

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

И.П. Попов

Классическое решение задач, связанных с расчетом скоростей и реакций элементов сложных механических систем при гармоническом силовом воздействии, заключается в составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений и является достаточно громоздким и трудоемким. В большинстве случаев интерес ограничивается установившимся режимом. Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета систем для установившихся режимов. При решении использованы методы, применяемые для расчета электрических цепей. Представление гармонических величин в виде вращающихся векторов в комплексной плоскости и операции с их комплексными амплитудами позволяет многократно облегчить расчет сколь угодно сложных механических систем при гармонических воздействиях в установившемся режиме. Построены векторные диаграммы амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени.

Ключевые слова: реактанс, резистанс, импеданс, сассептанс, кондактанс, адмитанс.

FORCED OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS IN STEADY STATE

I.P. Popov

The classical solution of problems associated with the calculation of the speeds and reactions of elements of complex mechanical systems with harmonic force effects, consists in the compilation and integration of systems of differential equations and is rather cumbersome and time consuming. In most cases, interest is limited to the steady state. The purpose of the research is to develop essentially compact methods for calculating systems for steady-state modes. Methods for calculating electrical circuits have been used for the problem solution. The representation of harmonic quantities in the form of rotating vectors in the complex plane and the operation with their complex amplitudes makes it possible to repeatedly simplify the calculation of arbitrarily complex mechanical systems with harmonic effects in the steady state. Vector diagrams of the amplitudes of forces, velocities and their components in the complex plane for the zero time instant are constructed.

Keywords: reactance, resistance, impedance, susceptance, conductance, admittance.

Введение

Классическое решение задач, связанных с расчетом скоростей и реакций элементов сложных механических систем при гармоническом силовом воздействии, заключается в составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений и является достаточно громоздким и трудоемким [1–8]. В большинстве случаев интерес ограничивается установившимся режимом. Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета сложных механических систем для установившихся режимов. При решении

использованы методы, применяемые для расчета электрических цепей.

Параллельное соединение потребителей механической мощности

Точки приложения сил к потребителям механической мощности (рис. 1) обладают единой скоростью

$$v = V \sin \omega t, \quad (1)$$

где V – амплитуда скорости элементов; ω – циклическая частота колебаний механической системы.

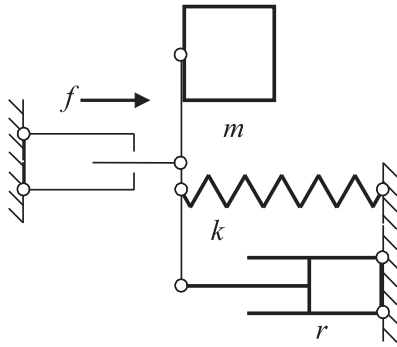


Рис. 1. Параллельное соединение потребителей механической мощности:

f – суммарная сила; m – масса груза;
 k – коэффициент упругости упругого элемента;
 r – коэффициент вязкого сопротивления демпфера

Силы, приложенные к грузу, упругому элементу и демпферу, соответственно равны

$$f_m = m \frac{dv}{dt} = m\omega V \cos \omega t, \quad (2)$$

$$f_k = -kx = k \int v dt = -\frac{k}{\omega} V \cos \omega t, \quad (3)$$

$$f_r = rv = rV \sin \omega t, \quad (4)$$

где x – деформация (отклонение, перемещение) упругого элемента; t – время.

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$\begin{aligned} f &= f_m + f_k + f_r = V \left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \cos \omega t + r \sin \omega t \right] = \\ &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \left[\frac{m\omega - k/\omega}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}} \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}} \sin \omega t \right]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как синус суммы двух углов – ωt и φ . При этом фазовый сдвиг между скоростью и силой представляет собой

$$\varphi = \arctg \frac{m\omega - k/\omega}{r}. \quad (5)$$

Тогда суммарная сила равна

$$\begin{aligned} f &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = \\ &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \sin(\omega t + \varphi) = F \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где F – амплитуда суммарной силы.

Это известная формула вынужденных колебаний, для получения которой не потребова-

лось составлять и решать дифференциальное уравнение. Амплитуда суммарной силы равна

$$F = Vz, \quad (7)$$

$$z = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}. \quad (8)$$

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий:

- (скорость) $V \Rightarrow I$ (ток),
- (сила) $F \Rightarrow U$ (напряжение),
- (масса) $m \Rightarrow L$ (индуктивность),
- (коэффициент упругости) $k \Rightarrow 1/C$ (C – емкость),
- (коэффициент вязкого сопротивления) $r \Rightarrow R$ (сопротивление).

В 1919 г. Вебстер ввел в механику заимствованное из электротехники понятие о механических реактантах, являющихся аналогами электрических реактивных сопротивлений:

- (инертный реактанс) $\omega m \Rightarrow \omega L$ (индуктивное сопротивление),
- (упругий реактанс) $k/\omega \Rightarrow 1/(\omega C)$ (емкостное сопротивление).

В соответствии с представленной системой аналогий выражение (7) дуально закону Ома для участка электрической цепи

$$U = IZ,$$

где $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$ – полное сопротивление. Следовательно, выражение (8) – это механический импеданс (*impedance*), как в силу дуального соответствия, так и потому, что в его состав входят инертный и упругий реактансы. Механический реактанс (*reactance*) равен

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

При $x=0$ получается известная формула $\omega = \sqrt{k/m}$. Имеет место резонанс сил [9]. Если при этом $r=0$, то и $z=0$. Физический смысл такого условия состоит в том, что система не оказывает сопротивления внешнему силовому гармоническому воздействию. Для единообразия терминологии величина r в дальнейшем называется механическим резистансом (*resistance*).

Комплексное представление механических величин при параллельном соединении

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} [Ae^{i(\omega t + \varphi)}],$$

где $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ – вращающийся в комплексной плоскости вектор, A – его длина, e – натуральная единица, i – мнимая единица.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени.

При этом величина $Ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\varphi} = \dot{A}$ называется комплексной амплитудой*.

В соответствии с этим выражение (1) можно представить в виде

$$v = V \sin \omega t = \text{Im}(Ve^{i\omega t}), \quad \dot{V} = Ve^{i0}.$$

Формула (2) показывает, что f_m опережает по фазе v на $\pi/2$. Следовательно, комплексную амплитуду инертной силы можно представить как

$$\begin{aligned} \dot{F}_m &= m\omega \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_m \dot{V}; \\ \underline{x}_m &= \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega m, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\underline{x}_m$ – инертный реактанс в комплексном представлении.

Также комплексная амплитуда инертной силы равна

$$\dot{F}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \omega m V e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично, с учетом формул (3) и (4) комплексная амплитуда упругой силы равна

$$\begin{aligned} \dot{F}_k &= -\frac{k}{\omega} \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_k \dot{V}; \\ \underline{x}_k &= -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{k}{\omega}; \end{aligned} \quad (10)$$

где $\underline{x}_k$ – упругий реактанс в комплексном представлении.

Для комплексной амплитуды резистивной силы также будет верно следующее:

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = \underline{r} \dot{V},$$

где $\underline{r} = r$ – резистанс в комплексном представлении.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной силы соответственно равны

$$\begin{aligned} \dot{F}_k &= \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \frac{k}{\omega} V e^{-i\frac{\pi}{2}}, \\ \dot{F}_r &= r \dot{V} = r e^{i0} V e^{i0}. \end{aligned}$$

Механические реактанс и импеданс в комплексном представлении соответственно равны

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ \underline{z} &= r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Модуль механического импеданса совпадает с выражением (8)

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}.$$

Его фаза вычисляется по соотношению (5). Таким образом, $\underline{z} = Ze^{i\varphi}$.

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = ZV e^{i\varphi}, \quad (11)$$

что соответствует (6).

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ Н, $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ кг·с⁻², $r = 7$ кг·с⁻¹. Задача: найти скорость и составляющие силы в установившемся режиме.

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i90^\circ} = 20e^{i90^\circ} \text{ (кг·с}^{-1}\text{)},$$

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i90^\circ} = 10e^{-i90^\circ} \text{ (кг·с}^{-1}\text{)}.$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (\underline{x}_m - \underline{x}_k)^2} = \sqrt{7^2 + (20 - 10)^2} = 12,207 \text{ (кг·с}^{-1}\text{)}.$$

$$\varphi = \arctg \frac{\underline{x}_m - \underline{x}_k}{r} = \arctg \frac{20 - 10}{7} = 55^\circ,$$

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi} = 12,207e^{i55^\circ} \text{ (кг·с}^{-1}\text{)}.$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{12,207e^{i55^\circ}} \approx 8,192e^{-i55^\circ} \text{ (м·с}^{-1}\text{)}, \quad (12)$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 8,192e^{-i55^\circ} = 163,846e^{i35^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 10e^{-i90^\circ} \cdot 8,192e^{-i55^\circ} = 81,923e^{-i145^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 8,192e^{-i55^\circ} = 57,344e^{-i55^\circ} \text{ (Н)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r &= 163,846e^{i35^\circ} + 81,923e^{-i145^\circ} + \\ &+ 57,344e^{-i55^\circ} = 100e^{i0} \text{ (Н)} = \dot{F}. \end{aligned}$$

* Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Классический расчет по сравнению с примером 1 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма (не является необходимой частью расчета) для величин из примера 1 представлена на рис. 2.

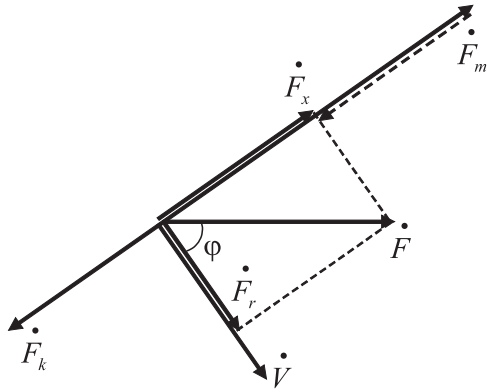


Рис. 2. Векторная диаграмма сил при параллельном соединении потребителей механической мощности

Резонанс сил

В дополнение к вышесказанному о резонансе сил можно ограничиться численным примером.

Пример 2. Пусть $k = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$. Остальные данные – из примера 1. Потребители механической мощности соединены параллельно:

$$\underline{x}_k = 20e^{-i90^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \underline{z} = r = 7e^{i0^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{7e^{i0^\circ}} \approx 14,286e^{-i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{i90^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{i90^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 100e^{i0^\circ} (\text{Н}).$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r &= 285,72e^{i90^\circ} + 285,72e^{-i90^\circ} + \\ &+ 100e^{i0^\circ} = 100e^{i0^\circ} (\text{Н}) \dot{F} = \dot{F}_r. \end{aligned}$$

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рис. 3. Реактивные силы $\dot{F}_m$ и $\dot{F}_k$ (термин заимствован из электротехники) существенно выше, чем в примере 1. При резонансе сил комплексные амплитуды инертной и упругой сил равны и противоположны.

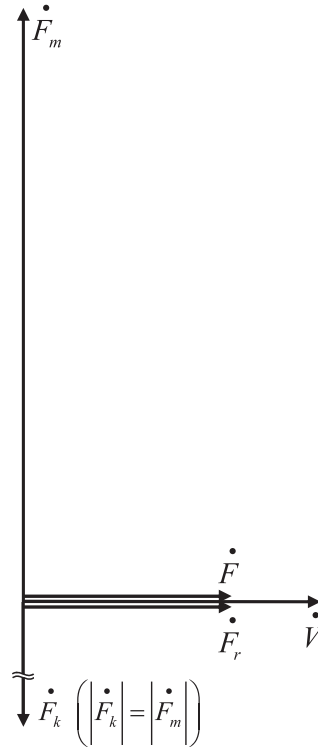


Рис. 3. Векторная диаграмма резонанса сил

Последовательное соединение потребителей механической мощности

Ко всем потребителям механической мощности (рис. 4) приложена единая сила

$$f = F \cos \omega t.$$

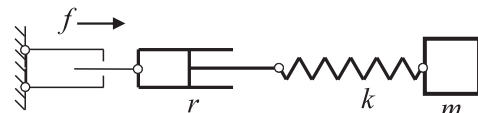


Рис. 4. Последовательное соединение потребителей механической мощности

Скорости груза и изменения размеров упругого элемента и демпфера соответственно равны

$$v_m = -\frac{1}{m} \int f dt = \frac{F}{\omega m} \sin \omega t, \quad (13)$$

$$v_k = -\frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = -\frac{\omega F}{k} \sin \omega t, \quad (14)$$

$$v_r = \frac{f}{r} = \frac{F}{r} \cos \omega t. \quad (15)$$

Скорость штока источника силового гармонического воздействия равна

$$v = v_m + v_k + v_r = F \left[\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k} \right) \sin \omega t + \frac{1}{r} \cos \omega t \right] =$$

$$= F \sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k}}{\sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}} \sin \omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}} \cos \omega t \right].$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi = \arctg \frac{1/(\omega m) - \omega/k}{1/r},$$

скорость штока примет вид:

$$v = F \sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} (\sin \varphi \sin \omega t +$$

$$+ \cos \varphi \cos \omega t) = F \sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} \times$$

$$\times \cos(\omega t - \varphi) = V \cos(\omega t - \varphi).$$

Это формула вынужденных колебаний при последовательном соединении потребителей механической мощности, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение.

Амплитуда суммарной скорости равна

$$V = Fy,$$

$$y = \sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}, \quad (16)$$

где y – механический адмитанс.

При $1/(\omega m) - \omega/k = 0$ также получается известная формула $\omega = \sqrt{k/m}$. Имеет место резонанс скоростей [10], при котором точка приложения силы к системе «упругий элемент – груз» неподвижна, при этом сами по себе груз и упругий элемент совершают колебания. Если дополнительно $1/r = 0$, то и $y = 0$. Физический смысл данного условия состоит в том, что система оказывает бесконечно большое сопротивление внешнему силовому гармоническому воздействию, вследствие чего шток источника силового гармонического воздействия неподвижен, хотя груз и упругий элемент совершают колебания.

Комплексное представление механических величин при последовательном соединении

Порядок рассуждений аналогичен представленному выше для параллельного соединения:

$$f = F \cos \omega t = \operatorname{Re}(F e^{i\omega t}), \quad \dot{F} = F e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Согласно формуле (13) v_m отстает по фазе f на $\pi/2$. Следовательно,

$$\dot{V}_m = \frac{1}{\omega m} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\underline{x}_m} \dot{F} = \underline{b}_m \dot{F},$$

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega m} = \frac{1}{\underline{x}_m},$$

где $\underline{b}_m$ – инертный сассептанс (*susceptance*) в комплексном представлении.

Тогда комплексная амплитуда инертной скорости равна

$$\dot{V}_m = \frac{1}{\omega m} e^{i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega m} F e^{i0}.$$

Аналогично, с учетом формул (14) и (15)

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\underline{x}_k} \dot{F} = \underline{b}_k \dot{F},$$

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k},$$

где $\underline{b}_k$ – упругий сассептанс в комплексном представлении.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной скоростей соответственно равны

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega}{k} F e^{i\pi},$$

$$\dot{V}_r = \frac{1}{r} \dot{F} = g \dot{F} = g F e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{g} = g = \frac{1}{r},$$

где g и $\underline{g}$ – механический кондактанс (*conductance*) и механический кондактанс в комплексном представлении соответственно.

Механический сассептанс в комплексном представлении равен

$$\underline{b} = \underline{b}_k = \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Механический адмитанс (*admittance*) в комплексном представлении принимает вид:

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического адмитанса совпадает с выражением (16)

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m}\right)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g} = \arctg \frac{\omega/k - 1/(\omega m)}{g} =$$

$$= \arctg \left[(m\omega - k/\omega) \frac{r}{mk} \right],$$

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi}.$$

Суммарная скорость равна скорости штока источника силового гармонического воздействия

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Ye^{i\varphi} Fe^{i\frac{\pi}{2}} = YFe^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}. \quad (17)$$

Пример 3. Исходные данные аналогичны данным примера 1. Задача: найти все скорости в установившемся режиме.

$$\underline{b}_m = \underline{x}_m^{-1} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$\underline{b}_k = \underline{x}_k^{-1} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$g = r^{-1} = 14,286 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{с}.$$

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} =$$

$$\sqrt{(14,286 \cdot 10^{-2})^2 + (10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2})^2} =$$

$$= 15,135 \cdot 10^{-2} (\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}),$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g} = \arctg \frac{10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}}{14,286 \cdot 10^{-2}} = 19,29^\circ,$$

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} (\text{кг}^{-1} \cdot \text{с});$$

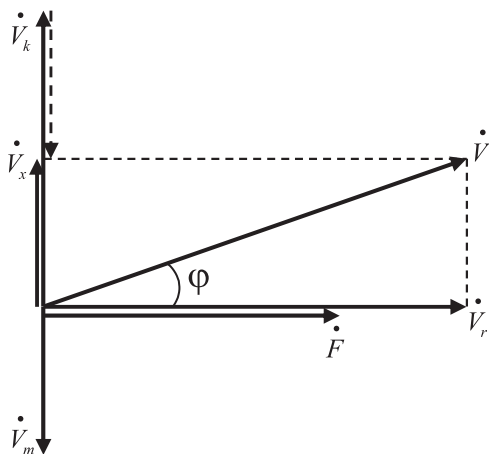


Рис. 5. Векторная диаграмма скоростей при последовательном соединении потребителей механической мощности

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} \cdot 100 = 15,135 e^{i19,29^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{-i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 10 e^{i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_r = g \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Тогда,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5 e^{-i90^\circ} + 10 e^{i90^\circ} + 14,286 =$$

$$= 15,135 e^{i19,29^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{V}.$$

Классический расчет по сравнению с примером 3 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рис. 5.

Резонанс скоростей

Дополнением к вышесказанному о резонансе скоростей может служить следующий численный пример.

Пример 4. Исходные данные – из примера 2. Потребители механической мощности соединены последовательно.

$$\underline{b}_k = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$Y = g = 14,286 \cdot 10^{-2} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$\varphi = 0^\circ,$$

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi} = 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Следовательно,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5 e^{-i90^\circ} + 5 e^{i90^\circ} + 14,286 =$$

$$= 14,286 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{V} = \dot{V}_r.$$

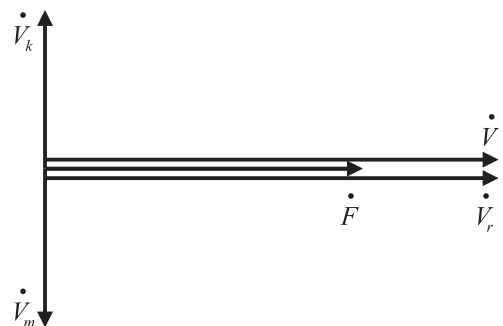


Рис. 6. Векторная диаграмма резонанса скоростей

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рис. 6.

При резонансе скоростей комплексные амплитуды инертной и упругой скоростей равны и противоположны.

Заключение

Применение комплексного представления позволило получить существенно более компактные алгебраические методы расчета сложных механических систем в установившихся режимах по сравнению с классическими методами, основанными на составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений. При этом объем вычислений сокращается в несколько раз. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактансы, резистансы и импедансы для параллельного соединения потребителей механической мощности и сассептансы, кондактансы и адмитансы – для их последовательного соединения.

Научная новизна заключается в обобщении закона Ома и методов расчета электрических цепей на механику. Практическая значимость определяется снижением трудоемкости вычислений. Методическая ценность состоит в наглядности векторных диаграмм амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени, которые дают исчерпывающее представление о фазовых соотношениях между этими величинами и их взаимосвязи.

Список литературы

1. Холостова О.В. О периодических движениях близкой к автономной системы в случаях двойного параметрического резонанса // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 175–201.
2. Сорочкин М.М. О колебаниях поршневого пальца с эксцентрично расположенным цен-

тром тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 141–148.

3. Мкртчян К.Ш. Исследование вынужденных поперечных колебаний упругого шарнирно-опертого стержня с учетом вращательного движения // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 141–153.
4. Калякин Л.А. Уравнение Пенлеве-II как модель резонансного взаимодействия осцилляторов // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Вып. 23. № 2. С. 104–116.
5. Гузев М.А., Дмитриев А.А. Стабильность связанных маятников // Дальневост. матем. журн. 2015. Том 15. № 2. С. 166–191.
6. Аниконов Д.С., Киприянов Я.А., Коновалова Д.С. Обратная задача для уравнения колебаний мембраны // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 3. С. 84–94.
7. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в системах с однородными элементами // Прикладная математика и механика. 2012. Том 76. Вып. 4. С. 546–549.
8. Смирнов А.С., Смольников Б.А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4 (53). С. 11–19.
9. Попов И.П. Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. № 2. С. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599.
10. Попов И.П. Антирезонанс – резонанс скоростей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 6. С. 362–366. <https://doi.org/10.17587/mau.20.362-366>.

**ПОПОВ
Игорь Павлович**

E-mail: ip.popow@yandex.ru
Тел.: (951) 273-80-87

Старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металло-
режущие станки и инструменты» Курганского государственного универси-
тета. Сфера научных интересов: динамика машин. Автор двух монографий,
более 200 научных статей, 22 изобретений.