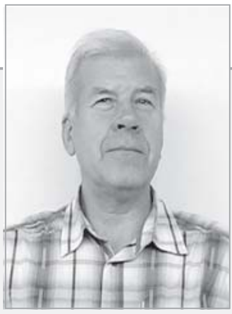
УДК 517.987

СИНТЕЗ КОМПАКТОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Л.А. Широков



ШИРОКОВ Лев Алексеевич

Доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и систем в экономике и управлении МГИУ. Академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, Изобретатель СССР. Специалист в области оптимального управления, САПР, информационных технологий. Автор 3 монографий, более 130 научных статей, включая изобретения, 2 учебников и более 20 учебных пособий.

Введение

Для автоматизированного проектирования систем регулирования актуальной является задача автоматизации процессов настройки векторов параметров регуляторов линейных систем регулирования. Автоматическая параметрическая оптимизация линейных систем регулирования также важна и для условий их реальной эксплуатации в случаях самонастраивающихся и адаптивных структурных решений при их синтезе. Эффективным подходом к автоматизации процессов оптимальной параметрической настройки систем регулирования является применение градиентных алгоритмов, метода Ньютона, метода Гессе. При их реализации на основе беспоисковых принципов оптимизации находит применение теория чувствительности [1–4]. С помощью функций чувствительности определяют градиент, экстраполяционные матрицы ускорения сходимости [1,5]. Так, при оптимизации динамических систем по вектору параметров настройки $\mathbf{c}=(c_0,\ldots,c_n)^{\text{т}}$ ("т" – символ транспонирования) на основе критерия оптимальности

$$I=L(F_1(x(t))+F_2(\mathbf{x}^1_c(t))) \qquad (1)$$

с линейным оператором L, нелинейными выпуклыми положительно определенными функциями F_1 и F_2 соответственно от выходной координаты системы $x(t)=x(t,\mathbf{c})$ и вектора функций чувствительности первого порядка

$$\mathbf{x}^1_c(t)=(x_0(t),\ldots,x_n(t)), \qquad (2)$$

где 1 – индекс вектора функций чувствительности первого порядка $x_j(t)=\partial x(t)/\partial c_j$, $j=\overline{0,n}$ [3], для вычисления вектора градиента $\nabla_c\mathbf{I}=\partial I/\partial\mathbf{c}$ должна одновременно с $\mathbf{x}^1_c(t)$ вычисляться и матрица функций чувствительности второго порядка:

$$\mathbf{x}^2_c(t)=\|x_{jl}(t)\|,\ j,l=\overline{0,n}, \qquad (3)$$

где 2 – индекс вектора функций чувствительности второго порядка $x_{jl}(t)=\partial^2 x_{jl}(t)/\partial c_j\partial c_l$.

При оптимизации с экстраполяционной матрицей Гессе $\mathbf{H}=\partial\nabla_c\mathbf{I}/\partial\mathbf{c}$ в случае критерия (1) требуются и функции чувствительности третьего порядка:

$$\mathbf{x}_c^3(t)=\|x_{jlk}(t)\|,\ \ j,l,k=\overline{0,n}\ , \qquad (4)$$

где 3 – индекс вектора функций чувствительности третьего порядка: $x_{jlk}(t)=\partial^3 x(t)/\partial c_j \partial c_k \partial c_l$.

В других постановках могут использоваться функции чувствительности и более высоких порядков.

Для упрощения алгоритмического обеспечения автоматизированного проектирования линейных систем регулирования и соответствующего программного обеспечения, а также ускорения формирования искомых проектных решений при меньших затратах целесообразно применять методы одновременного вычисления требуемых функций чувствительности. Для функций чувствительности первого порядка это обеспечивает метод точек чувствительности [1]. Для одновременного получения матриц функций чувствительности второго порядка разработан структурный метод [2,3], однако он предусматривает применение совокупности из более пяти специальных правил. Вопрос одновременного вычисления функций чувствительности третьего и более высоких порядков на одной модели впервые решен в работах [6,7].

С точки зрения практических приложений важна разработка метода построения моделей для одновременного получения всех векторов функций чувствительности требуемого порядка, которые будем называть компактами чувствительности с целью упрощения и повышения эффективности автоматической параметрической оптимизации линейных систем регулирования.

Задача автоматического параметрического проектирования линейных систем регулирования

Автоматические системы регулирования линейными в общем случае немнимально-фазовыми объектами, к которым относятся и объекты с запаздыванием, могут быть описаны [5] дифференциальным уравнением вида:

$$q_n x^{(n)}(t)+q_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\ldots+q_0 x^{(0)}(t)=b_m z^{(m)}(t-\tau)+ +b_{m-1}z^{(m-1)}(t-\tau)+\ldots+b_0 z^{(0)}(t-\tau), \qquad (5)$$

где m<n (верхние индексы в скобках обозначают производные по времени) с нулевыми начальными условиями: $x^{(i)}(0)=0,\ \ i=\overline{0,n-1}$.

Здесь $z(t-\tau)=0$ при $t<\tau$; b_i – фиксированные, q_i – варьируемые параметры системы; $\tau\geq 0$ – чистое запаздывание; z – некоторая функция такая, что для уравнения (5) удовлетворяются условия непрерывности в некоторой открытой области D и условия Липшица, чем обеспечивается единственность решения.

Для систем регулирования в составе вектора варьируемых параметров системы **q** будем рассматривать аддитивно включенные с вектором параметров объекта **a** и вектор параметров настройки с автоматического регулятора:

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{c},$$

где $\mathbf{a}=(a_0,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c}=(c_0,\ldots,c_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{q}=(q_0,\ldots,q_n)^{\mathrm{T}}$.

В процессе параметрической оптимизации системы регулирования должен настраиваться $(n+1)$-мерный вектор **c**.

При традиционном подходе, дифференцируя уравнение (5) по вектору параметров настройки регулятора, получают системы $(n+1)$ уравнений чувствительности [1]:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_j(t)=-x^{(j)}(t),\ j=\overline{0,n}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{x}_j(t)=(x^{(n)}_j(t),\ x^{(n-1)}_j(t),\ldots,x_j(t))^{\mathrm{T}}$ – вектор производных по времени от функций чувствительности первого порядка $x_j(t)$ выходной координаты $x(t)$ системы регулирования по параметру настройки автоматического регулятора c_j; Т – символ транспонирования; $\boldsymbol{x}^{(j)}(t)$ – j-я производная по времени t от выходной координаты $x(t)$ системы регулирования.

Так как начальные условия исходной системы (5) нулевые, то в соответствии с определением частной производной начальные условия дифференциальных уравнений в системе (6) также будут нулевыми:

$$x_j^{(i)}(0)=0,\ j=\overline{0,n},\ i=\overline{0,n-1}. \qquad (7)$$

Для одновременного получения компонент вектора функций чувствительности (2) следует решать все уравнения системы (6). При таком подходе именно этот факт предопределяет громоздкость решения задачи как с точки зрения объема программы, так и с точки зрения времени ее реализации. Имея в виду задачу разработки более эффективных алгоритмов оптимизации, рассмотрим для автоматических систем регулирования применение менее сложных структур, т.е. компактов чувствительности для генерации всех требуемых векторов функций чувствительности при реализации алгоритмов оптимизации. Как отмечено выше, базисом для реализации такой возможности одновременного получения векторов функций чувствительности является следующая теорема о глобальной взаимосвязи функций чувствительности линейных динамических систем и вытекающее из нее следствие.

Теорема о глобальной взаимосвязи функций чувствительности линейных динамических систем

В динамических системах, описываемых линейными дифференциальными уравнениями вида (5): n-го порядка с постоянными коэффициентами и с нулевыми начальными условиями, функции чувствительности различного порядка по различным параметрам взаимосвязаны между собой соотношениями:

$$x_{i_1+k_1,\ldots,i_r+k_r}(t) = x^{(p)}_{i_1\ldots i_r}(t), \quad r\in[\overline{1,n+1}],$$

$$p=\sum_{v=1}^{r} k_v, \quad i_v+k_v\in[\overline{0,n}]. \tag{8}$$

В основе доказательства теоремы используется лемма.

Лемма. В динамических системах, описываемых линейными дифференциальными уравнениями вида (5) с нулевыми начальными условиями, производные

$$x^{(i)}_j(t), \; j=\overline{0,n-1}, \; i=\overline{n,2n-(j+1)} \tag{9}$$

имеют нулевые начальные значения.

Доказательство леммы основывается на анализе системы уравнений чувствительности (6) и исходного уравнения (5), имеющих нулевые начальные условия, из которого следует, что

$$x^{(n)}_j(0)=0, \; j=\overline{0,n-1}. \tag{10}$$

Продифференцируем по времени j-е уравнение системы (6):

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^{(j+1)}(t) = -x^{(j+1)}(t), \; j=\overline{0,n-2}.$$

Откуда при t=0 с учетом (10) получим:

$$x^{(n+1)}_j(0)=0, \; j=\overline{0,n-2} \tag{11}$$

Предположим, что при значениях порядков производных по t до k-го включительно установлен факт нулевых начальных условий для производных

$$x_j^{(n+p)}(0)=0, \; p=\overline{2,k}, \; j=\overline{0,n-(p+1)}. \tag{12}$$

Докажем аналогичный результат для p=k+1.

Продифференцируем j-е уравнения ($j=\overline{0,n-(k+2)}$) системы (6) k+1 раз по переменной t:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_j^{(i+k+1)}(t) = -x^{(j+k+1)}(t), \quad j=\overline{0,n-(k+2)}.$$

Принимая во внимание значения начальных условий из соотношений (7),(10) – (12), из полученной системы уравнений следует:

$$x_j^{(n+k+1)}(0)=0, \; j=\overline{0,n-(k+2)}.$$

Таким образом, соотношения (9) справедливы, т.е. лемма доказана.

Замечание. Доказанный в лемме результат имеет место при изменении i именно до $2n$-1. Действительно, при i=$2n$ начальное условие для (9) определяется начальным значением старшей производной в (5), которое вычисляется уже по соответствующему значению правой части.

Для доказательства теоремы рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений (6) с начальными условиями (7). Каждое уравнение системы (6), разрешенное относительно старшей производной, имеет соответствующую правую часть, непрерывную и имеющую в некоторой окрестности точки, определенной начальными условиями, непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

При условии соблюдения соотношений

$$k\in[\overline{1,n}], \quad j+k\le n \tag{13}$$

продифференцируем j-е уравнение из системы (6) ($j\in[\overline{0,n-1}]$) k раз по переменной t:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^{(i+k)}(t) = -x^{(j+k)}(t). \tag{14}$$

Сопоставляя уравнения (14) и (6), можно заключить, что при выполнении условий (13) в системе (6) найдется (j+k)-е уравнение с правой частью, равной правой части уравнения (14). Следовательно, равны и их левые части:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^{(i+k)}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{(i)}_{j+k}(t). \tag{15}$$

Найдем решение уравнения (15), предварительно сгруппировав члены при одинаковых коэффициентах:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(x_i^{(i+k)}(t) - c_i x_{j+k}^{(i)}(t)) = 0. \qquad (16)$$

Вводя обозначение

$$u_k(t)=x_j^{(k)}(t)-x_{j+k}(t), \qquad (17)$$

перепишем (16) в виде:

$$u_k^{(n)}(t) = -\frac{1}{c_n}\sum_{i=2}^{n-1} c_i u_k^{(i)}(t). \qquad (18)$$

Определим начальные условия переменных $u_k^{(i)}(t)$ в (18) при $i=\overline{0,n-1}$, $t=0, k\in[\overline{1,n}]$. С этой целью, как следует из (16), должны быть определены с учетом (13) начальные условия для $x_j^{(j+k)}(t)$ и $x_{j+k}^{(j)}(t)$, $i=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,n}$. На основе (10) и леммы можно сделать вывод, что начальные условия этих функций будут иметь нулевые значения.

Из анализа однородного дифференциального уравнения (18) при полученных начальных условиях можно установить наличие нулевого решения:

$$u_k(t), k\in[\overline{1,n}]. \qquad (19)$$

В соответствии с исходной формулировкой задачи можно утверждать, что правая часть уравнения (18) непрерывна и имеет в некоторой окрестности точки, определенной начальными условиями, непрерывные частные производные по всем аргументам $u_k(t), u^1_k(t), \dots, u_k^{(n-1)}(t)$. Тогда, в соответствии с теоремой существования и единственности решения, можно утверждать, что найдется на некотором интервале n раз дифференцируемая функция $u_k(t)$, удовлетворяющая уравнению (18) и заданным начальным условиям, которая единственна. Следовательно, при заданных условиях нулевое решение (19) существует и оно единственно.

Тогда на основании соотношения (17) можно записать:

$$x_{i,j+k}(t) = x_{ij}^{(k)}(t), \quad i,j,k\in[\overline{0,n}] \quad j+k\le n. \qquad (20)$$

Дифференцируя (20) по любому j-му параметру c_i ($i\in[0, n]$), получаем:

$$x_{i_1+k_1,i_2+k_2}(t) = x_{i_1 i_2}^{(k_1+k_2)}(t), \quad i_v+k_v\in[\overline{0,n}], \quad v=1,2 \qquad (21)$$

Учитывая перестановочность индексов параметров вектора **c**, и вводя общую индексацию, соотношение (21) можно переписать в виде:

$$x_{i_1+k_1,i_2+k_2}(t) = x_{i_1 i_2}^{(k_1+k_2)}(t), \quad i_v+k_v\in[\overline{0,n}], \quad v=1,2.$$

Продолжая аналогичным образом последовательное дифференцирование, можно получить подобные соотношения для определения взаимосвязи функций чувствительности произвольного порядка в виде (8), т.е. теорема доказана.

Соотношение (8) показывает, что для систем вида (5), располагая функциями чувствительности некоторого r-го порядка по каким-либо параметрам, можно получить функции чувствительности того же порядка по параметрам со смещенными на некоторые величины индексами либо p-кратным дифференцированием по времени исходной функции чувствительности, если p–положительное смещение, либо p-кратным интегрированием, если p – отрицательное смещение. Из теоремы вытекает следствие.

Следствие. Для рассматриваемого в теореме класса систем функции чувствительности порядка $r\,(r\in[\overline{2,n+1}])$, имеющие равные суммы индексов параметров, по которым они определяются, равны между собой. Действительно, для правой части соотношения (8) на основе теоремы можно в свою очередь записать равенство:

$$x_{i_1\dots i_r}^{(p)}(t) = x_{\underbrace{0\dots0}_{r}}^{(p_c)}(t), \quad p_c=p+p_i, \quad p_i=\sum_{v=1}^{r} i_v, \quad i_v\in[\overline{0,n}],$$

$$r\in[\overline{1,n+1}]. \qquad (22)$$

Оно справедливо при фиксированном p_c, которое может быть комбинацией индексов любых параметров функций чувствительности r-го порядка.

Сформулированная теорема позволяет по соотношению (8) при r=1 установить взаимосвязи функций чувствительности для системы (6). На их основе можно строить компакты чувствительности для одновременного вычисления компонентов вектора (2), используя лишь первое уравнение из системы (6), адекватное по структуре уравнению (5). Назовем его базовым уравнением чувствительности. Решением этого уравнения будет функция чувствительности $x_0(t)$, а одновременно получаемые по (8) при r=1, i_1=0, k_1=j производные решения есть остальные функции вектора (2):

$$x_j(t) = x_0^{(j)}(t), \quad j = \overline{1,n} \ . \qquad (23)$$

Компакт чувствительности для генерации функций чувствительности второго порядка

В соответствии с вышеизложенным, рассмотрим методику одновременного вычисления всего вектора требуемых для алгоритмов оптимизации функций чувствительности второго порядка. С этой целью продифференцируем по вектору **c** первое уравнение системы (6) с учетом соотношения (23). В результате получим систему из уравнений чувствительности второго порядка:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{j0}(\mathrm{t}) = -2x_0^{(j)}(t),\ j=\overline{0,n}, \qquad (24)$$

где $\mathbf{x}_{j0}(t)=(x^{(n)}{}_{j0}(t)+x^{(n-1)}{}_{j0}(t)+\ldots+x_{j0}(t))^{\mathrm{T}}$ – вектор производных по времени от функций чувствительности второго порядка $x_{j0}(t)$ выходной координаты $x(t)$ системы регулирования по параметру настройки автоматического регулятора c_j и параметру настройки автоматического регулятора c_0; $x_0^{(j)}(t)$ – j-я производная по времени t от функции чувствительности первого порядка $x_0(t)$выходной координаты $x(t)$ системы регулирования по параметру настройки автоматического регулятора c_0.

Решения системы уравнений (24) составляют первую вектор-строку матрицы (3):

$$S_M(0)=(x_{00}(t),\ldots,x_{0n}(t)). \qquad (25)$$

Дифференцируя последовательно по вектору параметров **c** остальные уравнения системы (6), можно сформировать совокупность систем уравнений чувствительности второго порядка, решения которых позволяют получить всю матрицу (3). Однако такой путь весьма громоздок. Упрощение вычисления функций чувствительности обеспечивает сформулированная теорема, из соотношения (8) которой при r=2 следует равенство:

$$x_{i_1+k_1,i_2+k_2}(t) = x_{i_1 i_2}^{(p)}(t),\ \ p = k_1 + k_2, \quad i_v + k_v \in [\overline{0,n}],$$
$$\mathrm{v}=1,2. \qquad (26)$$

На его основе можно вычислять элементы первой строки $\mathbf{S}_M(0)=(S_M(0,0),\ldots,S_M(0,n))$ (здесь $\mathbf{S}_M(0,i)= x_{ni}(t),\ i=\overline{0,n}$) матрицы (3), используя лишь первое уравнение из (24), часть которого адекватна исходному уравнению. Решение этого уравнения есть функция чувствительности $x_{00}(t)$, а одновременно получаемые производные решения по t в соответствии с (26) при i_1+k_1, i_2=0; $k_2=\overline{1,n}$ представляют собой остальные функции чувствительности в (25).

Подобным же образом решением каждого j-го ($j \in [\overline{1,n}]$) уравнения из системы (24) будет функция $x_{0j}(t)$ – первый элемент $S_M(j)$-й строки матрицы (3), а одновременно получаемые при его решении производные составят ее остальные элементы.

Дальнейшее упрощение вычисления матрицы (3) обеспечивает использование следствия теоремы, в соответствии с которым

$$x_{i_1 \pm k, i_2 \mp k}(t) = x_{i_1 i_2}(t), \quad i_v \pm k_v \in [\overline{0,n}], \qquad (27)$$

где k_v– вариация индексов параметров, по которым определяются функции чувствительности. Отсюда можно сделать вывод, что функции чувствительности, расположенные в диагоналях матрицы (3), пересекающих главную, равны между собой. Следовательно, соотношение (27) устанавливает значения функций матрицы (3), расположенных на побочной диагонали и над ней, по функциям, вычисленным для первой строки матрицы. Совокупность полученных таким образом функций чувствительности представим подмножеством Q_{21} множества Q_2 элементов матрицы (3). Оно включает $N_{21}=\frac{1}{2}((n+1)^2+n+1)$ элементов. Аналогично по функциям чувствительности n-й строки матрицы (3):$\mathbf{S}_M(n)=(S_M(n,0),\ldots,\ S_M(n,n))$, вычисленным на основе n-го уравнения из системы (24), можно в соответствии с (27) установить значения функций, расположенных над этой строкой до побочной диагонали включительно. Представим их подмножеством Q_{22} матрицы (3). Следовательно, решением двух уравнений из системы (23), составленных соответственно относительно параметров c_0 и c_n, вычисляется все множество Q_2.

Для вычисления матрицы (3) можно ограничиться и одним n-м уравнением из системы (24), которое назовем базовым. По этому уравнению вычисляется n-я строка матрицы (3) и соответственно подмножество Q_{22}. Для получения функций подмножества Q_{21}, расположенных над побочной диагональю, необходимо воспользоваться операцией последовательного интегрирования. Однократным интегрированием функции чувствительности, принадлежащей некоторой диагонали, параллельной побочной, вычисляется, как следует из соотношения (26), функция чувствительности следующей диагонали, расположенной над ней, а также, как видно из (27), определяются и функции чувствительности этой диагонали в целом. Общее число последовательных интегрирований равно n.

Для построения программного обеспечения ЭВМ процедуру вычисления множества Q_2 целесообразно формализовать. Это можно сделать расширением влево n-й строки $S_M(n)$ матрицы (3) на n элементов. В результате получится вектор-строка:

$$\mathbf{S}_{M^e} = (S_M(0,0),\ldots,S_M(n-1,0),\ S_M(n,0),\ldots,S_M(n,n)), \tag{28}$$

где $S_M(n,i), i=\overline{0,n}$ – базовая часть в S_{M^e}; $S_M(n-i,0)=S_M^{(-i)}(n,0)$ – расширение в $S_{M^e}, i=\overline{1,n}$ (отрицательный верхний индекс в скобках обозначает порядок интегрирования). Тогда искомый элемент матрицы (3) есть соответствующий элемент вектора (28), аргумент которого равен сумме индексов искомого элемента.

Таким образом, компакт чувствительности для генерации матрицы функций чувствительности второго порядка (3) можно построить либо на основе двух уравнений из (23) для функций чувствительности относительно параметров c_0, c_0 и c_n, c_0, либо на основе только одного базового уравнения чувствительности, составленного относительно пары параметров c_n, c_0 с использованием расширения (28) n-й строки матрицы (3).

Компакт чувствительности для генерации функций чувствительности третьего и более высоких порядков

Рассмотрим обобщенную методику одновременного вычисления функций чувствительности третьего и более высоких порядков. Изложенный выше подход позволяет разработать компакт чувствительности для определения трехмерного массива (куба Q_3) функций чувствительности третьего порядка (4), представляющего собой совокупность из n+1 слоев, каждый из которых есть k-я матрица ($k \in [\overline{0,n}]$).

Продифференцируем по вектору **c** n-е уравнение из системы (24) и с учетом (26) запишем систему из n+1 уравнений чувствительности третьего порядка:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{0nj}(t) = -3x_{0n}^{(j)}(t),\quad j=\overline{0,n}, \tag{29}$$

где $\mathbf{x}_{0nj}(t)=(x^{(n)}_{0nj}(t)+x^{(n-1)}_{0nj}(t)+\ldots+x_{0nj}(t))^T$ – вектор производных по времени от функций чувствительности третьего порядка $x_{0nj}(t)$ выходной координаты $x(t)$ системы регулирования по параметру настройки автоматического регулятора c_0, параметру c_n и параметру настройки c_j; $x_{0n}^{(j)}(t)$ – j-я производная по времени t от функции чувствительности второго порядка $x_{0n}(t)$ выходной координаты $x(t)$ системы регулирования по параметру настройки автоматического регулятора c_0 и параметру c_n.

Из решения n-го уравнения в (29) (при j=n) с учетом соотношения (8)–(22) при r=3; i_v=0; v=1,3; k_1=k_2=n; k_3=I следует:

$$x_{nni}(t) = x_{nn0}^{(i)}(t),\quad i=\overline{0,n}, \tag{30}$$

откуда получаем элементы n-й строки матрицы n-го (или верхнего) слоя множества Q_3 – вектор $\mathbf{S}_k(n,n)=(S_k(n,n,0),\ldots,S_k(n,n,n))$ (здесь $S_k(n,n,i)=x_{nni}(t)$, i=0,n). Принимая во внимание установленные в теореме и следствии взаимосвязи функций чувствительности, можно заключить, что n-е уравнение в (29) позволяет вычислять все функции чувствительности третьего порядка по тем параметрам, сумма номеров которых изменяется от 2n до 3n. Представим их базовым подмножеством Q_{31} множества Q_3. В верхнем, или в последнем, слое множества Q_3 эти функции принадлежат побочной диагонали и ей параллельным, расположенным справа; в предпоследнем слое – диагоналям, смежным с предыдущими, исключая побочную; в следующем слое – аналогичным диагоналям, исключая побочную и соседнюю с ней и т.д. В нижнем, или первом, слое такая функция представляется правым нижним угловым элементом.

Следовательно, базовое подмножество Q_{31} представляет собой треугольную пирамиду. В этой пирамиде наклонная грань, которую назовем побочной, представляющая собой треугольник, основание которого – побочная диагональ верхнего слоя, а противолежащая ей вершина – правый нижний угловой элемент множества Q_3, характеризуется тем, что принадлежащие ей функции чувствительности имеют постоянную сумму индексов параметров, по которым они определяются, и, согласно следствию из теоремы, равны между собой:

$$x_{i_1 i_2 i_3}(t) = x_{i_1+k_1, i_2+k_2, i_3+k_3}(t), \quad \sum_{v=1}^{3} k_v = 0, \quad i_v + k_v \in [\overline{0,n}],$$

где k_v – вариации индексов параметров. Общее число функций чувствительности базового подмножества равно: $N_{31}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(n+3)/6$.

В каждом сечении куба, параллельном побочной грани, функции чувствительности имеют постоянные суммы индексов параметров, по которым они определяются и, как установлено вследствие теоремы, равны между собой. Следовательно, для определения всех функций чувствительности какого-либо сечения достаточно вычислить только одну из них. Исходя из структуры множества Q_3, можно установить, что функции чувствительности каждой пары сечений, параллельных побочной грани, имеют суммы индексов определяемых ими параметров, отличающиеся между собой на число, превышающее на единицу общее число размещенных между ними сечений. Из соотношения (30) видно, что для получения функций чувствительности по параметрам, суммы индексов которых изменяются от n до $2n$ (отнесем их к подмножеству Q_{32}), необходимо решение уравнения из (29), составленного относительно функции $x_{00n}(t)$. Тогда производные от этого решения по t, как следует из полученного аналогично (30) из (8) соотношения

$$x_{0ni}(t) = x_{00n}^{(i)}(t), \quad i = \overline{0,n},$$

определяют остальные функции подмножества Q_{32}.

Для вычисления оставшегося подмножества Q_{33} функций чувствительности с суммами индексов, изменяющихся от 0 до n, требуется, как следует из вышеизложенного, решить уравнение, составленное относительно функции $x_{000}(t)$. С этой целью, продифференцировав по параметру c_0 первое уравнение системы (24) с учетом (26), получим

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_{000}^{(i)}(t) = -3x_{00}(t). \qquad (31)$$

Решение уравнения (31) и его производные по времени, как следует из получаемого по аналогии с (30) из (8) соотношения

$$x_{00i}(t) = x_{000}^{(i)}(t), \quad i = \overline{0,n},$$

представляют собой функции множества Q_{33}.

Следовательно, весь массив Q_3 (4) определяется решением трех уравнений относительно функций $x_{000}(t)$, $x_{00n}(t)$ и $x_{0nn}(t)$.

Исходя из сформулированной теоремы и следствия из нее все функции чувствительности третьего порядка можно вычислить на основе лишь одного n-го уравнения из системы (29), которое назовем базовым. Выполняя последовательное интегрирование полученной из него функции $x_{nn0}(t)$, принадлежащей побочной диагонали (и следовательно, грани) верхнего слоя множества куба Q_3, получим, как вытекает из следствия теоремы, функции чувствительности сечений, параллельных побочной грани, т.е. подмножество Q_{32}. Для вычисления всех функций, принадлежащих подмножествам Q_{32} и Q_{33}, должно быть выполнено $2n$-кратное интегрирование.

Как и выше, для программного обеспечения ЭВМ формализуем процедуру вычисления множества Q_{33} функций чувствительности третьего порядка на основе использования одного n-го уравнения из (29). Для этого, учитывая структуру множества Q_3 , введем расширение влево последней строки Q_3 верхнего слоя куба на $2n$ элементов и получим вектор-строку:

$$\mathbf{S}_{k^e} = (S_k(0,0,0),\ldots,S_k(n,0,0),\ldots,S_k(n,n,0),\ldots,S_k(n,n,n)), \qquad (32)$$

где $S_k(n,n,i), i=\overline{0,n}$ – базовая часть в S_{k^e}; $S_k(n-i_1, n-i_2, 0) = S_k^{(-i_1-i_2)}(n,n,0), i_1, i_2 = \overline{1,n}$ – расширение в S_k.

Требуемая функция чувствительности множества (4) определяется элементом вектора (32), аргумент которого равен сумме индексов искомой функции.

Таким образом, для получения функций чувствительности третьего порядка (4) можно использовать либо компакт чувствительности, включающий три уравнения относительно троек параметров c_0, c_0, c_0; c_n, c_0, c_0 и c_n, c_n, c_0, либо компакт на основе одного n-го уравнения из системы (29) относительно тройки параметров c_n, c_n, c_0 с использованием расширения (32) n-й строки верхнего слоя куба Q_3.

Аналогично рассмотрим построение по изложенной методике компакта чувствительности для получения функций чувствительности любого s-го порядка, составляющих соответствующие массивы s-мерные кубы Q_s. Здесь также возможны два подхода. Первый основан на решении системы из n уравнений чувствительности s-го порядка, соответственно составленных относительно параметров:

$$\overbrace{c_0,\ldots,c_0}^{s};\ \overbrace{c_0,\ldots,c_0}^{s-1},\ c_n;\ldots;c_0,\ \overbrace{c_n,\ldots,c_n}^{s-1}\ .$$

Второй подход, формализующий вычисление искомых функций чувствительности, следуя изложенной выше методике, использует базовое подмножество функций s-го порядка, вычисленных по базовому уравнению чувствительности, структурно идентичному исходной системе (5):

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^{(i)}_{0\underbrace{n..n}_{s-1}}(t) = -s x_{\underbrace{n..n}_{s-1}}(t).$$

Эти функции составляют n-ю вектор-строку $\mathbf{S}_R(\overbrace{n,\ldots,n}^{S-1})$ верхнего слоя куба Q_3. Для получения функций всего множества Q_3 введем расширение влево n-й строки верхнего слоя на $n(s-1)$ элементов:

$$S_R = (S_R(\overbrace{0,\ldots,0}^{S}),\ldots,S_R(n,\overbrace{0,\ldots,0}^{S-1}),\ldots,S_R(\overbrace{n,\ldots,n}^{S}), \quad (33)$$

где $S_R(n,\ldots,n,i)=\overline{0,n}$, – базовая часть в $\mathbf{S}_R$; $S_R(n-i_1,\ldots,n-i_{S-1},0) = S_R^p(\overbrace{n,\ldots,n}^{S-1},0)$, $p=\sum_{v=1}^{S-1} i_v, i_v=\overline{1,n}$ – расширение в $\mathbf{S}_R^e$. Требуемая функция множества определяется элементом вектора (33), номер которого равен сумме индексов искомой функции чувствительности.

Заключение

При автоматизации проектирования систем регулирования, базируясь на изложенных теоретических основах и методиках, можно реализовывать компакты чувствительности для одновременного вычисления векторов, матриц, многомерных кубов функций чувствительности, требуемых для различных алгоритмов автоматической параметрической оптимизации систем регулирования, используя лишь одно уравнение чувствительности для базового подмножества функций чувствительности, которое аналогично по структуре исходному дифференциальному уравнению системы регулирования. Далее, реализуя расширение базового подмножества функций чувствительности, при автоматизированном проектировании систем регулирования просто формализуется процедура одновременного вычисления на ЭВМ всего множества функций чувствительности требуемых для алгоритмов беспоисковой параметрической оптимизации порядков. В результате обеспечивается возможность беспоисковой процедуры параметрической оптимизации лилейных систем регулирования, т.е. вычисления оптимальных параметров настроек их регуляторов в соответствии с заданными критериями качества переходных процессов регулирования.

Список литературы

1. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е.И. Розенвассера и Р.М. Юсупова. – Л.: Энергия, 1971. – 325 с.
2. Широков Л.А. Беспоисковая автоматическая оптимизация одного класса неминимально-фазовых систем // Автоматика и телемеханика. 1969. № 11. С. 67–74.
3. Kokotovic P., Bingulac S., Medanic J. Some approaches to the reduction of control system sensitivity // Proc. of the III-rd Allerton Conf. Illinois, Oct., 1965. P. 212–224.
4. Широков Л.А. Автоматическая оптимизация систем регулирования в условиях ограничений на управляющее воздействие с использованием функций чувствительности // Автоматика и телемеханика. 1974. № 8. С. 78–84.
5. Костюк В.И., Широков Л.А. Автоматическая параметрическая оптимизация систем регулирования. - М.: Энергоиздат, 1981. – 96 с.
6. Широков Л.А. Компактные анализаторы чувствительности высших порядков линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1990. №1. С. 19–28.
7. Широков Л.А., Широкова О.Л. Фильтры чувствительности для градиентных алгоритмов оптимизации в линейных динамических системах // XIV международная конференция «Математика. Экономика. Образование». V международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения»: Тез. докл., – Ростов-на-Дону, 2008. С. 177.