

УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н.А. Берков, В.Н. Скопинский



БЕРКОВ
Николай
Андреевич

Кандидат технических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики МГИУ. Область научных интересов – механика деформируемого твердого тела, теория оболочек, численные методы анализа. Автор 20 научных трудов.

лом, а потому и наиболее ответственными в прочностном отношении.

Упругий анализ напряженного состояния конструктивных соединений, позволяющий не только оценить уровень возникающих напряжений, но и получить картину напряженного состояния для анализа возможности и места разрушения при изменении эксплуатационной нагрузки, является первым и необходимым этапом расчета на прочность. Если возникающие в конструкции напряжения не превышают предела упругости материала, то обычно такого анализа бывает достаточно. В случае, когда напряже-

Введение

Конструктивные соединения типа пересекающихся цилиндрических оболочек, типичными примерами которых являются сосуды давления с патрубками и тройниковые соединения трубопроводов, широко применяются в различных областях машиностроения [1]. Основной рабочей нагрузкой является внутреннее давление, под действием которого в зоне пересечения оболочек возникает неоднородное напряженное состояние, часто характеризующееся довольно высоким уровнем концентрации напряжений. Такие конструктивные соединения являются, как правило, наиболее напряженными для конструкции в це-



СКОПИНСКИЙ
Вадим
Николаевич

Профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов МГИУ. Специалист в области механики тонкостенных оболочек, численных методов анализа. Автор монографии и более 120 научных трудов, часть которых опубликована в зарубежных научно-технических журналах.

© Н.А. Берков, В.Н. Скопинский, 2008

ния в локальной зоне по каким-либо причинам превышают величину предела упругости, а конструктивное соединение выполнено из хрупкого материала, то в условиях высокой концентрации напряжений высока вероятность хрупкого разрушения. В соединениях, выполненных из пластичного материала, могут развиваться значительные пластические деформации. В то же время, учитывая особенности напряженного состояния рассматриваемых конструктивных соединений оболочек (их локальный характер и высокие градиенты напряжений), в опасных областях может допускаться возникновение пластических деформаций, позволяющих выровнять напряжения за счет их перераспределения в области пересечения оболочек. Поэтому в определенных случаях требуется достаточно точный и детальный анализ напряженного состояния при упругопластическом деформировании оболочек с учетом возможного увеличения эксплуатационной нагрузки. Его проведение с учетом реальной диаграммы деформирования материала необходимо для представления возможного поведения конструктивного соединения и выявления резерва его несущей способности, а также для изучения эффектов упрочнения в результате пластического деформирования материала.

Конечно-элементное моделирование

Для расчетного анализа пересекающихся цилиндрических оболочек наиболее общим подходом является применение численных методов, в первую очередь метода конечных элементов (МКЭ). При этом высокая эффективность численного решения достигается при использовании

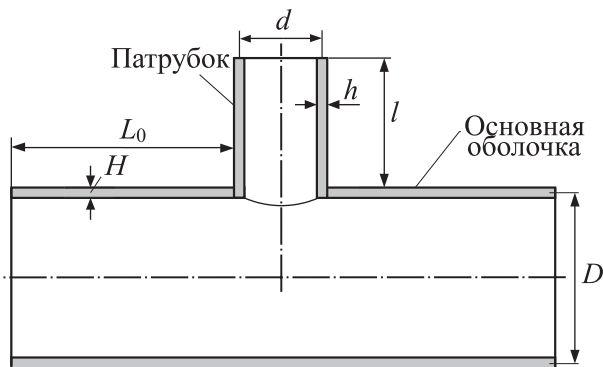


Рис. 1. Геометрические параметры оболочек радиального соединения

криволинейных оболочечных элементов.

В рамках общей классификации соединений пересекающихся оболочек [1] в данной работе рассматривается радиальное соединение цилиндрических оболочек (рис. 1) – основной оболочки и оболочки-патрубка. Для соединения можно выделить две характерные плоскости – главную плоскость, проходящую через оси обеих оболочек, и поперечную плоскость, проходящую через ось патрубка и перпендикулярную главной плоскости.

Для радиальных соединений напряженное состояние зависит от комплекса относительных геометрических параметров:

$$r/R, R/H, h/H, \quad (1)$$

$$L_0/R, l/r, \quad (2)$$

где r/R , (d/D) – отношение радиусов (или диаметров) срединных поверхностей патрубка и основной оболочки; R/H , r/h – параметры тонкостенности оболочек; h/H – отношение толщин патрубка и основной оболочки; L_0/R , l/r – относительные длины замкнутых цилиндрических частей основной оболочки и патрубка ($D = 2R$, $d = 2r$).

Основными являются параметры (1), оказывающие наиболее существенное влияние на напряжения в оболочках и во многом определяющие как величину наибольших напряжений, так и характер деформирования соединения.

Общий подход для упругого анализа пересекающихся оболочек подробно рассмотрен в монографии [2]. В настоящей работе представлено дальнейшее развитие в области анализа напряжений в пересекающихся оболочках с учетом нелинейного деформирования материала. В основе разработанной прикладной методики упругопластического анализа пересекающихся оболочек лежат следующие общие положения:

- 1) использование криволинейных систем координат, связанных с поверхностями оболочек;
- 2) применение модифицированной смешанной вариационной формулировки МКЭ с независимой аппроксимацией полей перемещений и деформаций для создания эффективных конечно-элементных моделей;
- 3) применение теории пластического течения для решения физически нелинейных задач;

4) использование рационального расчетного алгоритма, учитывающего особенности геометрии расчетного объекта.

Для конечно-элементного моделирования соединения пересекающихся цилиндрических оболочек используется четырехузловая модель оболочки вращения с 20 степенями свободы (рис. 2).

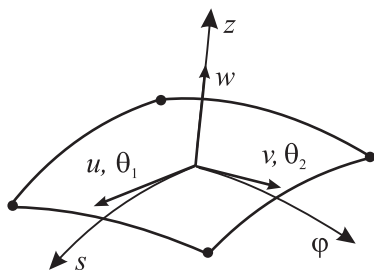


Рис. 2. Элемент оболочки:

s, ϕ, z – криволинейные координаты;
 u, v, w – линейные перемещения;
 θ_1, θ_2 – угловые перемещения

Элемент определен в системе криволинейных координат (s, ϕ, z) , связанной с поверхностями отдельных оболочек, где s, ϕ – меридиональная и окружная координаты на срединной поверхности оболочки соответственно (совпадают с линиями главных кривизн), z – координата, нормальная к поверхности оболочки. Вектор узловых перемещений элемента содержит пять степеней свободы в узле (см. рис. 2):

$$\delta^e = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}^T, \quad \delta_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{1i}, \theta_{2i}\}^T.$$

Применение оболочечной модели обеспечивает адекватное представление поверхностей оболочек, учет взаимосвязанных мембранной и изгибной деформаций оболочки. Кроме того, такой подход приводит к экономичному вычислительному алгоритму. Основные соотношения для элемента при упругом анализе оболочек приведены в [2]; в данной работе представлена нелинейная модель этого элемента, учитывающая пластическую деформацию материала.

Основные зависимости физически нелинейного анализа

Для решения задач пересекающихся оболочек в физически нелинейной постановке используется теория пластического течения с изотропным упрочнением [3, 4], применение которой для конечно-элементного анализа довольно широко

распространено [5, 6]. При решении задачи пластичности в варианте теории течения используются соотношения между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, а также устанавливается зависимость между напряжениями и параметрами пластического состояния материала.

Приращение вектора полной деформации $d\epsilon$ представляется в виде суммы приращений векторов упругой $d\epsilon_e$ и пластической $d\epsilon_p$ деформаций:

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p.$$

Приращение вектора упругих деформаций $d\epsilon_e$ выражается через приращение вектора напряжений $d\sigma$ и матрицу упругости D согласно закону Гука как

$$d\epsilon_e = D^{-1} d\sigma,$$

а приращение пластической деформации не вызывает изменения объема.

Выполняется ассоциированный закон текучести:

$$d\epsilon_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma};$$

$$f(\sigma, \epsilon_p, \beta) = 0,$$

где λ – неотрицательный скалярный множитель; f – функция текучести, характеризующая начало пластического деформирования материала; σ – текущий вектор напряжений; ϵ_p – вектор накопленных пластических деформаций; β – параметр упрочнения.

В качестве функции текучести используется условие текучести Мизеса в форме

$$f = \sigma_i - \sigma_T - q(\beta),$$

где σ_i – интенсивность напряжений; σ_T – предел текучести материала; $q(\beta)$ – функция упрочнения, характеризующая предысторию нагружения.

Связь между приращениями напряжений и деформаций представлена в виде [5]

$$d\sigma = (D - D_p) d\epsilon = D_{ep} d\epsilon, \quad (3)$$

$$D_p = D \frac{a d^T}{A + B} = \frac{d d^T}{A + B}, \quad D_{ep} = D - D_p,$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad d = D a, \quad A = -\frac{1}{\lambda} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_p} \right)^T d\epsilon_p + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta \right),$$

$$B = a^T D a.$$

Для конечно-элементного уравнение равно-

весия записывается для бесконечно малых приращений векторов узловых нагрузки $d\mathbf{F}^e$ и перемещений $d\boldsymbol{\delta}^e$:

$$\mathbf{K}_{ep}^e d\boldsymbol{\delta}^e = d\mathbf{F}^e, \quad (4)$$

где $\mathbf{K}_{ep}^e$ – упругопластическая матрица жесткости элемента.

Выражение для матрицы жесткости элемента в упругопластической области полностью аналогично выражению для упругой матрицы жесткости [2] с заменой матрицы упругости $\mathbf{D}$ на матрицу $\mathbf{D}_{ep}$:

$$\mathbf{K}_{ep}^e = \int_{V^e} \mathbf{C}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{C} dV, \quad (5)$$

где $\mathbf{C}$ – матрица связи между деформациями и вектором узловых перемещений; V^e – объем элемента.

Приращения напряжений, вычисляемые в (3) с учетом приращений деформаций

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} d\boldsymbol{\delta}^e, \quad (6)$$

должны удовлетворять уравнениям равновесия элемента.

Подставляя выражение (5) в уравнение (4) с использованием соотношений (3) и (6), получаем условие, которому должны подчиняться равновесные приращения напряжений для конечного элемента:

$$\int_{V^e} \mathbf{C}^T d\boldsymbol{\sigma} dV = d\mathbf{F}^e, \quad (7)$$

а суммированием по элементам в целом получим уравнения равновесия для конечно-элементной модели (КЭМ) конструкции для достигнутого уровня нагрузки.

В пластической зоне напряжения по толщине оболочки распределяются нелинейно, и для вычисления интеграла, входящего в уравнение (7), необходимо применять численное интегрирование не только по поверхности элемента, но и по толщине оболочке. Интегрирование по поверхности выполняется с использованием локальной системы координат [2], а при интегрировании по толщине элемент разбивается на слои, для которых учитывается изменение свойств материала. Для численного интегрирования по нормальной координате используется формула Симпсона как наиболее точная из пошаговых методов интегрирования:

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(z) dz \approx \frac{h}{3m} \left(Q_0 + Q_m + 4 \sum_{i=1}^{m_1} Q_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m_2} Q_{2i} \right);$$

$$m_1 = \frac{m}{2}, \quad m_2 = \frac{m-1}{2}, \quad Q_i = Q(z_i), \quad z_i = -\frac{h}{2} + i\Delta z,$$

$$\Delta z = \frac{h}{m}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где m – число слоев по толщине h элемента оболочки; Q – подынтегральная функция.

В расчетном анализе элементы в зоне упругопластического деформирования материала разбивались на 20 слоев по толщине, и напряжения определялись в точках численного интегрирования в середине каждого слоя. Для элементов, граничащих с линией пересечения оболочек, использовалась схема интегрирования по Гауссу (3×3) по поверхности, для остальных – (2×2).

Вычислительный алгоритм

Для упругопластического анализа пересекающихся оболочек применяется итерационный метод начальных напряжений [5]. В этом методе при пошаговом нагружении на каждой итерации используются упругие матрицы жесткости элементов, вследствие чего уравнение равновесия (7) не выполняется – возникает невязка условия равновесия для КЭМ соединения. Поэтому на каждой итерации уточняется вектор приращения напряжений до тех пор, пока не выполнится условие равновесия, а в качестве вектора нагрузки на очередной итерации используется полученная невязка.

Вычислительная экономичность решения упругопластической задачи пересекающихся оболочек достигается за счет использования специальных процедур. Во-первых, учитывается локальный характер напряженного состояния соединений пересекающихся оболочек, где имеют место значительные градиенты напряжений. С целью минимизации вычислительных затрат на реализацию итерационной процедуры по результатам упругой задачи полная КЭМ модель соединения пересекающихся оболочек условно разделяется на три области: 1 – область повышенного уровня напряжений (зоны обеих оболочек возле линии пересечения); 2, 3 – области основной оболочки и патрубка с относительно

невысоким по сравнению с напряжениями в области 1 уровнем напряжений. Принимая во внимание, что пластические зоны распространяются близко от области пересечения, коррекцию напряжений при упругопластическом деформировании для реализации состояния текучести можно проводить для ограниченного числа элементов. Поскольку зоны пластичности в обеих оболочках являются локальными и составляют относительно небольшую часть всей конструкции, следует ожидать умеренно нелинейной зависимости «нагрузка–перемещение». Кроме того, целесообразно сохранять матрицы жесткости элементов областей 2 и 3 при использовании итерационной процедуры для получения решения на каждом шаге приращения нагрузки.

Во-вторых, для решения линейной системы уравнений применяется фронтальный метод, процедура которого состоит из двух фаз: прямого хода – формирования системы уравнений («предфронтального» анализа и взаимосвязанной сборки) и обратного хода – решения системы уравнений (поэлементной обработки уравнений). В итерационной процедуре на каждом шаге реализуется только обратный ход.

Для итерационной процедуры используется пошаговое нагружение с количеством шагов l . Для достижения уровня нагрузки F_l на каждом шаге реализуется итерационный процесс с параметром k :

– из решения системы уравнений для КЭМ соединения

$$K \Delta \delta_l^{(k)} = \Psi_{k-1}$$

определяется приращение глобального вектора перемещений $\Delta \delta_k$;

– накапливается вектор перемещений $\Delta \delta_l$ и вычисляется соответствующее приращение вектора напряжений $\Delta \sigma_l(\Delta \delta_l)$;

– определяется вектор невязки

$$\Psi_k = F_l - \sum_e \int_{V^e} C^T d\sigma dV,$$

используемый для последующей итерации.

Итерационный процесс заканчивается при выполнении критерия сходимости с заданной точностью вычислений χ , определяющегося как условие для нормы векторов приращений перемещений:

$$\frac{\|\Delta \delta_l^{(k)}\|}{\|\Delta \delta_l\|} < \chi,$$

где норма векторов вычисляется по формуле

$$\|\delta\| = \sqrt{\delta^T \cdot \delta}.$$

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов

Для соединений пересекающихся оболочек при их упругопластическом деформировании опубликовано довольно мало результатов экспериментальных исследований, характеризующихся полнотой представленных данных. Для апробации разработанных прикладной методики и вычислительной программы выполнено расчетное исследование на примере сосуда давления с радиальным патрубком, экспериментальные данные для которого приведены в работе [7].

Геометрические параметры опытного сосуда и патрубка следующие (см. рис. 1): $D_{\text{вн}} = 600$ мм ($R = 303$ мм), $d_{\text{н}} = 325$ мм ($r = 159,5$ мм), $H = h = 6$ мм, $L_0 = 1040$ мм, $l = 600$ мм, где $D_{\text{вн}}$ – внутренний диаметр сосуда; $d_{\text{н}}$ – наружный диаметр патрубка.

Относительные геометрические параметры (1) радиального соединения для опытной модели: $r/R = 0,526$; $R/H = 50,5$; $h/H = 1$.

Сосуд давления изготовлен из стали Q235-A, обладающей следующими механическими свойствами: модуль Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, предел текучести $\sigma_T = 339,4$ МПа, предел прочности $\sigma_B = 472$ МПа. Диаграмма деформирования материала представлена на рис. 3.

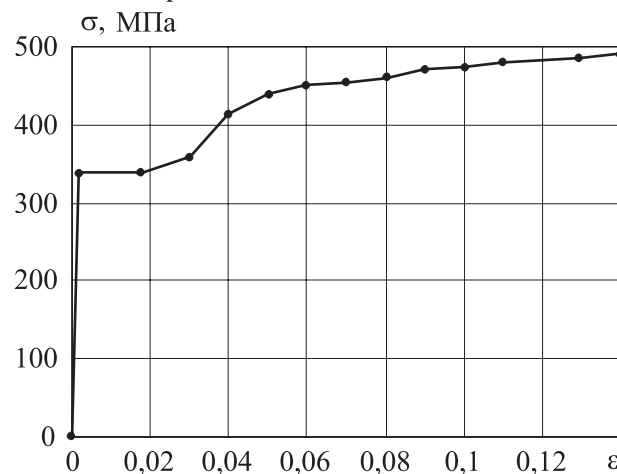


Рис. 3. Диаграмма деформирования стали Q235-A

В экспериментальном исследовании применялся метод электротензометрирования с использованием розеток датчиков сопротивления больших деформаций (до 15%), установленных в продольном и окружном направлениях на наружной поверхности корпуса сосуда (основной оболочки) и патрубка. Для главной плоскости соединения схема расположения розеток (тензоточек) показана на рис. 4. Испытание сосуда проводилось при ступенчатом увеличении внутреннего давления с приращением $\Delta p = 0,25$ МПа.

В работе [7] приведены зависимости окружной деформации от давления только для двух тензодатчиков, расположенных на сосудах и патрубке в главной плоскости на расстоянии 14 мм от соответствующих наружных поверхностей оболочек. Сравнение расчетных и экспериментальных кривых $p(\epsilon_\varphi)$ при изменении внутреннего давления в диапазоне 1,5–5,75 МПа показаны на рис. 5 для сосуда (тензоточка № 1) и патрубка (тензоточка № 7). В целом расчетные и экспериментальные результаты достаточно хорошо согласуются, что подтверждает адекватность упругопластического моделирования соединения пересекающихся цилиндрических оболочек.

Результаты упругопластического анализа

Для рассматриваемой экспериментальной модели радиального соединения проведен упругопластический анализ напряженного состояния цилиндрических оболочек.

Упругий анализ показал довольно высокий уровень концентрации напряжений в оболочках вблизи области пересечения, особенно в патрубке. Наибольшие напряжения в оболочках возникают в главной плоскости соединения. Меридиональные напряжения σ_s являются преимущественно изгибными, для окружных напряжений σ_φ доминируют мембранные растягивающие компоненты. В опасных точках наружной поверхности, где возникают наибольшие меридиональные и окружные напряжения, напряженное состояние соответствует двухосному растяжению, а для внутренней поверхности в опасных точках имеет место смешанное напряженное состояние (с глав-

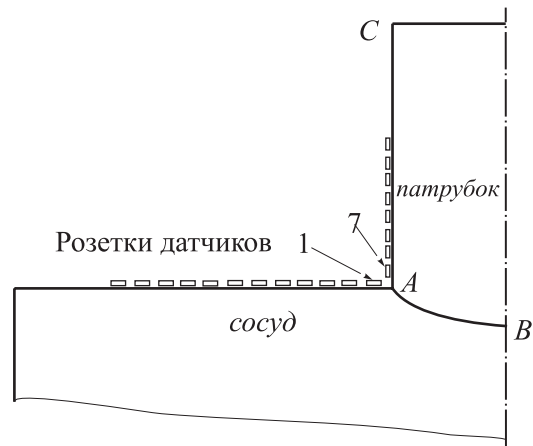


Рис. 4. Расположение тензоточек в главной плоскости соединения

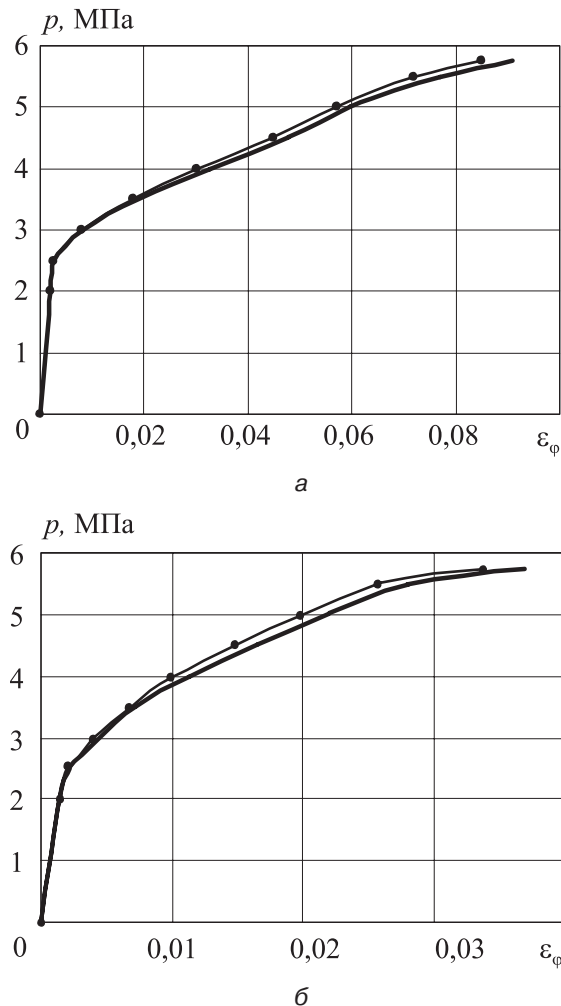


Рис. 5. Зависимость окружной деформации от давления:

а – тензоточка № 1 (основная оболочка);
б – тензоточка № 7 (патрубок);
—●— эксперимент; — расчет

ными напряжениями разного знака). При этом наибольшие значения меридиональных и окружных напряжений практически одинаковы, но интенсивность напряжений σ_i в опасных точках на внутренних поверхностях оболочек больше, чем в точках наружных поверхностей. Сильные изгибные эффекты в оболочках, особенно вблизи области пересечения, приводят к значительному изменению напряжений и по толщине оболочки.

На рис. 6, 7 приведены сравнительные расчетные результаты для компонент напряжений в оболочках для внутреннего давления $p = 2,5$ МПа – упругое и упругопластическое решения. Показано распределение напряжений в главной плоскости соединения; меридиональные координаты s и s' (для основной оболочки и патрубка соответственно) отсчитываются от наружных поверхностей оболочек.

Пластическое деформирование начинается от угловой зоны соединения (точка A , рис. 4) и с увеличением давления распространяется в различных направлениях: вдоль области пересечения и от нее, а также по толщине оболочек. Так как оставшиеся части оболочек продолжают деформироваться упруго, то с увеличением нагрузки после начала текучести происходит перераспределение напряжений вблизи области пересечения. Если сравнивать напряжения, полученные при упруго-

пластическом расчете и в предположении упругой деформации материала (условно упругие напряжения) при данном уровне нагрузки, то видно заметное различие не только в величине компонент напряжений, но и в характере изменения напряжений вблизи области пересечения. Особенно это относится к окружным напряжениям, которые становятся наибольшими для обеих оболочек. При этом максимум окружных напряжений смещается от зоны сопряжения оболочек.

В поперечной плоскости соединения наблюдаются наибольшие нормальные перемещения в обеих оболочках. На рис. 8 показаны зависимости «перемещение–нагрузка» для двух характерных точек оболочек: осевые перемещения торцевого сечения патрубка $u_c(p)$, которые мало отличаются от нормальных перемещений основной оболочки в угловой точке A (w_A), и нормальные перемещения точки основной оболочки в поперечной плоскости $w_b(p)$, являющиеся существенно нелинейными при $p > 2$ МПа.

В целом проведенный анализ показывает, что вследствие локального характера и существенной неоднородности напряженного состояния в оболочках вблизи области пересечения соединение пересекающихся оболочек при упругопластическом деформировании обладает заметным запасом несущей способности.

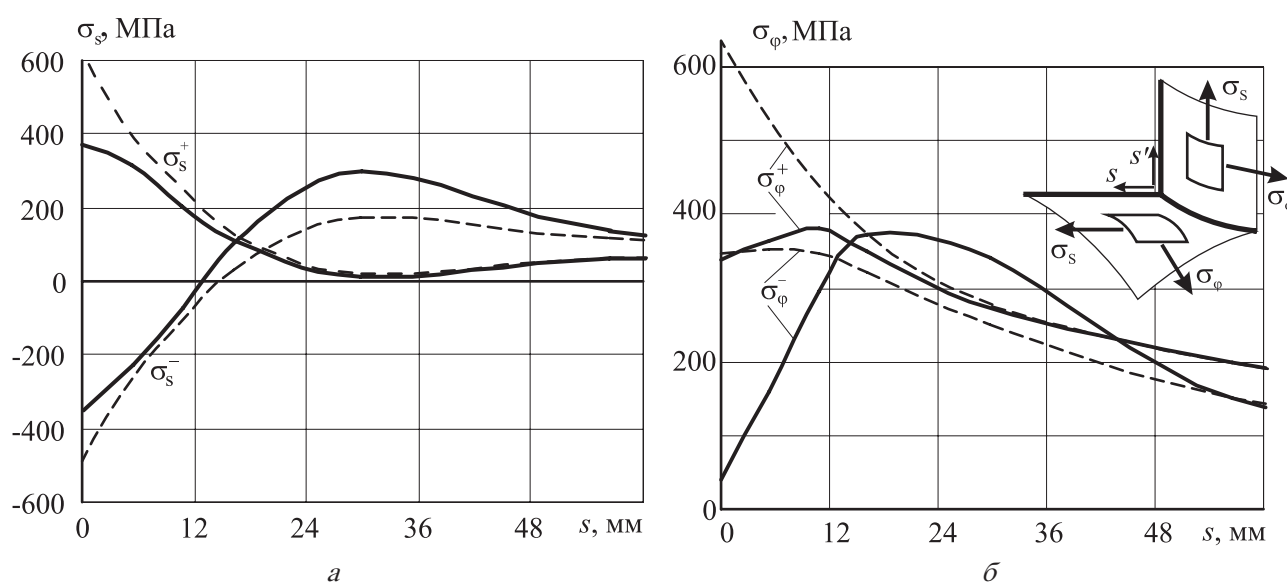


Рис. 6. Напряжения в основной оболочке ($p = 2,5$ МПа) на наружной (+) и внутренней (-) поверхностях: а – меридиональные; б – окружные; — — — упругое решение; — упругопластическое решение

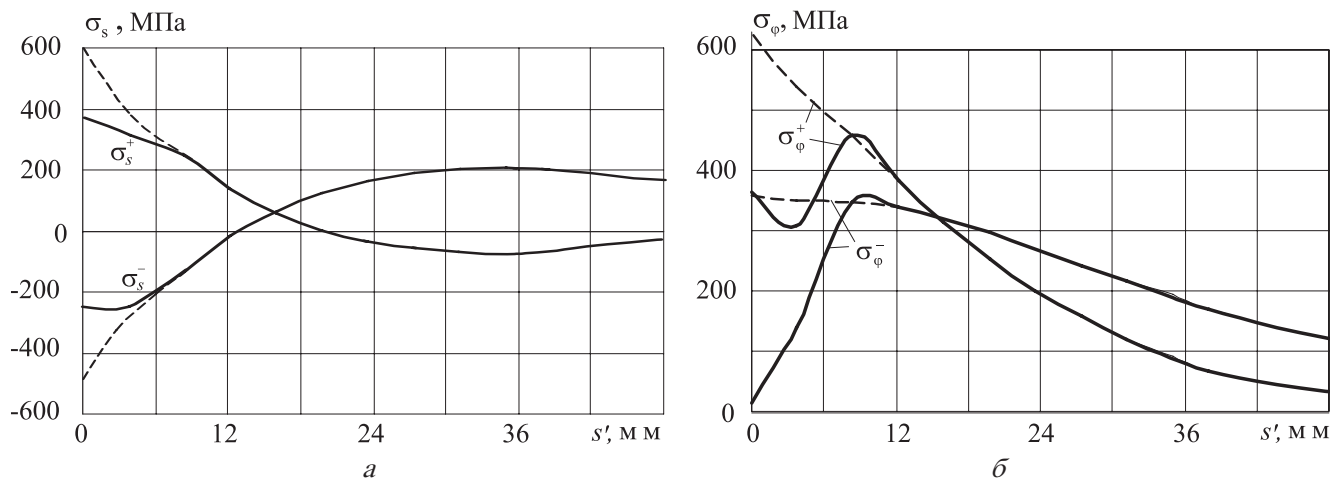


Рис. 7. Напряжения в патрубке ($p = 2,5$ МПа) на наружной (+) и внутренней (-) поверхностях: а – меридиональные; б – окружные; — – упругопластическое решение; ---- – упругое решение

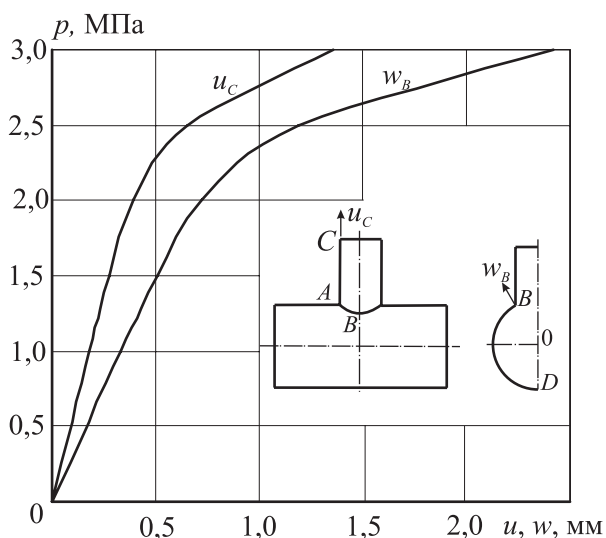


Рис. 8. Перемещения характерных точек оболочек

Заключение

Анализ упругопластического деформирования соединений пересекающихся оболочек полезен для лучшего понимания особенностей напряженного состояния различных конструктивных соединений (трубопроводов, сосудов давления и др.) при действии нагрузок, превышающих рабочее (например, при опрессовке). Результаты анализа указывают на значительный резерв несущей способности таких соединений, а также на конструктивные возможности исключения нежелательных пластических деформаций за счет применения различных способов локального укреп-

ления соединений. Актуальной проблемой для технических объектов типа пересекающихся оболочек является определение предельной нагрузки, для чего может быть эффективно использован упругопластический анализ.

Список литературы

1. Скопинский В.Н. Пересекающиеся оболочки конструктивные объекты машиностроения // Машиностроение и инженерное образование. 2005. № 2. С. 31–45.
2. Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 400 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
6. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
7. Xue L., Widera G.E.O., Sang Z.F. Influence of pad reinforcement on the limit and burst pressures of a cylinder-cylinder intersection // Journal of Pressure Vessel Technology. 2003. V. 125. No. 2. P. 182–187.