

УДК 62-752.8

РАЦИОНАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ ПОД РАМОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МАШИНЫ*

Н.И. Авдеев, А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко

Рассмотрен принцип определения расположения виброизоляторов под рамой протяженной технологической машины с целью предотвращения установочного наклона.

Ключевые слова: виброизоляция, виброизолятор, оптимальное расположение, установочный перекося.

Введение

При установке технологической машины на группу однотипных виброизоляторов (упругих опор) в случае, когда суммарный вектор сил тяжести не проходит через центр суммарной жесткости опор, возникает отклонение технологической оси машины от горизонтали (так называемый установочный наклон). Для технологических машин, представляющих собой совокупность агрегатов с общей технологической осью, даже относительно небольшой наклон рамы машины может привести к значительным перегрузкам (реакциям) отдельных опор, что существенно снижает эффективность и долговечность системы виброизоляции [1 – 3]. Таким образом, при разработке системы виброизоляции возникает задача рационального размещения опор под рамой машины, при котором исключается перегрузка опор.

Расчетная схема

Для пояснения сути проблемы и формулировки постановки задачи рассмотрим упрощенную схему машины, установленной на упругих опорах (рис. 1). Примем, что рама с установленными на ней агрегатами представляет собой единое абсолютно твердое тело с общей массой m_Σ и центром масс, расположенным в точке A на расстоянии l_A от левого края рамы. Длина рамы известна и равна L .

Введем систему ортогональных осей $Oxyz$, начало отсчета в которой совмещено с левым краем рамы, причем ось Oz вертикальна и со-

впадает с направлением вектора силы тяжести, а оси Ox и Oy лежат на нижней плоскости рамы (см. рис. 1). Будем считать, что вся конструкция симметрична относительно вертикальной плоскости zOx .

В направлении оси Ox с каждой стороны рамы симметрично относительно плоскости zOx (см. рис. 1) установлено по n упругих опор с одинаковыми коэффициентами линейной жесткости c_z в направлении оси Oz . Число опор, как правило, выбирают исходя из ограничения на номинально допустимую нагрузку на одну опору $[N_{\text{ном}}]$:

$$n \geq \frac{m_\Sigma g}{2[N_{\text{ном}}]}, \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения.

Множитель $1/2$ введен для учета двурядной установки опор с каждой стороны рамы вдоль оси Ox .

Пусть опоры установлены на некотором расстоянии x_i ($i = \overline{1, n}$) от начала координат, причем координаты крайних опор можно задать предварительно исходя из конструктивных соображений. Без нарушения общности примем $x_1 = 0$ и $x_n = L$.

Установочный наклон определяется углом α наклона рамы к горизонтальной оси, причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_n - z_1}{L}, \quad (2)$$

где z_1 и z_n – статические осадки первой и последней опор.

* Работа выполнена при поддержке проекта «Разработка и производство отечественных насосных агрегатов нового класса для транспорта нефти (импортозамещающие технологии)» при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Постановление Правительства РФ № 218).

Осадки z_1 и z_n зависят от расположения опор (координат x_i) и определяются из уравнений равновесия всех сил F_z в проекции на ось Oz и моментов M_y относительно оси Oy (см. рис. 1)

$$\begin{cases} F_z = \sum_{i=1}^n z_i c_z - \frac{m_\Sigma g}{2} = 0; \\ M_y = \sum_{i=1}^n z_i c_z x_i - \frac{m_\Sigma g l_A}{2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Осадку i -й опоры вычисляли по формуле

$$z_i = \frac{z_n - z_1}{L} x_i + z_1. \quad (4)$$

Для обобщения дальнейших выкладок будем использовать безразмерные координаты $\tilde{x}_i = x_i/L$ ($\tilde{x}_1 = 0$; $\tilde{x}_n = 1$) и безразмерные осадки $\tilde{z}_i = z_i/L$.

Тогда из совместного решения системы уравнений (3) с учетом формулы (4) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= \frac{D \left(\beta \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - 1) - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i (\tilde{x}_i - 1)}; \\ \tilde{z}_n &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i} \left(D + \tilde{z}_1 \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - 1) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $D = \frac{m_\Sigma g}{2c_z L}$, $\beta = \frac{l_A}{L}$ ($0 < \beta < 1$).

Выражение (2) для угла наклона рамы с учетом уравнений (5) запишем в виде

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i} \left[1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - 1) - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \right) \left(\beta \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - 1) - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i (\tilde{x}_i - 1)} \right]. \quad (6)$$

В данной работе рассмотрены особенности возможных вариантов расстановки опор.

Равномерная расстановка опор

Если опоры распределены равномерно по длине рамы, то расстояние между соседними опорами постоянно:

$$\tilde{a} = \frac{a}{L} = \frac{1}{n-1}, \quad (7)$$

а координата i -й опоры будет иметь вид

$$\tilde{x}_i = \tilde{a}(i-1) = \frac{i-1}{n-1} \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Подставив уравнение (8) в уравнения (5) и (6), получим выражения для определения осадок z_1 и z_n крайних опор и наклона рамы:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= 2D \frac{3\beta(1-n) + (2n-1)}{n(n+1)}; \\ \tilde{z}_n &= 2D \frac{3\beta(n-1) + (2-n)}{n(n+1)}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= 6D \frac{(2\beta-1)(n-1)}{n(n+1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 2 в виде диаграмм представлены зна-

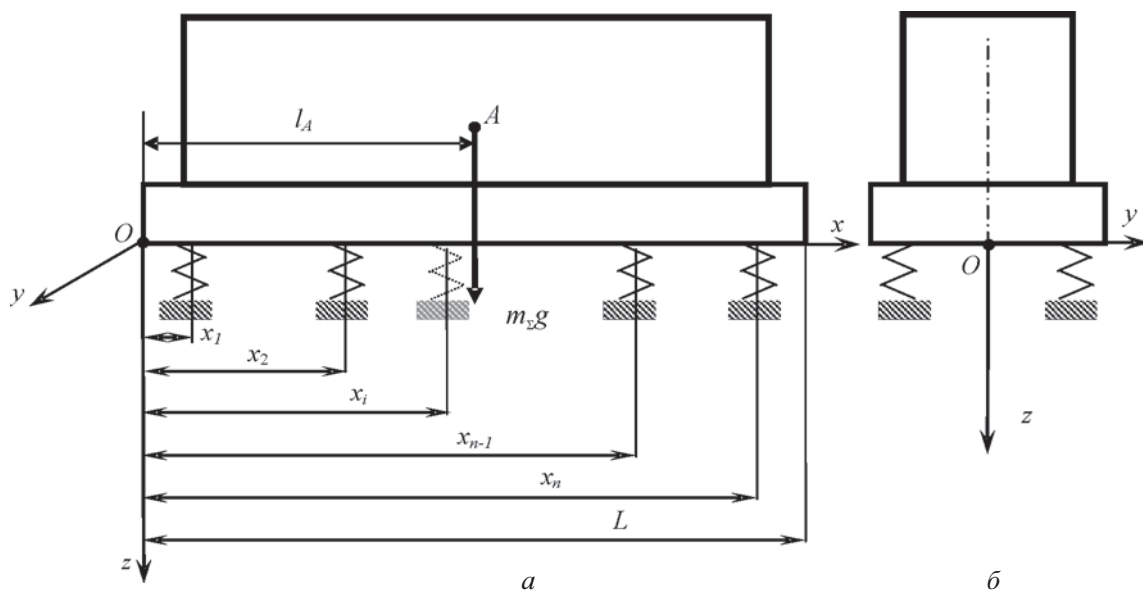


Рис. 1. Расчетная схема машины, установленной на виброизоляторах

чения осадок (положительные – соответствуют сжатию) первой $\tilde{z}_1$ и последней $\tilde{z}_n$ опор в зависимости от числа опор n для пяти возможных вариантов расположения центра масс машины ($\beta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$).

Отметим, что диаграммы для $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_n$ удовлетворяют равенству $\tilde{z}_n(\beta) = \tilde{z}_1(1-\beta)$, поэтому можно ограничиться анализом только одной из диаграмм (это подтверждается равенством осадок $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_n$, не зависящих от числа опор при симметричном расположении центра масс системы, когда $\beta = 0,5$). Из диаграммы для $\tilde{z}_1$ следует, что при равномерной расстановке трех опор и более при $\beta > 0,75$ осадка $\tilde{z}_1$ может принимать отрицательные значения, т.е. первая опора будет растягиваться (заметим, что растяжение виброизолирующих опор недопустимо). Кроме того, при $\beta \neq 0,5$ вследствие наклона рамы осадки (реакции) крайних опор могут превысить предельно допустимые значения для выбранного типоразмера опоры. В таких случаях необходимо увеличить число опор или использовать другой типоразмер опор. При этом необходимо заново провести поверочный расчет.

Расстановка опор, исключающая наклон рамы

Условием отсутствия установочного наклона является равенство статических осадок каждой из опор, что требует соответствующей их расстановки. Примем, что статическая осадка каждой опоры $\tilde{z}_{i\text{ст}} = \tilde{z}_{\text{ст}}$ ($i=1, n$). Тогда уравнения равновесия (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{F}_z = \tilde{z}_{\text{ст}} n - D = 0; \\ \tilde{M}_y = \tilde{z}_{\text{ст}} \left(1 + \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{x}_i \right) - \beta D = 0 \end{cases} \quad (10)$$

(здесь и далее учитывается, что $\tilde{x}_1 = 0$ и $\tilde{x}_n = 1$).

Первое уравнение системы (10) позволяет определить статическую осадку $\tilde{z}_{\text{ст}} = D/n$,

а второе – представляет собой условие размещения опор, при котором исключается наклон рамы:

$$\sum_{i=2}^{n-1} \tilde{x}_i = n\beta - 1. \quad (11)$$

Условие (11) при $n > 3$ допускает бесконечное число вариантов расстановки опор. Для получения однозначных решений в дополнение к условию (11) введем величину среднего квадратичного отклонения расстояния между опорами от постоянного значения $\tilde{a}$

$$f(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} [(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) - \tilde{a}]^2, \quad (12)$$

определяющую близость расстояний между опорами, удовлетворяющих условию (11). Расстояние между опорами $\tilde{a} = 1/(n-1)$ соответствует их равномерной расстановке. Данная величина накладывает ограничения на длину пролета между двумя соседними опорами, что имеет значение для прочности рамы при учете ее конечной жесткости.

При заданных координатах крайних опор ($\tilde{x}_1 = 0$ и $\tilde{x}_n = 1$) величина (12) зависит от $n-2$ независимых переменных. Минимизируя величину (12), с учетом условия (11) получим следующую переопределенную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n-1}$:

$$\min f(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n-1}) = \begin{cases} \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{x}_i = n\beta - 1; \\ \frac{\partial f(\dots)}{\partial \tilde{x}_2} = 4\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 = 0; \\ \frac{\partial f(\dots)}{\partial \tilde{x}_3} = -2\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 = 0; \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\dots)}{\partial \tilde{x}_{n-1}} = -2\tilde{x}_{n-2} + 4\tilde{x}_{n-1} = 2, \end{cases} \quad (13)$$

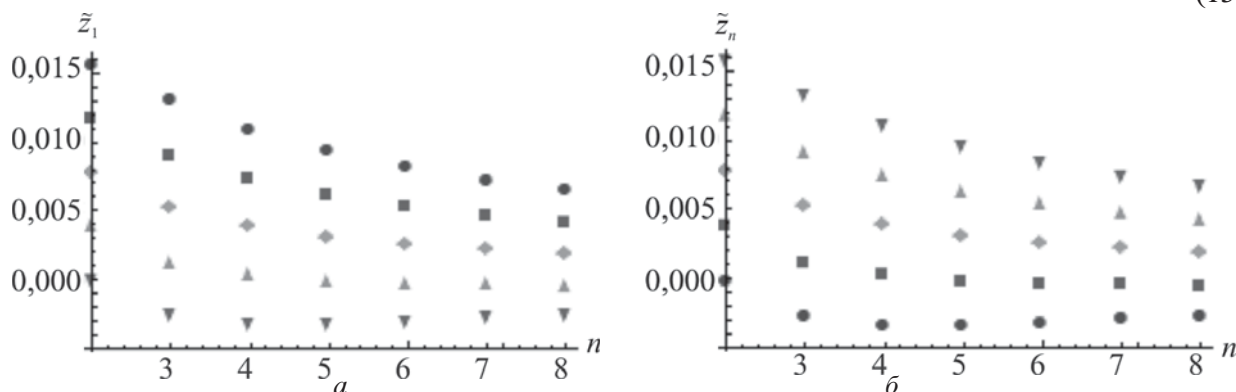


Рис. 2. Осадки первой $\tilde{z}_1$ (а) и последней $\tilde{z}_n$ (б) опор в зависимости от числа опор n

или в матричной форме

$$[A] \times \{X\} = \{Y\}, \quad (14)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(n-1) \times (n-2)$$

$$\{X\} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \{Y\} = \begin{pmatrix} n\beta - 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(n-2) \times 1 \quad (n-1) \times 1$$

Решение переопределенных систем уравнений, как правило, сводится к поиску наилучшей аппроксимации, например по методу наименьших квадратов. В соответствии с методом псевдообращения матрицы Мура-Пенроуза [4] решение уравнения (14) сводится к уравнению вида

$$\{X\} = (A^T A)^{-1} A^T \{Y\} \quad (15)$$

где A^T – транспонированная матрица A .

На рис. 3 представлены результаты расчета координат $\tilde{x}_i$ в случае семи опор в зависимости от величины β . Из рис. 3 видно, что для обеспечения равной осадки всех опор при $\beta = 0,675$ координата шестой опоры выходит за правый край рамы (при фиксированном положении крайних опор), причем с увеличением величины β увеличивается и число правых опор, выходящих за правый край рамы. Аналогично при $\beta = 0,325$ за левый край рамы выходит координата второй опоры и по мере уменьшения величины β число левых опор, выходящих за левый край рамы, увеличивается. Таким образом, при заданном расположении крайних опор для исключения наклона рамы суммарный центр масс машины должен находиться в пределах $0,325 < \beta < 0,675$. В противном случае габариты рамы следует увеличить.

Расстановка опор, исключая их перегрузку

Если горизонтальная установка рамы невозможна (при условии $0 < \tilde{x}_i < 1$), то расстановку опор целесообразно проводить исходя из ограничения на реакции опор, которые не должны

превышать предельно допустимую нагрузку $|c_z z_i| < [N_{\text{ном}}]$. С этой целью введем параметр, характеризующий относительную (безразмерную) несущую способность i -й опоры:

$$r_i = \frac{[N_{\text{ном}}] - |c_z z_i|}{[N_{\text{ном}}]} \quad (16)$$

Отметим, что для нормальной длительной работы необходимо, чтобы для всех опор соблюдалось неравенство $r_i \geq \mu$, где μ – регламентируемый запас несущей способности ($0 < \mu < 1$).

Таким образом, задача о рациональном размещении опор сводится к нахождению минимума величины (12) при соблюдении ограничений на несущую способность опор $0 < \mu \leq r_i$ и установочные координаты опор $0 < x_i < 1$ при $i = 2, (n-1)$. Учитывая линейное распределение осадок опор (4), ограничения n несущей способности опор можно свести всего к двум, которые определяются осадками крайних опор (5):

$$r_1 = 1 - \frac{c_z LD}{[N_{\text{ном}}]} \frac{\beta \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - 1) - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i (x_i - 1)} \geq \mu;$$

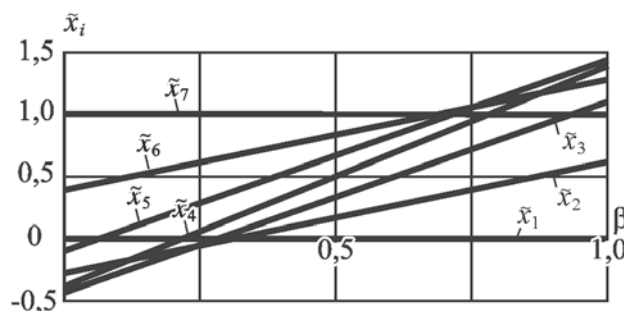


Рис. 3. Зависимость установочных координат опор $\tilde{x}_i$ при $n=7$ от относительного положения центра масс β в случае расстановки опор, исключая наклон рамы

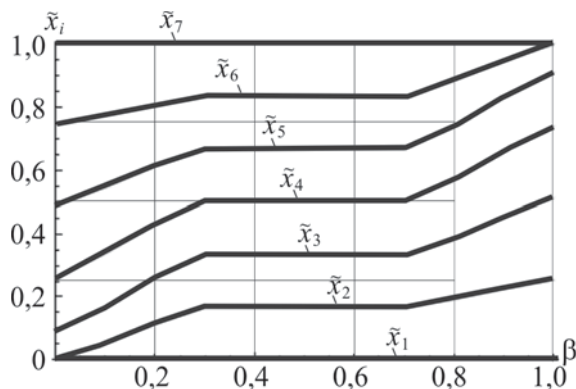


Рис. 4. Зависимость установочных координат опор $\tilde{x}_i$ от величины β в случае расстановки опор, исключая их перегрузку

$$r_n = 1 - \frac{c_z L}{[N_{\text{ном}}] \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i} \left(D + \tilde{z}_1 \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - 1) \right) \geq \mu.$$

Минимизация величины (12) с учетом сформулированных ограничений проводится численно, например в математическом пакете [5].

На рис. 4 приведена зависимость установочных координат $\tilde{x}_i$ ($i = \overline{1,7}$) опор от величины β при $[N_{\text{ном}}] = 5,5$ кН, $m_{\Sigma} = 3850$ кг, $\mu = 0$.

Как следует из анализа полученных результатов, в интервале изменения $0,3 \leq \beta \leq 0,7$ достигается практически равномерное распределение опор. Интересно отметить, что этот интервал незначительно отличается от интервала, соответствующего расстановке опор, обеспечивающей их равную осадку ($0,325 < \beta < 0,675$). При $\beta \geq 0,3$ по мере удаления от первой опоры расстояние между двумя соседними опорами (длина пролета) монотонно увеличивается, а при $\beta \geq 0,7$ наоборот, уменьшается.

Заключение

Выполненный анализ показывает, что для протяженных технологических машин со смещенным центром масс равномерная установка упругих опор может привести к их существенной перегрузке даже при незначительном установочном наклоне технологической оси машины. Показано, что размещение опор, при котором отсутствует наклон рамы, возможно при определенных значениях центра масс

машины. Установлены предельные значения центра масс машины, при которых сохраняется несущая способность опор.

Предложена методика расчета координат упругих опор, при которых обеспечивается регламентируемый запас несущей способности опор, гарантирующий эффективность и долговечность работы системы виброизоляции машины.

Список литературы

1. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
2. Проников А.С., Борисов Е.И., Бушуев В.В. и др. Проектирование металлорежущих станков и станочных систем. Т. 2. Ч. 2. Расчет и конструирование узлов и элементов станков. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995. – 320 с.
3. Вибрации в технике / под общей ред. К.С. Колесникова: Справочник в 6 т. 2-е изд. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. М.: Машиностроение, 1995. – 456 с.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. – 400 с.
5. Wolfram Mathematica 7.0 for Students. – Режим доступа: <http://www.wolfram.com/solutions/education/students/> (дата обращения 05.10.2011).

Материал поступил в редакцию 24.10.2011

АВДЕЕВ Никита Иванович

E-mail: hitnik123@gmail.com

Студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов – динамика технологических систем и процессов, вибрационная техника и технология.

ГУСКОВ Александр Михайлович

E-mail: goukov_am@mail.ru
Тел.: +7 (499) 263-64-87

Доктор технических наук профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов – прикладная механика, динамика технологических систем, теория устойчивости движения и нелинейной механики. Автор более 100 научных работ.

ПАНОВКО Григорий Яковлевич

E-mail: gpanovko@yandex.ru
Тел.: +7 (499) 135-30-47

Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией вибромеханики Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Сфера научных интересов – прикладная механика, динамика технологических систем и процессов, вибрационная техника и технология. Автор более 100 научных работ.