

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТЕЛ С МНОЖИТЕЛЯМИ ЛАГРАНЖА

А.С. Горобцов, С.В. Солоденков



**ГОРОБЦОВ
Александр
Сергеевич**

Профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» Волгоградского технического университета. Специалист в области компьютерного моделирования динамики пространственных механических систем. Автор более 80 научных трудов, в том числе одной монографии.

[1, 2] и зарубежные программы ADAMS и DADS [3, 4]. Несмотря на такое обилие методов и программных разработок задача представления дифференциальных уравнений динамики систем тел и их численного интегрирования не может считаться полностью решенной, поскольку все используемые подходы обладают существенными ограничениями, связанными, прежде всего, с типом структуры системы, а также с представлением нелинейных взаимодействий тел.

Тип структуры механической системы определяется видом графа, вершинами которого являются тела, а ветвями – кинематические связи. Если граф содержит замкнутые циклы, то структура графа относится к общему виду, в

Введение

Компьютерные методы исследования динамики систем многих тел являются интенсивно развивающейся областью моделирования и начинают достаточно широко применяться при проектировании и доводке машин. Эти методы реализуются в виде универсальных программных комплексов, включающих функции формирования дифференциальных уравнений движения, их численного интегрирования, обработки и вывода результатов решения. Примерами таких комплексов служат отечественные программы UM, Эйлер, PRADIS



**СОЛОДЕНКОВ
Сергей
Владимирович**

Доцент кафедры «Теплотехника и гидравлика» Волгоградского технического университета (ВолгГТУ), кандидат технических наук, специалист в области многомерных систем автоматического управления. Автор более 40 научных трудов.

противном случае граф обладает структурой типа «дерево». В механической системе без замкнутых циклов (со структурой типа «дерево») положение каждого тела можно представить в координатах, связанных с другим телом (относительных координатах), и для описания движения достаточно получить систему только дифференциальных уравнений. Наличие замкнутых циклов делает невозможным использование относительных координат тел и приводит к необходимости введения дополнительных уравнений связей, что делает целесообразным представление динамической модели в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений – совокупности дифференциальных уравнений движения отдельных тел в абсолютных координатах и уравнений связей. Устоявшегося названия таких методов в научной литературе нет, примем одно из возможных названий – **метод абсолютных координат**. Указанный метод является наиболее универсальным и в настоящее время интенсивно развивается.

Различия в использовании метода абсолютных координат касаются в основном формы записи уравнений связей. Например, в системе ADAMS уравнения связей выражены через координаты тел и их первые производные (перемещения и скорости), что требует в дальнейшем использовать неявные численные методы интегрирования. В настоящей работе рассматриваются особенности численного интегрирования уравнений движения механических систем, в которых уравнения связей записаны через вторые производные от абсолютных координат (ускорения). Такая запись позволяет использовать явные численные схемы интегрирования.

1. Уравнения движения механической системы в форме уравнений Лагранжа первого рода

В работе [5] представлена форма дифференциальных уравнений движения связанной системы тел, в которой кинематические пары вводятся в виде уравнений связей, содержащие вторые производные абсолютных координат тел, и соответствующих им членов с множителями Лагранжа:

$$\begin{cases} M\ddot{x} - D^T p = f(\dot{x}, x, t), \\ D\dot{x} = h(\dot{x}, x). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь M – матрица инерции; x – вектор обобщенных координат всей системы размерностью n ; D – матрица переменных коэффициентов уравнений связей размерностью $k \times n$ (k – число связей); p – вектор множителей Лагранжа; $f(\dot{x}, x, t)$ – вектор внешних сил, включающий нагрузки, силы от упруго-демпфирующих элементов и гироскопические силы; $h(\dot{x}, x)$ – вектор правых частей уравнений связей; t – символ транспонирования матрицы.

При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1) с использованием явных методов многократно решается система уравнений

$$\begin{pmatrix} M - D^T \\ D \quad 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\dot{x}, x, t) \\ h(\dot{x}, x) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для решения этой системы в каждый момент времени необходимо определять коэффициенты матрицы D и векторы $f(\dot{x}, x, t)$, $h(\dot{x}, x)$, от скорости вычисления которых в значительной степени зависит эффективность алгоритма. В современных программных комплексах скорость вычисления этих членов уравнений повышается за счет использования формирования выражений в символьном виде и автоматической генерации оптимального по быстродействию программного кода.

Однако непосредственное использование уравнений (2) ограничено системами малой размерности по причине неустойчивости процедуры численного интегрирования. Из-за особенностей матрицы коэффициентов алгебраической системы (2) (матрица не обладает свойством положительной определенности, а только неотрицательности) погрешность интегрирования будет возрастать пропорционально степени числа уравнений связей, что делает невозможным прямое использование уравнений (2) при нахождении вектора \dot{x} без применения методов стабилизации.

2. Методы стабилизации численного решения

Для устранения неустойчивости численного интегрирования уравнений (1) применяется

способ введения в правые части первого уравнения системы стабилизирующих сил [6], пропорциональных некоторым функциям от невязок уравнений связей, а именно:

консервативных сил, пропорциональных погрешности по перемещениям Δ_L в связях (невязки по перемещениям):

$$f'_c = \alpha_c D^T \Delta_L, \quad (3)$$

диссипативных сил, пропорциональных погрешности по скоростям $\dot{\Delta}_L$ в связях (невязки по скоростям):

$$f'_k = \alpha_k D^T \dot{\Delta}_L, \quad (4)$$

инерционных сил, пропорциональных погрешности по ускорениям $\ddot{\Delta}_L$ в связях (невязки по ускорениям):

$$f'_m = \alpha_m D^T \ddot{\Delta}_L, \quad (5)$$

где $\alpha_c, \alpha_k, \alpha_m$ – стабилизирующие коэффициенты.

Векторы погрешности по скоростям и ускорениям определяются следующим образом:

$$\dot{\Delta}_L = D\dot{x}, \quad (6)$$

$$\ddot{\Delta}_L = D\ddot{x} - h(\dot{x}, x). \quad (7)$$

Погрешность по перемещениям в связях не выражается непосредственно через коэффициенты уравнений связей. Компоненты вектора погрешности находятся отдельно для каждого типа кинематической пары. Так, для сферического шарнира в системе двух твердых тел, вектор погрешности по перемещениям Δ_{LB} в характерной точке B равен:

$$\Delta_{LB} = \tilde{A}^T A_1^T (d_{1B} - d_{2B}). \quad (8)$$

Здесь \tilde{A} – матрица ориентации системы координат шарнира; A_1 – матрица поворота первого тела; d_{1B} – абсолютные координаты точки B , выраженные через поступательные и угловые координаты тела 1; d_{2B} – абсолютные координаты точки B , выраженные через поступательные и угловые координаты тела 2.

Векторы координат точки B в случае двух твердых тел можно получить из соотношений:

$$d_{1B} = s_1 + A_1 r_1,$$

$$d_{2B} = s_2 + A_2 r_2,$$

где s_1, s_2 – векторы координаты центров масс тел; r_1, r_2 – радиусы-векторы точки B в системах координат тел; A_2 – матрица поворота второго тела.

С учетом стабилизирующих сил система уравнений (2) приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} (M - \alpha_m D^T D) - D^T \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\dot{x}, x, t) + f'_c + f'_k + \alpha_m D^T h(\dot{x}, x) \\ h(\dot{x}, x) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

При $\alpha_m = 0$ и $\alpha_m \rightarrow \infty, \alpha_k \rightarrow \infty$ решение первого уравнения системы (9) стремится к решению всей системы, однако при этом возрастают «жесткость» дифференциальных уравнений и, следовательно, вычислительные затраты, связанные с необходимостью уменьшать шаг интегрирования. Использование условия $\alpha_m \neq 0$, как отмечается в работе [6], позволяет уменьшить жесткость уравнений, но увеличивает количество ненулевых недиагональных коэффициентов матрицы, а значит, возрастает время решения системы линейных уравнений.

Решение линейной системы уравнений (9) на каждом шаге интегрирования дает значения ускорений, необходимых для процедуры численного интегрирования, и значения множителей Лагранжа, являющихся, по физическому смыслу, реакциями в кинематических парах. Назовем определение ускорений непосредственно из системы уравнений (9) **прямым методом**. Можно определять реакции в связях из уравнений (2), а ускорения находить из первого уравнения системы (9):

$$\ddot{x} = (M - \alpha_m D^T D) f(\dot{x}, x, t) + f'_c + f'_k + \alpha_m D^T h(\dot{x}, x) + D^T p. \quad (10)$$

При $\alpha_m = 0$ матрица коэффициентов инерции является диагональной, и решение уравнения (10) тривиально. Назовем такую схему определения ускорений **улучшенной**. Уравнения (9-10) при $\alpha_m = 0$ соответствует случаю стабилизации через позиционные и диссипативные силы.

Регуляризацию уравнений (2) можно проводить и не с помощью позиционных и диссипативных сил, а введением корректирующих ускорений в правые части уравнений связей:

$$\begin{pmatrix} M - D^T \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\dot{x}, x, t) \\ h(\dot{x}, x) + h_c(\Delta_L, \dot{\Delta}_L) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $h_c(\Delta_L, \dot{\Delta}_L)$ – вектор корректирующих ускорений связей, зависящих от погрешностей по перемещениям и скоростям в шарнирах. Заметим, что корректирующие ускорения связей отличаются от невязок по ускорениям (см. уравнение 7) как по величине, так и по положению в уравнениях движения.

Для вычисления компонентов вектора h_c можно использовать следующее выражение:

$$h_{ci} = -\beta_c \Delta_{Li} - \beta_k \dot{\Delta}_{Li}. \quad (12)$$

Здесь β_c – стабилизирующий коэффициент по отклонениям связей; β_k – стабилизирующий коэффициент по скоростям отклонений связей. Коэффициенты β_c , β_k и α_c , α_k соответственно идентичны, однако, разными обозначениями подчеркивается, что выражения, в которые они входят, используются в разных частях уравнений движения. Знак минус в выражении (12) означает, что корректирующие ускорения направлены в сторону уменьшения погрешности связей по отклонениям и скоростям отклонений. Назовем такую схему стабилизации решения **корректировкой по ускорениям**.

3. Анализ точности и устойчивости численных методов

В практических расчетах обычно используются модели, обладающие сотнями степеней свободы и кинематических связей. Возможности аналитического исследования основных характеристик численных методов, таких как устойчивость, точность, быстродействие, ограничены системами относительно небольшой размерности. Поэтому анализ параметров предлагаемых методов целесообразно выполнить численным способом на системах уравнений высокого порядка – порядка 10^2 размерности.

В качестве примера рассмотрим модель энергетической установки (рис. 1) [7].

Расчетная модель энергетической установки включает модели 12-цилиндрового дизеля и генератора. Размерность модели – 210 степеней свободы тел и 193 уравнения связей – $n + k = 403$. Структура модели содержит замкнутые контуры. Типичный замкнутый контур в модели дизеля – «коленвал-шатун-поршень-остов-коленвал».

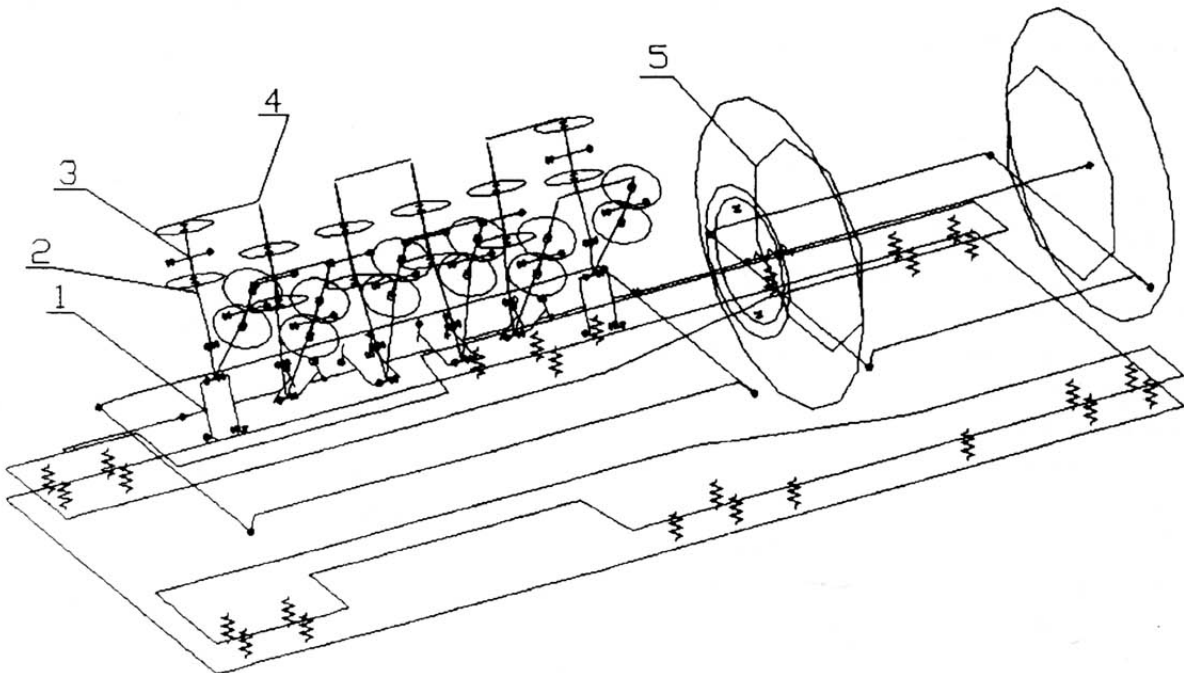


Рис. 1. Расчетная модель дизель-генератора ($n + k = 403$):

1 – «дизель – коленвал»; 2 – поршень с пальцем;

3 – «12 поршневых групп – шатун»; 4 – остов; 5 – генератор

Отметим, что в настоящей работе исследуются только показатели устойчивости и точности решения уравнений динамики и не рассматриваются динамические процессы происходящие в энергетической установке.

При численном интегрировании уравнений движения использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Этот метод был выбран на основе анализа различных явных схем интегрирования, который показал, что для систем дифференциальных уравнений с размерностью более 50, описывающих рассматриваемый класс механических систем, все методы дают близкие результаты по временным затратам. При этом методы низкого порядка (например, метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера – методы первого и второго порядков) для достижения сопоставимой с методами более высоких порядков точности требуют уменьшения шага интегрирования. Методы же высокого порядка – четвертого и выше обеспечивают точность решения практически сразу за границей шага, определяемой из условий устойчивости.

Показателем точности численного интегрирования была выбрана максимальная величина невязки δ вектора погрешности Δ_L в уравнениях связи. Компоненты вектора Δ_L рассчитываются по выражению (8). Такой показатель используется, например, в алгоритмах программного комплекса ADAMS [3]. Указанный выбор связан с тем, что для систем дифференциальных и алгебраических уравнений общепринятые оценки погрешности методов численного интегрирования дают необходимые, но недостаточные условия точности, поскольку могут выполняться при очевидном расхождении решения.

Так, на рис. 2 показаны зависимости от времени невязки (кривая 2) в кинематической паре и абсолютной погрешности (кривая 1) численного интегрирования, вычисленной как разность невязок в кинематической паре для двух значений шага интегрирования.

Из представленных результатов следует, что абсолютная погрешность решения на несколько порядков меньше, чем невязка, кото-

рую и целесообразно брать в качестве показателя точности. Зависимости, изображенные на рис. 2, соответствуют непосредственному интегрированию уравнений (2) без использования схем стабилизации. Возрастающий характер кривой 2 свидетельствует о том, что в этом случае численное интегрирование происходит с потерей устойчивости, и, следовательно, необходимо применение той или иной процедуры стабилизации.

Рассмотрим стабилизацию с помощью корректирующих сил (см. формулу 4).

Как известно из теории численных методов [8], для обеспечения затухания ошибок округления необходимо, чтобы исходная динамическая система была устойчивой, т.е. собственные значения линеаризованных уравнений были отрицательными или имели отрицательную действительную часть. В работе [9] показано, что использование улучшенной схемы интегрирования приводит к отрицательным собственным значениям линеаризованной системы, и, следовательно, обеспечивает ее устойчивое интегрирование, что характеризуется ограниченной величиной погрешности (рис. 3, кривая 2. При использовании прямого метода погрешность нарастает – кривая 1).

На рис. 4 показано влияние коэффициентов стабилизации α_c и α_k по силам на характер изменения погрешности. Видно, что увеличение указанных коэффициентов приводит к пропорциональному уменьшению погрешности в связях.

Для анализа влияния стабилизирующих сил на абсолютную точность решения целесообразно сравнить параметры временных зависимостей перемещений точек моделей. Для рассматриваемого класса задач зависимость перемещений точек тел от времени носит колебательный характер, поэтому в качестве обобщенного параметра временных зависимостей целесообразно использовать средние квадратические отклонения (СКО) координат тел. Расчетные результаты показали незначительное влияние консервативных и диссипативных стабилизирующих сил на абсолютную точность

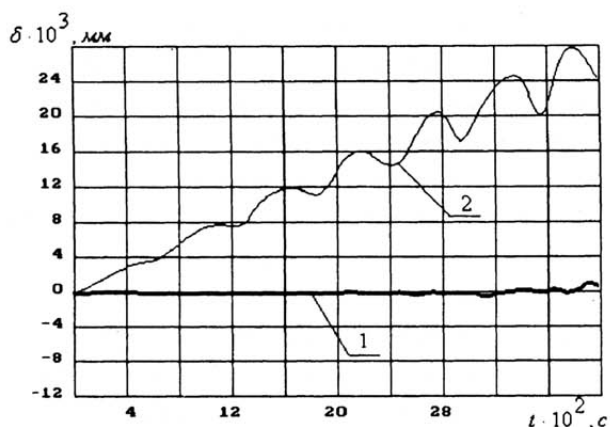


Рис. 2. Погрешности при численном интегрировании уравнений движения модели дизель-генератора ($n + k = 403$):
1 – абсолютная ошибка интегрирования;
2 – невязка в кинематической паре

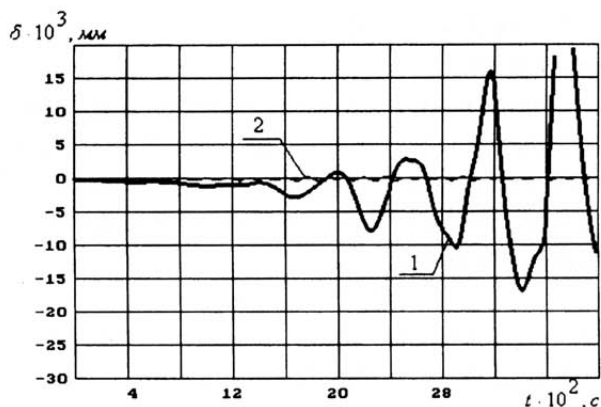


Рис. 3. Зависимость невязки от схемы интегрирования при $n + k = 403$:
1 – прямой метод; 2 – улучшенный метод со стабилизацией по силам

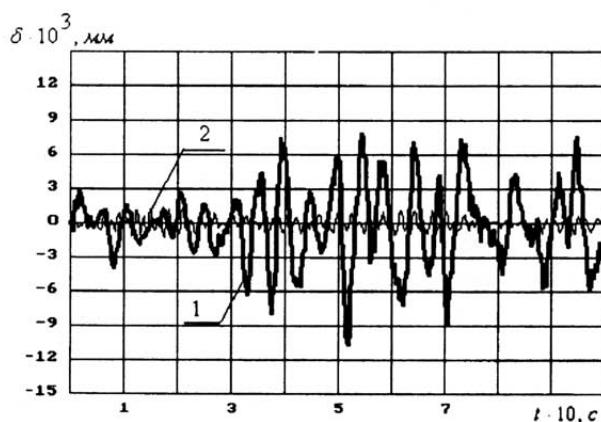


Рис. 4. Влияние коэффициентов стабилизации по силам на погрешности в связях при $n + k = 403$: 1 – при $\alpha_c = 10^6$, $\alpha_k = 10^3$; 2 – $\alpha_c = 10^7$, $\alpha_k = 10^3$

решения. Так, для системы малой размерности ($n + k = 28$), максимальные относительные изменения СКО координат тел при варьировании стабилизирующих сил достигали значения $1,6 \cdot 10^{-3}$, а для систем большой размерности ($n + k = 403$) – 10^{-5} .

На основе проведенного анализа можно сделать вывод, что погрешности в связях уменьшаются с увеличением коэффициентов консервативных и диссипативных стабилизирующих сил, при этом сами стабилизирующие силы слабо влияют на абсолютную точность решения. Это позволяет определять максимальные

значения стабилизирующих коэффициентов α_c и α_k из условий устойчивости численного решения. Оптимальным был бы выбор значений отдельных коэффициентов для каждого уравнения связи из условия получения равных парциальных частот системы уравнений (9).

Рассмотрим теперь характеристики стабилизации решения с помощью коррекции по ускорениям (см. уравнения 11-12). Анализ проводится так же на примере модели энергетической установки.

На рис. 5 показаны временные зависимости погрешности уравнения связи, соответствующие

ющей кинематической паре «шатун-коленвал» для разных значений коэффициентов стабилизации β_c, β_k .

Здесь и далее считается, что $\beta_k = \sqrt{\beta_c}$. Максимальное значение коэффициента β_c определяется из условия устойчивости процедуры интегрирования, которое можно записать следующим образом:

$$\beta_{c \max} = d_{\min}/h_2,$$

где d_{\min} – минимальное значение коэффициента в матрице связей D ; h – шаг интегрирования.

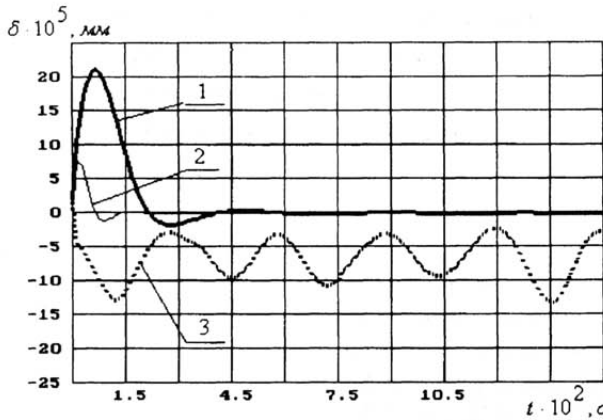


Рис. 5. Влияние коэффициентов стабилизации по ускорениям β_c на невязку в связи ($n + k = 403, \beta_k = \sqrt{\beta_c}$): 1 – при $\beta_c = 5 \cdot 10^2$; 2 – при $\beta_c = 5 \cdot 10^3$; 3 – при $\beta_c = 5 \cdot 10^8$

Как следует из рис. 5, введение стабилизации коррекцией по ускорениям приводит к быстрому затуханию возмущений невязки в связях даже при относительно небольших значениях β_c (кривые 1 и 2). Для больших значений коэффициента β_c , приближающихся к $\beta_{c \max}$ – границе устойчивости метода интегрирования, возникают автоколебания невязки со смещением (кривая 3).

Из проведенного анализа следует, что стабилизация коррекцией по ускорениям эффективнее, чем стабилизация по силам. Интенсивное затухание погрешностей при стабилизации коррекцией по ускорениям происходит при значительно меньших (на 2-3 порядка) значениях коэффициентов стабилизации по сравнению со стабилизацией по силам.

Тестовые расчеты показали, что для коррекции по ускорениям не играет роли схема определения ускорений – прямая или улучшенная. Обоснование этого свойства дано в работе [9] на примере системы с одной степенью свободы и одним уравнением связи.

Выбор значений стабилизирующих коэффициентов для метода коррекции по ускорениям можно производить из условий ограничения максимальной собственной частоты линеаризованной системы из условий устойчивости метода численного интегрирования. Рациональным было бы введение отдельных коэффициентов β_c, β_k для каждой связи из условия равенства собственных частот. Точное решение такой задачи затруднительно. Приближенное решение – значение β_c для каждого уравнения связи – может быть получено, например, как произведение некоторого номинального коэффициента стабилизации β_c на максимальный коэффициент при вторых производных в рассматриваемом уравнении связи.

Расчеты показали меньшее влияние стабилизирующих ускорений на точность решения по сравнению со стабилизирующими силами. Так, для системы малой размерности ($n + k = 28$), максимальное относительное изменение СКО координат системы от варьирования стабилизирующих сил достигало значения $4,5 \cdot 10^{-4}$, а для систем большой размерности – ($n + k = 403$) – 10^{-6} . Влияние на точность решения резко снижалось с увеличением значений коэффициентов стабилизации. Одновременное использование обоих способов стабилизации, как показали численные эксперименты, нецелесообразно, поскольку увеличивает невязки в кинематических парах.

Заключение

Рассмотренные процедуры регуляризации численного интегрирования уравнений динамики систем тел с множителями Лагранжа позволяют получать устойчивое численное решение с заданной точностью и приемлемы для моделей произвольной структуры и большой раз-

мерности. Такие свойства делают их удобными для применения в компьютерных методах расчетов динамики систем многих тел. Предложенный алгоритм реализован в программном комплексе ФРУНД [5] моделирования динамики систем твердых и упругих тел. С использованием этого программного комплекса решен ряд задач динамики конструкции автомобиля [10].

Литература

1. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. Универсальный механизм – пакет программ для моделирования динамики систем многих твердых тел. – М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 77, 1993. – 12 с.
2. Курдюк С.А., Шмелев Е.Н. Особенности формирования математических моделей технических объектов средствами программного комплекса PRADIS // Информационные технологии. 1996. № 3. С.14-19.
3. Mechanical Dynamics, Inc., ADAMS / Vehicle, User's Guide (Version 8.0), November 1988. 223 p.
4. Computer Aided Design Software, Inc. DADS, User's Guide, 1992. 241 p.
5. Горобцов А.С. Программный комплекс расчета динамики и кинематики машин как систем твердых и упругих тел // Инженерный журнал – Справочник. 2004. № 9. С. 40-43.
6. Bayo E., Serna M.A. Penalty Formulations for the Dynamic Analysis of Elastic Mechanisms. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. SEPTEMBER 1989, Vol. 111, p 321-329.
7. Горобцов А.С., Карцов С.К. Динамическая модель энергетической установки для решения задач виброзащиты // Проблемы динамики и прочности исполнительных механизмов и машин: Матер. науч. конф., Астрахань, 1-5 окт. 2002 // Астрахан. Гос. тех. ун-т и др. – Астрахань.: Изд-во АГТУ. 2002. С. 261-262.
8. Бенинсон З.М., Елистратов М.Р., Ильин А.К. Моделирование и оптимизация на ЭВМ радиоэлектронных устройств. – М.: Радио и связь, 1981. – 272 с.
9. Горобцов А.С. Численное интегрирование уравнений движения систем тел произвольной структуры // В кн. Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении. Матер. между. конф. – Саратов.: ИПТМУ РАН. 2002. С. 16-20.
10. Горобцов А.С., Карцов С.К., Кушвид Р.П. Развитие теории устойчивости и управляемости автомобиля на базе пространственных компьютерных моделей. – М.: Машиностроение, 2004. – 136 с.