

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ

Е.А. Коган, А.А. Юрченко

В работе исследованы вынужденные нелинейные колебания трехслойных пластин, моделирующих конструктивные элементы некоторых специальных транспортных средств, под действием периодически изменяющейся по времени поперечной нагрузки. Реализован единый подход к решению подобных задач для пластин конечного прогиба, закрепленных различным образом, с учетом начальной неправильности формы. Проведено обширное численное исследование влияния различных параметров в широком диапазоне их изменения на амплитудно-частотные характеристики трехслойных пластин.

Ключевые слова: трехслойные пластины, геометрически нелинейная теория, нелинейные колебания, амплитудно-частотные характеристики.

SANDWICH PLATES NON-LINEAR OSCILLATIONS ADJUSTED FOR INITIAL IMPERFECTION

E.A. Kogan, A.A. Yurchenko

The forced non-linear oscillations under the influence of the periodically changing on time cross loading of the sandwich plates modeling some special vehicles panels are studied. Unified approach to the resolution of similar tasks for differently fixed large deflection plates taking into account initial irregularity of surface is realized. The extensive numerical research of influence of various parameters in their wide change range on sandwich plates amplitude-frequency characteristics type is carried out.

Keywords: sandwich plates, geometrically non-linear theory, non-linear oscillations, amplitude-frequency characteristics.

Введение

Систематическое изложение различных задач нелинейной динамики однослойных пластин, панелей и пологих оболочек было дано в известной монографии А.С. Вольмира, изданной в 1972 г. [1], а современное состояние теории нелинейных колебаний кусочно-неоднородных по толщине трехслойных и многослойных пластин и оболочек отражено в работах авторов [2, 3].

Большинство работ, особенно опубликованных в последние годы, посвящено шарнирно опертым по контуру многослойным пластинам, выполненным из различных композиционных материалов. Обычно используются или расчетная схема, основанная на применении гипотез Кирхгоффа для всего пакета слоев (то есть многослойная пластина рассчитывается по клас-

сической теории пластин как квазиоднородная с приведенными упругими параметрами), или применяются уточненные двумерные теории, учитывающие деформации поперечного сдвига на основе интегральных гипотез для всего пакета слоев [4, 5].

Трехслойные пластины в классическом исполнении (с тонкими несущими слоями и мало жестким наполнителем) изучены относительно меньше, и данных о влиянии геометрических и жесткостных характеристик слоев с учетом начальных неправильностей формы на характер их нелинейных колебаний, особенно для защемленных по контуру пластин, недостаточно.

Цель работы состоит в реализации единого подхода к решению задач о нелинейных колебаниях трехслойных пластин, различным образом закрепленных по контуру, и параме-

трическом анализе влияния различных параметров, прежде всего начальных неправильностей на амплитудно-частотные характеристики трехслойных пластин.

Постановка задачи

В статье рассмотрены нелинейные колебания трехслойных прямоугольных пластин конечного прогиба, моделирующих панели некоторых специальных автотранспортных средств [6]. Пластины несимметричной структуры по толщине с жестким трансверсально изотропным наполнителем, податливым на поперечный сдвиг, и изотропными несущими слоями, шарнирно опертые и жестко заземленные по контуру. Вынужденные колебания таких пластин описываются известными в теории трехслойных пластин уравнениями Григолюка – Чулкова [7], в которых учтены также начальные неправильности формы координатной поверхности, поперечные инерционные силы и внешнее демпфирование [8].

Эта система уравнений 10-го порядка в смешанной форме относительно разрешающих функций перемещений χ и усилий F , обобщающая уравнения однородных пластин Феппля – Кармана [1], имеет вид

$$\Delta\Delta F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right], \quad (1)$$

$$D \left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta \Delta \chi - \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \\ - \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \times \quad (2) \\ \times \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = q - \rho h \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi,$$

где E – осредненный модуль упругости; h – полная толщина пластины; w, w_0 – полный и начальный прогибы; D – изгибная жесткость трехслойного пакета; ϑ – параметр, характеризующий относительную изгибную жесткость несущих слоев; β – параметр, характеризующий жесткость наполнителя на поперечный сдвиг; q – внешняя нагрузка, приложенная к первому несущему слою; ρ – удельная плотность материала; ε – коэффициент демпфирования среды; Δ – оператор Лапласа.

При выводе уравнений трехслойных пластин (1) и (2) в смешанной форме предполагалось, что в наполнителе распределение тангенциальных перемещений u_i^z по толщине аппроксимируется линейной функцией поперечной координаты, а для тонких упругих несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа о прямой неразстяжимой нормали, что приводит к распределению касательных перемещений по толщине пакета слоев по закону ломаной линии (рис. 1).

Использовался простейший вариант геометрически нелинейной теории пластин в квадратичном приближении, согласно которому в выражениях для компонент деформации срединной поверхности пренебрегалось произведениями и квадратами производных касательных перемещений u_1 и u_2 по сравнению с соответствующими величинами от нормального прогиба [7].

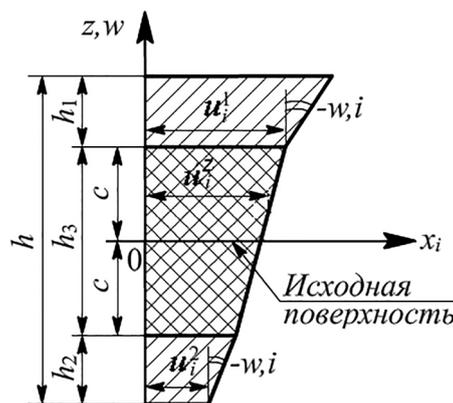


Рис. 1. Распределение тангенциальных перемещений по толщине трехслойного пакета

Начальные несовершенства формы панели учитываются, согласно классической работе Доннелла и Вана [9], введением некоторого эквивалентного начального прогиба $w_0(x, y)$, характеризующего отклонение пластины от идеальной формы. Поэтому в уравнениях (1) и (2) полный прогиб $w(x, y, t) = \bar{w}(x, y, t) + w_0(x, y)$, а дополнительный прогиб $\bar{w}(x, y, t)$ выражается через разрешающую функцию перемещений χ известным в теории трехслойных пластин соотношением

$$\bar{w} = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi, \quad (3)$$

$$h = \sum_{k=1}^3 h_k, \quad \beta = \frac{12G_{iz}^3 t_3 (1 - \nu^2)}{E \eta_1},$$

$$v = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k v_k}{1 - v_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - v_k^2} \right)^{-1},$$

$$E = \frac{1 - v^2}{h} \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - v_k^2},$$

где h_k – толщина k -го слоя, $k = 1, 2, 3$; $h_3 = 2c$ – толщина заполнителя; G_z^3 – модуль поперечного сдвига заполнителя, $i = 1, 2$; v – приведенный коэффициент Пуассона; E_k, v_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона k -го слоя; E – осредненный модуль упругости трехслойного пакета.

Функция усилий F связана с полными нормальными удельными усилиями в пластине соотношениями $N_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $N_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $N_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Внешняя нагрузка $q = q(x, y, t) > 0$, если направлена в положительном направлении оси z .

Остальные параметры в уравнениях (1) и (2) рассчитываются по следующим соотношениям:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - v^2)} \eta_3;$$

$$\vartheta = \frac{\eta_1 \eta_3 - \eta_2^2}{\eta_1 \eta_3};$$

$$\rho h = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k.$$

Приведенные выше параметры содержат коэффициенты:

$$\eta_1 = t_3^2 [1 + 2(\gamma_1 + \gamma_2) - 3(\gamma_1 - \gamma_2)^2],$$

$$\eta_2 = \eta_1 + 3t_3 \gamma_3 (\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) + 6\gamma_1 t_3 \gamma_2 (t_1 + t_2),$$

$$\eta_3 = 4(\gamma_1 t_1^2 + \gamma_2 t_2^2) + t_3^2 (3\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3) + 6t_3 (\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) - 3[\gamma_1 (t_1 + t_3) - \gamma_2 (t_2 + t_3)]^2,$$

зависящие от γ_k, t_k – безразмерных жесткостных характеристик и безразмерных толщин слоев:

$$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1 - v_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - v_k^2} \right)^{-1}, \quad t_k = \frac{h_k}{h}$$

и соответствуют введенным в работах [7, 8].

Граничные условия для свободно опертой по контуру пластины размером $a \times b$ удовлетворяются представлением разрешающей функции перемещений χ и начального прогиба w_0 в виде

$$\chi = f(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$w_0 = f_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4)$$

где m, n – параметры волнообразования.

Граничные условия в случае жесткого заземления по контуру прямоугольных пластин могут быть записаны в виде [7]:

при $x = 0, a$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial^3 \chi}{\partial x^3} = 0;$$

при $y = 0, b$,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi = \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial^3 \chi}{\partial y^3} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что различные конструктивные схемы заделки торцов и закрепления кромок трехслойных пластин приведены в монографии [10].

Для построения координатных функций, удовлетворяющих условиям (5), задавался прогиб пластины в виде, удовлетворяющем граничным условиям относительно функции w и ее нормальной производной w' на границе области ($w = w' = 0$ при $x = 0, a$ и $y = 0, b$):

$$w(x, y, t) = W(t) Z_m(x) Z_n(y),$$

где $Z_m(x) = \cos \frac{m\pi x}{a} - \cos \frac{(m+2)\pi x}{a}$,

$Z_n(y) = \cos \frac{n\pi y}{b} - \cos \frac{(n+2)\pi y}{b}$, и дифференциальное соотношение (3) разрешалось относительно функции χ .

В результате для этой функции получено выражение, содержащее амплитудное значение $W(t)$ и удовлетворяющее граничным условиям (4):

$$\chi(x, y, t) = W(t) \left[S_{11} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} - S_{12} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{(n+2)\pi y}{b} - S_{21} \cos \frac{(m+2)\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + S_{22} \cos \frac{(m+2)\pi x}{a} \cos \frac{(n+2)\pi y}{b} \right]. \quad (6)$$

Здесь $S_{11} = \left\{ 1 + K_0 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \right\}^{-1}$,

$$S_{12} = \left\{ 1 + K_0 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + (n+2)^2 \right] \right\}^{-1},$$

$$K_0 = \frac{\pi^2 h^2}{\beta b^2}, \lambda = \frac{a}{b}.$$

$$S_{21} = \left\{ 1 + K_0 \left[\left(\frac{m+2}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \right\}^{-1},$$

$$S_{22} = \left\{ 1 + K_0 \left[\left(\frac{m+2}{\lambda} \right)^2 + (n+2)^2 \right] \right\}^{-1}.$$

Для функции усилий F граничные условия удовлетворяются, если принять $F(x, y, t) = f(t)Z_m(x)Z_n(y)$.

Решение краевых задач

Уравнения (1) и (2) для шарнирно опертых пластин интегрировались методом Бубнова – Папковича [1] по пространственным координатам, в соответствии с которым сначала находится функция усилий F из уравнения совместности (1), а затем уравнение колебаний (2) с учетом найденного значения F интегрируется методом Бубнова [10].

Для защемленных пластин решение краевой задачи (1, 2, 5) методом Бубнова – Папковича при выбранных координатных функциях (6) приводит к весьма трудоемкой процедуре построения частного решения неоднородного уравнения совместности деформаций (1). Поэтому метод ортогонализации Бубнова [11] применялся непосредственно к системе уравнений (1), (2).

В результате для обоих вариантов граничных условий получено одно и то же по структуре, нелинейное, обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее в первом приближении вынужденные колебания трехслойной пластины под действием внешней поперечной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону $q(x, y, t) = Q(x, y) \cos \Omega t$ и равномерно распределенной по поверхности пластины

$$\begin{aligned} (Q(x, y) = Q_0 = \text{const}): \\ \frac{d^2 \bar{\chi}}{dt^2} + \varepsilon \frac{d \bar{\chi}}{dt} + \omega_{0, mn}^2 (\alpha_1 \bar{\chi}^3 + \alpha_2 \bar{\chi}^2 + \alpha_3 \bar{\chi}) = q_0(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где Ω – частота вынуждающей силы, $\omega_{0, mn}^2$ – квадрат частоты собственных малых колебаний трехслойной пластины ($\bar{\chi} = w/h$ – безразмерная амплитуда прогиба, соответственно безразмерный начальный прогиб $\chi_0 = w_0/h$). $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – коэффициенты.

При этом для шарнирно опертой пластины

$$\omega_{0, mn}^2 = \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \frac{m^4 \left(1 + \frac{n^2 \lambda^2}{m^2} \right)^2}{\lambda^2} \left(\frac{c_* h}{ab} \right)^2 \frac{\vartheta_{mn} \eta_3}{\beta_{mn}},$$

$$q_0(t) = \frac{16\alpha}{\pi^2 mn \beta_{mn}} \left(\frac{c_*}{h} \right)^2 \frac{q}{E},$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} (1-\nu^2) \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^4 \right] \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^{-2} \frac{\beta_{mn}^3}{\vartheta_{mn} \eta_3},$$

$$\alpha_2 = \frac{9}{4} (1-\nu^2) \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^4 \right] \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^{-2} \frac{\beta_{mn}^3}{\vartheta_{mn} \eta_3} \chi_0,$$

$$\alpha_3 = 1 + \frac{3}{2} (1-\nu^2) \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^4 \right] \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^{-2} \frac{\beta_{mn}}{\vartheta_{mn} \eta_3} \chi_0^2,$$

$$\beta_{mn} = 1 + \frac{\pi^2 h^2}{\beta} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right],$$

$$\vartheta_{mn} = 1 + \vartheta \frac{\pi^2 h^2}{\beta} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right], \quad (8)$$

$$c_* = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Для трехслойной защемленной по контуру пластины коэффициенты в уравнении (7)

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\frac{2\pi^4 E h^2}{\lambda^2 \rho b^4} \frac{I_{mn}}{I_{3m} I_{1n}} \left[(mn)^2 J_{3m} J_{3n} - m^2 (n+2)^2 \times \right. \\ \left. \times J_{3m} J_{4n} \right] - (m+2)^2 n^2 J_{4m} J_{3n} + (m+2)^2 (n+2)^2 \times \\ \left. \times J_{4m} J_{4n} - J_{5m} J_{5n} \right], \alpha_2 = 3\alpha_1 \chi_0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \frac{\pi^4 \eta_3}{12(1-\nu^2)} \frac{E h^2}{\rho b^4} \times \\ \times \frac{(N_{11} J_{1m} J_{1n} - N_{12} J_{1m} J_{2n} - N_{21} J_{2m} J_{1n} + N_{22} J_{2m} J_{2n})}{I_{3m} I_{1n}} + \\ + 2\alpha_1 \chi_0^2 \end{aligned}$$

выражаются через интегралы метода Бубнова:

$$I_{q, mn} = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) Z_k(x) Z_l(y) dx dy,$$

$$I_{mn} = \frac{I_{4m} I_{4n} - I_{5m} I_{5n}}{I_{1m} I_{1n} + 2I_{2m} I_{2n} + I_{3m} I_{3n}},$$

$$I_{1m} = \int_0^a Z_m^{IV}(x) Z_k(x) dx, \quad I_{1n} = \int_0^b Z_n(y) Z_l(y) dy,$$

$$I_{2m} = \int_0^a Z_m''(x)Z_k(x)dx, \quad I_{2n} = \int_0^b Z_n''(y)Z_l(y)dy,$$

$$I_{3m} = \int_0^a Z_m(x)Z_k(x)dx, \quad I_{3n} = \int_0^b Z_n^{IV}(y)Z_l(y)dy,$$

$$I_{4m} = \int_0^a Z_m'^2(x)Z_k(x)dx, \quad I_{4n} = \int_0^b Z_n'^2(y)Z_l(y)dy,$$

$$I_{5m} = \int_0^a Z_m''(x)Z_m(x)Z_k(x)dx,$$

$$I_{5n} = \int_0^b Z_n''(y)Z_n(y)Z_l(y)dy,$$

$$J_{1m} = \int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} Z_k(x)dx,$$

$$J_{2m} = \int_0^a \cos \frac{(m+2)\pi x}{a} Z_k(x)dx,$$

$$J_{2n} = \int_0^b \cos \frac{(n+2)\pi y}{b} \bar{Z}_l(y)dy,$$

$$J_{3m} = \int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} Z_m(x)Z_k(x)dx,$$

$$J_{3n} = \int_0^b \cos \frac{n\pi y}{b} Z_n(y)Z_l(y)dy,$$

$$J_{4m} = \int_0^a \cos \frac{(m+2)\pi x}{a} Z_m(x)Z_k(x)dx,$$

$$J_{4n} = \int_0^b \cos \frac{(n+2)\pi y}{b} Z_k(y)Z_l(y)dy,$$

$$J_{5m} = \int_0^a \left[m^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} - 2m(m+2) \sin \frac{m\pi x}{a} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{(m+2)\pi x}{a} + (m+2)^2 \times \sin^2 \frac{(m+2)\pi x}{a} \right] \times \\ \times Z_k(x)dx.$$

$$J_{5n} = \int_0^b \left[n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} - 2n(n+2) \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{(n+2)\pi y}{b} + \right. \\ \left. + (n+2)^2 \sin^2 \frac{(n+2)\pi y}{b} \right] \bar{Z}_l(y)dy.$$

При этом коэффициенты N_{ij} ($i, j=1,2$) зависят от относительных геометрических и жесткостных характеристик слоев и параметров волнообразования:

$$N_{11} = S_{11} \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right]^2 \left\{ 1 + \pi^2 \kappa_0 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \right\},$$

$$N_{21} = S_{21} \left[\left(\frac{m+2}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right]^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \pi^2 \kappa_0 \left[\left(\frac{m+2}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \right\},$$

$$N_{12} = S_{12} \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + (n+2)^2 \right]^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \pi^2 \kappa_0 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + (n+2)^2 \right] \right\}, \quad \kappa_0 = \frac{9h^2}{\beta b^2},$$

$$N_{22} = S_{22} \left[\left(\frac{m+2}{\lambda} \right)^2 + (n+2)^2 \right]^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \pi^2 \kappa_0 \left[\left(\frac{m+2}{\lambda} \right)^2 + (n+2)^2 \right] \right\}.$$

Собственная частота линейных колебаний

$$\omega_{0,mn} = \left(\frac{\pi^4 E h^2 \eta_3}{12(1-\nu^2) \rho b^4} \times \right. \\ \left. \times \frac{N_{11} J_{1m} J_{1n} - N_{12} J_{1m} J_{2n} - N_{21} J_{2m} J_{1n} + N_{22} J_{2m} J_{2n}}{I_{3m} I_{1n}} \right)^{1/2},$$

$$q_0(t) = \frac{Q_0}{\rho h^2} \cdot \frac{I_{q,mn}}{I_{3m} I_{1n}} \cos \Omega t.$$

В частности, для основной формы колебаний (с учетом начальных непрямолинейностей)

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{E h^2 \eta_3}{(1-\nu^2) \rho b^4} \left\{ \frac{1+4\pi^2 \kappa_0}{1+4K_0} + \frac{\lambda^2+4\pi^2 \kappa_0}{\lambda^4(\lambda^2+4K_0)} + \right. \\ \left. + \frac{(\lambda^2+1)^2 [\lambda^2+4\pi^2 \kappa_0 (4\lambda^2+1)]}{2\lambda^4 [\lambda^2+4K_0 (\lambda^2+1)]} \right\} + \\ + \frac{64\pi^4 E h^2}{\rho b^4 (3\lambda^4+2\lambda^2+3)} \chi_0^2.$$

Принимая далее безразмерный прогиб пластины в виде

$$\chi = A \cos \Omega t,$$

где A – безразмерная амплитуда колебаний, и интегрируя уравнение (7) по полному периоду колебаний $T = 2\pi / \Omega$, получим кубическое уравнение относительно амплитуды

$$\Omega^2 - \left(\alpha_3 + \frac{3}{4} \alpha_1 A^2 \right) + \frac{Q_0}{MA} = 0, \quad (10)$$

в котором для защемленной пластины

$$M = \left(\frac{I_{q,mn}}{I_{3m} I_{1n} \rho h^2} \right)^{-1}.$$

Уравнение (10) связывает амплитуду колебаний A с относительной частотой нелинейных колебаний $\nu = \Omega/\omega_0$ и позволяет построить амплитудно-частотную характеристику $A(\Omega)$ вынужденных колебаний трехслойной пластины. При $Q_0 = 0$ из уравнения (10) следует уравнение, описывающее собственные нелинейные колебания трехслойной, защемленной по контуру, гибкой пластины с учетом начальных не-правильностей в виде, решение которого позволяет получить скелетную линию резонансной кривой.

Решение методом гармонического баланса

Для учета влияния вязкого трения при вынужденных нелинейных колебаниях трехслойных гибких пластин с кубической упругой восстанавливающей силой применялся также метод гармонического баланса, который дает удобный способ построения амплитудно-частотной кривой. Решение этим методом приводит к системе

$$\begin{cases} A(\alpha_3 \omega_{0,mn}^2 - \Omega^2) + \frac{3\alpha_1}{4} \omega_{0,mn}^2 A^3 = \frac{Q_0}{M} \cos \varphi, \\ \varepsilon A \Omega = \frac{Q_0}{M} \sin \varphi. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая, что квадрат частоты свободных нелинейных колебаний с учетом начальных не-правильностей, как следует из уравнения (10), равен

$$\omega^2(A) = \omega_{0,mn}^2 \left(\alpha_3 + \frac{3}{4} \alpha_1^* A^2 \right), \quad (12)$$

и исключая из соотношений (11) начальную фазу, получим уравнение

$$\left[\omega^2(A) - \Omega^2 \right]^2 + \varepsilon^2 \Omega^2 = \left(\frac{Q_0}{MA} \right)^2, \quad (13)$$

где теперь $\omega^2(A)$ – квадрат частоты нелинейных колебаний с учетом ω_0 , зависящий от амплитуды.

Разрешая уравнение (13) с учетом соотношения (12) относительно A и учитывая, что при резонансе частота свободных колебаний $\omega(A)$

совпадает с частотой вынуждающей силы Ω , получим формулы для резонансной амплитуды $A_{\text{рез}}$ и резонансной частоты колебаний $\omega_{\text{рез}}$ трех-слойной пластины как координаты точки пересечения амплитудно-частотной и скелетной кривых [12, 13]:

$$A_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{2\alpha_3}{3\alpha_1} \left[\sqrt{1 + \frac{3\alpha_1}{\alpha_0} \left(\frac{Q_0}{M\varepsilon} \right)^2} - 1 \right]},$$

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{Q_0}{M\varepsilon A_{\text{рез}}}.$$

При этом, для шарнирно опертой пластины $\alpha_0 = \alpha_3^2 \omega_{0,mn}^2$, и α_3 определяется по формуле (9), а для жестко защемленной по контуру пластины $\alpha_0 = \alpha_3^2$, причем α_3 находится по формуле (12). При неучете начальных не-правильностей $\alpha_3 = 1$.

Анализ результатов

Численные расчеты выполнены для трех-слойных пластин, геометрические и жесткостные параметры которых для основного варианта (несущие слои толщиной $h_1 = h_2 = 0,15$ см, заполнитель толщиной $h_3 = 5,7$ см; модули упругости несущих слоев $E^{(1)} = E^{(2)} = 7 \cdot 10^4$ МПа, (в заполнителе модуль упругости $E^{(3)} = 40$ МПа) соответствуют секции реального объекта. Рассматривались пластины с относительной толщиной $h/b = 0,1$ и пластины, имеющие достаточно большие размеры в плане ($h/b \approx 0,033$). Варьировались также относительное удлинение пластин $\lambda = a/b$, модуль упругости заполнителя от $E^{(3)} = 40$ МПа до $E^{(3)} = 1500$ МПа, собственная изгибная жесткость несущих слоев (изменением их толщины), параметр ε , характеризующий демпфирование при колебаниях, начальные не-правильности формы координатной поверхности и числа полуволн m и n .

В качестве базового значения при определении относительной частоты ν принята частота основного тона свободных линейных колебаний трехслойной квадратной пластины; кривые, относящиеся к вынужденным колебаниям, соответствуют уровню поперечной нагрузки $Q = 15$ При этом скелетные линии, соответствующие свободным нелинейным колебаниям трехслойных пластин, начинаются с $A = 0$.

Из-за ограниченности размеров статьи ниже приведены лишь некоторые характерные кривые $A(\nu)$ в зависимости от начальных несо-вершенств.

Весьма значительное влияние на вид амплитудно-частотных характеристик оказывает сдвиговая жесткость заполнителя. Расчеты показывают, что с уменьшением сдвиговой жесткости заполнителя эффект нелинейности проявляется существенно сильнее. Это согласуется с результатами, приведенными, например, в работах [12, 13].

С ростом относительного удлинения $\lambda = a/b$ для прямоугольных пластин (и шарнирно опертых, и жестко защемленных) увеличивается максимальная амплитуда колебаний, и уменьшается относительная резонансная частота; характеристика пластин становится менее жесткой, а частотный диапазон, в котором возможны колебания относительно двух устойчивых положений равновесия (с большими и малыми амплитудами), уменьшается. Таким образом, для квадратных пластин эффект нелинейности проявляется существенно сильнее.

Изменение изгибной жесткости несущих слоев, характеризуемое параметром ϑ , также существенно сказывается на кривых $A(\bar{\nu})$, а именно увеличение ϑ приводит к заметному снижению максимального значения амплитуды колебаний, но резонансная частота при этом практически не меняется.

Уменьшение относительной толщины пластин h/b приводит к возрастанию резонансной амплитуды колебаний, резонансные частоты при этом возрастают, но менее значительно.

Эффект начальных неперфектностей формы координатной поверхности для пластин с разной относительной толщиной h/b показан на рис. 2 и 3. Увеличение начальных отклонений приводит, как и для однослойных пластин [1], к увеличению частоты свободных нелинейных колебаний. При наличии начальных прогибов для относительно толстых в плане пластин происходит заметное смещение амплитудно-частотных кривых, но характер их качественно не меняется.

Зависимости резонансных амплитуд $A_{рез}$ и частот $\omega_{рез}$ (1/с) от величины начальных неперфектностей для шарнирно опертых и защемленных по контуру пластин различных размеров показаны в таблице.

Расчеты показывают, что нелинейный характер колебаний для высших форм выражен еще более ярко, чем для основного тона.

Заключение

Реализован единый подход к решению задач о нелинейных колебаниях различным образом закрепленных трехслойных пластин конечно-

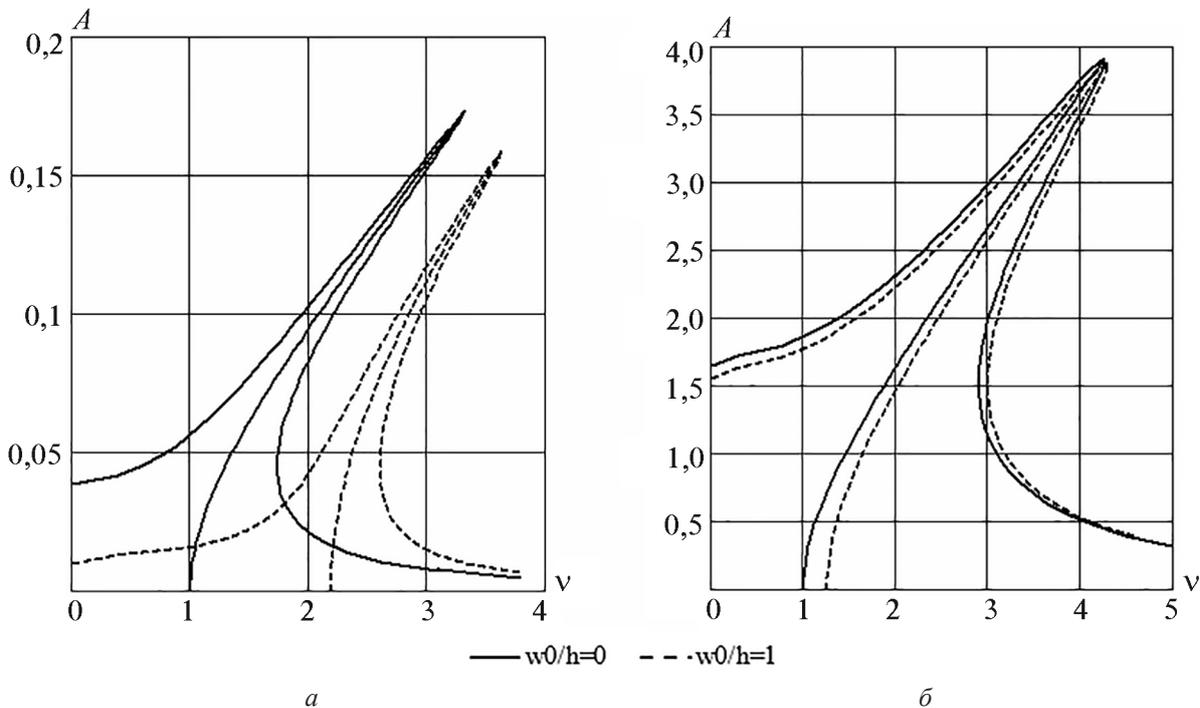


Рис. 2. Влияние начальных несовершенств на амплитудно-частотные характеристики шарнирно опертых трехслойных пластин при колебаниях по основной форме:
а) $h/b = 0,1$; б) $h/b = 0,033$

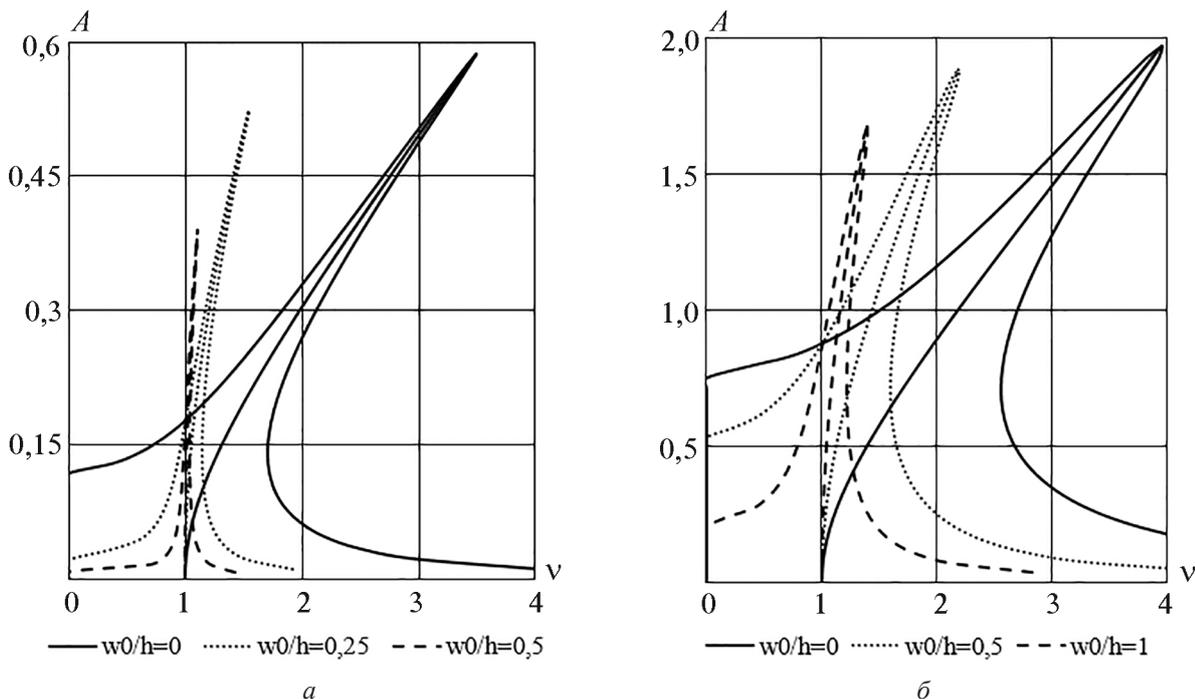


Рис. 3. Влияние начальных несовершенств на амплитудно-частотные характеристики жестко заземленных трехслойных пластин при колебаниях по основной форме:
а) $h/b = 0,1$; б) $h/b = 0,033$

Таблица

Резонансные амплитуды и частоты

Шарнирное опирание						Жесткое защемление					
$h/b = 0,1$			$h/b = 0,033$			$h/b = 0,1$			$h/b = 0,033$		
w_0/h	$A_{рез}$	$\omega_{рез}$	w_0/h	$A_{рез}$	$\omega_{рез}$	w_0/h	$A_{рез}$	$\omega_{рез}$	w_0/h	$A_{рез}$	$\omega_{рез}$
0	0,1732	4799	0	3,9047	1426	0	0,587	5962	0	1,965	1780
0,1	0,1730	4804	0,2	3,9034	1427	0,1	0,576	6074	0,2	1,952	1792
0,2	0,1726	4816	0,4	3,8997	1428	0,2	0,545	6418	0,4	1,914	1828
0,3	0,1718	4838	0,6	3,8935	1430	0,3	0,499	7016	0,6	1,861	1889
0,4	0,1708	4869	0,8	3,8845	1434	0,4	0,444	7877	0,8	1,768	1978
0,5	0,1694	4908	1,0	3,8733	1438	0,5	0,390	8973	1,0	1,670	2095

го прогиба с учетом начальных неправильностей формы. Показано существенное влияние параметров, обусловленных неоднородностью структуры и геометрических параметров трехслойных пластин, в частности, начальных неправильностей формы, на вид амплитудно-частотных характеристик. Результаты расчетов показывают, что в широком диапазоне параметров трехслойные пластины имеют жесткую характеристику, и при нелинейных колебаниях могут реализовываться два устойчивых режима с большими и малыми амплитудами. Определены границы областей устойчивых периодических режимов колебаний.

Список литературы

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор) // Известия МГТУ «МАМИ». Серия 3. Естественные науки. 2014. Том 1. № 1 (19). С. 55–70.
3. Коган Е.А., Юрченко А.А. Некоторые задачи нелинейной динамики слоистых пластин и оболочек. Saarbrücken, Germany. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 66 с.

4. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек. М.: НИИМех. МГУ, 1999. – 215 с.
5. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек // Сб. Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: под ред. акад. РАН С.С. Григоряна. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. С. 56–109.
6. Нормирование прочности обитаемых кузовов-контейнеров многоцелевого назначения / В.И. Еремин, Е.А. Коган, Н.А. Кулаков и др. // Международное научно-техническое совещание по динамике и прочности автомобиля, 5–8 декабря 1994 г. Тезисы докладов. М., 1994. С. 39–41.
7. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.
8. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания защемленных по контуру трехслойных пластин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. С. 25–34.
9. Donnell L.H., Wan C.C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression // J. Appl. Mech. 1950. Vol. 17. No 1. P. 73–83. Discussion on the paper, *ibid.* P. 340 – 342; русск. перевод: Доннелл Л., Ван К. Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. период. лит-ры. 1951. № 4 (8). С. 91–107.
10. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. Расчет трехслойных конструкций: Справочник / под общ. ред. В.Н. Кобелева. М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
11. Григолюк Э.И. Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. М.: НИИ Механики МГУ. 1996. – 58 с.
12. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний: учеб. пособ. для вузов. М.: Изд-во «Высшая школа». – 416 с.
13. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Нелинейные колебания многослойных пластин // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. естеств. и техн. н. 2004. Т. 9. № 2. С. 264–267.

**КОГАН
Ефим Александрович**

E-mail: kogan_ea@mail.ru
Тел.: (916) 019-18-32

Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика» Московского политехнического университета. Сфера научных интересов: механика деформируемого твердого тела, прочность, устойчивость и колебания неоднородных слоистых пластин и оболочек. Автор более 130 научных работ и учебных пособий, шести изобретений.

**ЮРЧЕНКО
Алевтина Анатольевна**

E-mail: AYrCh@yandex.ru
Тел.: (905) 547-00-35

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры мировой экономики Дипломатической академии МИД РФ. Сфера научных интересов: прикладная и вычислительная математика, нелинейная динамика неоднородных пластин, математическое моделирование. Автор более 30 научных и учебно-методических работ.