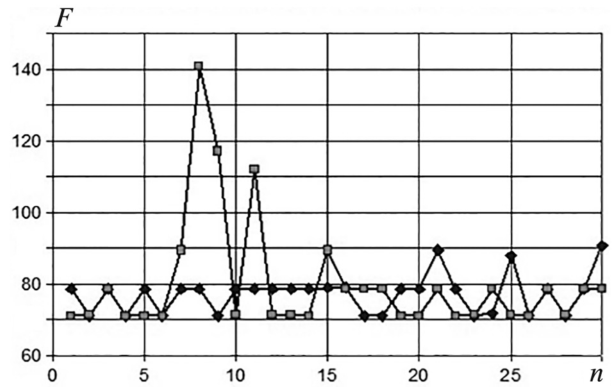

Рис. 4. Значения обобщенного критерия *F* после процесса оптимизации системы, полученные по двум методикам (последовательные и параллельные вычисления):
n – номера оптимизационных точек входа;
– последовательные вычисления;
– параллельные вычисления

варительных временных трудозатрат работы ПЭВМ перед началом процесса оптимизации пространственной конструкции, когда известны число степеней свободы, время рассматриваемого динамического процесса и возможная максимальная частота собственных колебаний системы.

В этом случае время однократного интегрирования системы дифференциальных уравнений можно ориентировочно оценить, используя результаты, приведенные на рис. 2.

При использовании четырех ядерного процессора *Intel(R) Core i7 950* для последовательных и параллельных вычислений удается уменьшить время оптимизационного процесса в 3–3,15 раза. При этом при параллельных и последовательных вычислениях удается найти все возможные локальные минимумы в допустимой области.

С учетом заданного количества обращений к функции вычисления обобщенного критерия, количества точек входа вектора управляемых параметров, времени однократного интегрирования систем ДУ, путем перемножения этих величин можно оценить предполагаемое время последовательного оптимизационного процесса и уменьшить это время в три и более раз при процессорах ПЭВМ с количеством ядер больше трех путем распараллеливания вычислительного процесса.

Заключение

Приведенные результаты позволяют проектировщикам многостепенных пространственных конструкций принять решение о возможности использования имеющихся в их распоряжении многоядерных ПЭВМ для решения задачи оптимизации конструкций, не прибегая при этом к применению суперкомпьютеров. Применение расширенных матриц кинематических пар и учет возможностей алгоритмического языка пакета *MATLAB* обеспечивает разработку и отладку программного обеспечения с минимальными временными затратами, а общее время процесса оптимизации можно уменьшить в несколько раз при распараллеливании процесса вычислений.

Список литературы

1. *Белоусов И.Р.* Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2002. − 31 с.
2. *Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника. М.: Мир, 1989. – 624 с.
3. *Hollerbach J.* A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and comparative study of dynamic complication complexity // IEEE Trans. on SMC, SMC-10. 1980. No 11. P. 730–736.
4. *Балабан И.Ю., Боровин Г.К., Сазонов В.В.* Язык программирования правых частей уравнений движения сложных механических систем. М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1998. № 62. −22 с.
5. *Внуков А.А., Семиков М.В., Тренин Д.А.* Разработка параллельного алгоритма для системы динамического управления манипуляционным роботом // Вестник РУДН. Инженерные исследования. 2008. № 4. С. 107−122.
6. Обобщенная математическая модель кинематики робота типа RV-2AO фирмы MITSUBISHI ELETRIC / *В.Г. Хомченко, В.В. Клевакин, И.В., И.В. Лазаренко, А.С. Горбатых* // Омский научный вестник. Машиностроение. 2012. № 1. С. 163−165.
7. *Воробьев Е.И., Попов С.А., Шевелева Г.И.* Механика промышленных роботов. Кн. 1. Кинематика и динамика: учеб. пособ. для втузов: в 3 кн. / под ред. *К.В. Фролова, Е.И. Воробьева*. М.: Высшая школа, 1988.– 304 с.
8. *Мурзин А.М.* Об одной постановке задачи максимального быстродействия робота-манипулятора // Вестник ЮУрГУ. Машиностроение. 2002. № 6. Вып. 2. С. 74−75.
9. *Кузьмик П.К., Маничев В.Б.* Системы автоматизированного проектирования: в 9-ти кн. Кн. 5. Автоматизация функционального проектирования / под ред. И.П. Норенкова. М.: Высшая школа, 1986. – 144 с.
10. *Оленев Н.Н., Печенкин Р.В., Чернецов А.М.* Параллельное программирование в MATLAB и SIMULINK с приложениями к моделированию в экономике. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2015. – 110 с.

МУРЗИН Александр Михайлович E-mail: **murzinam47@mail.ru** Тел.: **(351) 267-94-61**	Кандидат технических наук, доцент кафедры «Летательные аппараты», Южно-Уральский государственный университет. Сфера научных интересов: статистическая динамика и оптимизация стартовых комплексов, оптимальное проектирование динамических систем. Автор 30 научных публикаций.
ПАНФИЛОВ Андрей Владимирович E-mail: **panfilovav@susu.ru** Тел.: **(351) 267-94-61**	Старший преподаватель кафедры «Летательные аппараты», Южно-Уральский государственный университет. Сфера научных интересов: динамическая нагруженность наземных транспортных средств ракетных комплексов. Автор пяти научных публикаций.
СЮСЬКИНА Юлия Львовна E-mail: **siuskinayl@susu.ru** Тел.: **(351) 267-94-61**	Старший преподаватель кафедры «Летательные аппараты», Южно-Уральский государственный университет. Сфера научных интересов: технологии изготовления объектов ракетно-космической техники и технологической оснастки. Автор семи научных публикаций.