УДК 534.1

ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН ИСТОЧНИКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ДЕФОРМИРУЕМОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГО-ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ*

В.И. Ерофеев, Д.А. Колесов, Е. Е. Лисенкова

Рассматривается самосогласованная динамическая задача, включающая одномерную деформируемую направляющую (струна), упруго-инерционное основание (система осцилляторов) и движущуюся осциллирующую нагрузку. Показано, что в такой системе даже при низких «докритических» скоростях движущаяся нагрузка вызывает генерацию упругих волн. Определены частоты и волновые числа возбуждаемых волн.

Ключевые слова: *деформируемая направляющая, движущийся источник, упруго-инерционное основание, генерация волн.*

Введение

Некоторые элементы машиностроительных конструкций, в частности, находящиеся под действием движущихся нагрузок (путевая структура, контактный провод), можно рассматривать в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Для расчета конструкций, лежащих на деформированном основании, в основном используются три модели основания: винклерова модель, модель упругого полупространства, комбинированная модель упругого основания.

В работе [1] отмечается, что наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание, поскольку результаты расчета конструкций с использованием этой модели наиболее близко соответствуют опытным данным.

При исследовании движения нагрузок вдоль одномерных упругих систем основание задается линейно-упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

Весницкий А.И. [2] предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера за счет учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Целью данной работы является изучение генерации волн осциллирующим источником, движущимся по одномерной направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании.

Постановка задачи

Рассмотрим движение нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании. Пусть движущаяся по неизвестному закону $x = l(t)$ нагрузка представляет собой массу m, на которую действует поперечная гармоническая сила $P(t)$ с частотой Ω (рис. 1).

* Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-08-00888 и № 13-08-97103-р_поволжье).

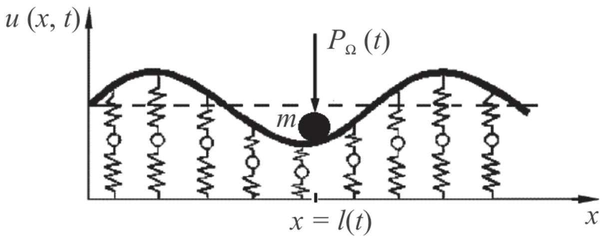

Рис. 1. Движение нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании

Предположим, что динамическое поведение одномерной упругой системы и движущейся по ней нагрузки взаимообусловлены, а именно: характер колебаний струны зависит от закона движения нагрузки, а движение последней происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны одномерной системы, включая силы давления волн.

Уравнения согласованного динамического поведения направляющей и движущейся нагрузки [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\gamma}{\rho_0 S}(u_1 - u_2) = 0; \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dfrac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \dfrac{\gamma}{\rho_g} u_1; \end{cases} \quad (1)$$

$$u_1(l-0,t) = u_1(l+0,t) = u_0(t); \quad (2)$$

$$m\ddot{u}_0 = \rho_0 S(c^2 + \dot{l}^2)\left[u_{1x}\right] + P_\Omega(t); \quad (3)$$

$$\left[u_{1x}\right] = 0; \quad (4)$$

$$m\ddot{l} = -\left[T - \dot{l}p\right]; \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{ \begin{aligned} &\rho_0 S\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \rho_g\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \\ &+N\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 - \gamma\left[u_2^2 + (u_1 - u_2)^2\right] \end{aligned} \right\};$$

$$p = -\rho_0 S \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho_g \frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

где u_1 и u_2 – поперечные отклонения струны и средней линии упруго-инерционного основания от равновесного положения; $u_0(t)$ – поперечное смещение массы m; ρ_0, N и S – объемная плотность, натяжение и площадь поперечного сечения струны; γ и ρ_g – жесткость и погонная масса упруго-инерционного основания; $c = \sqrt{N/(\rho_0 S)}$ – скорость, с которой распространялись бы поперечные волны в струне при отсутствии упруго-инерционного основания; p – плотность волнового импульса; T – плотность его потока; квадратные скобки в (3)–(5) означают разность стоящих в них величин справа ($x = l(t) + 0$) и слева ($x = l(t) - 0$) от движущегося объекта.

Первое из уравнений системы (1) описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, а второе – вибрации массива осцилляторов, взаимодействующих с колебаниями струны. Выражение (2) является условием непрерывности распределенной системы, а (3)–(5) выражают баланс обобщенных сил при $x = l(t)$.

Кинематика волновых процессов

Будем далее считать, что закон движения нагрузки является равномерным $x = Vt$ ($V = \mathrm{const}$). Проведем анализ качественно различных случаев возбуждения волн движущимся источником. Задача заключается в определении частот, волновых чисел, скоростей и направлений распространения возбуждаемых волн.

Считая процесс возбуждения колебаний струны установившимся [2, 4], решение задачи (1)–(5) слева и справа от нагрузки будем искать в виде бегущих гармонических волн. Тогда частоты $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$ и волновые числа $\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$ искомых волн в безразмерных переменных определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^2\tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2(\alpha^2\tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2) + 2\tilde{k}^2 + 1 = 0; \\ \tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$, $\tilde{V} = V/c$, $\tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}.$

Первое из системы уравнений (6) является дисперсионным уравнением, а второе, называемое кинематическим инвариантом, определяет зависимость частот возбуждаемых волн от частоты источника $\tilde{\Omega}$ и скорости $\tilde{V}$ его движения. Если движущаяся нагрузка представляет собой постоянную силу, то $\tilde{\Omega} = 0$, и кинематический инвариант запишется в виде $\tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = 0$. На плоскости $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ кинематический инвариант представляет собой прямую, проходящую через точку (0, $\tilde{\Omega}$), с угловым коэффициентом, равным скорости движения нагрузки. Точки пересечения этой прямой и дисперсионной кривой соответствуют действительным частотам и волновым числам возбуждаемых волн.

Физически реализуемыми будут лишь те волны, которые удовлетворяют условию ограниченности прогибов струны на бесконечности и условию излучения Мандельштама [5] (волны должны отводить энергию от движущейся нагрузки). Система уравнений (6) совместно с последними двумя условиями позволяет единообразно находить значения частот, волновых чисел, возбуждаемых движущейся нагрузкой волн, анализировать их поведение от скорости движения и тем самым определять возможные кинематические эффекты: эффект Вавилова-Черенкова, тормозного излучения, эффект Доплера и др., обусловленные движением границ.

Критические скорости V_j^* (j = 1–3), при переходе через которые меняется число возбуждаемых в струне волн, определяются из условия вырождения корней системы уравнений (6).

Это уравнение на плоскости параметров $(\tilde\Omega, \tilde V)$ задает области с различным числом возбуждаемых волн (рис. 2).

Если на струну, лежащую на упруго-инерционном основании, действует равномерно движущаяся нагрузка, величина которой постоянна, то, определяя из системы уравнений (6) при $\tilde\Omega = 0$ частоты и волновые числа и отбирая только физически реализуемые решения, получим, что в зависимости от скорости движения нагрузки возможны два качественно различных режима волнообразования. Критическая скорость, разделяющая эти случаи равна c, т.е. совпадает со скоростью распространения волн в струне без учета упруго-инерционного основания.

У неподвижной нагрузки поле поперечных смещений локализовано около источника, т.е. уменьшается по мере удаления от него, а $\tilde k_{1,2} = \pm i/\sqrt{2}$.

При движении нагрузки со скоростью $0 < \tilde V < 1$ слева от нее $(x < \tilde V t)$

$$\tilde k_1 = i\left(\alpha^2\tilde V^2 - 2\left(1-\tilde V^2\right) + \sqrt{\alpha^4\tilde V^4 + 4\left(1-\tilde V^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(2\alpha^2\tilde V^2\left(1-\tilde V^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\tilde k_{3,4} = \pm\left(2\left(1-\tilde V^2\right) - \alpha^2\tilde V^2 + \sqrt{\alpha^4\tilde V^4 + 4\left(1-\tilde V^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(2\alpha^2\tilde V^2\left(1-\tilde V^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

а справа при $x > \tilde V t$

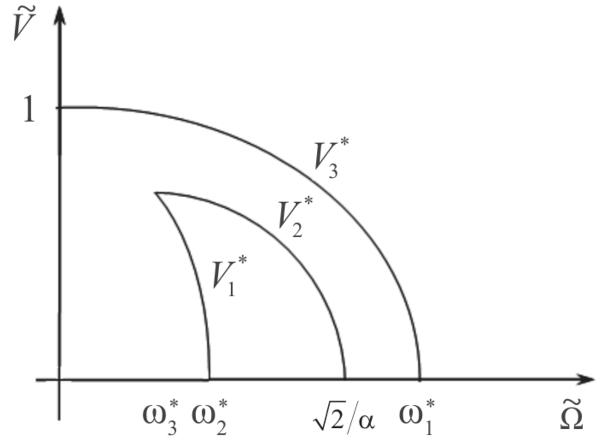

Рис. 2. Области с различным числом возбуждаемых волн

$$\tilde k_2 = -i\left(\alpha^2\tilde V^2 - 2\left(1-\tilde V^2\right) + \sqrt{\alpha^4\tilde V^4 + 4\left(1-\tilde V^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(2\alpha^2\tilde V^2\left(1-\tilde V^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\tilde\omega_{1-4} = \tilde k_{1-4}\tilde V.$$

Отсюда следует, что движение источника нулевой частоты приводит к возникновению, наряду с собственным полем, двух бегущих вслед волн.

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $\tilde V > 1$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, бегущие ему вслед, волновые числа и частоты которых определяются формулами:

$$\tilde k_{1-4} = \pm\left(\alpha^2\tilde V^2 + 2\left(\tilde V^2 - 1\right) \pm \sqrt{\alpha^4\tilde V + 4\left(\tilde V^2-1\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(2\alpha^2\tilde V^2\left(\tilde V^2-1\right)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\tilde\omega_{1-4} = \tilde k_{1-4}\tilde V.$$

Справа от нагрузки при $x > \tilde V t$ направляющая остается невозмущенной.

Наличие инерционности в основании струны приводит к тому, что даже при «докритических» скоростях движения нагрузки $(0 < \tilde V < 1)$ возникают бегущие волны. Как видно из последовательности построения решения всей задачи о вынужденных колебаниях, для кинематики волн не важен вид движущейся нагрузки. Важными характеристиками являются лишь частота и скорость ее движения.

Это выгодно разделяет задачу кинематики – определение частот и волновых чисел и задачу динамики – определение амплитуд колебаний и сил в движущемся контакте.

Следует отметить, что решение задачи кинематики определяет лишь необходимые условия излучения волн, но не достаточные. Может оказаться, что амплитуды некоторых прогнозируемых волн будут равны нулю.

Заключение

Таким образом, показано, что в системе «движущийся источник – деформируемая направляющая – упруго-инерционное основание», волны могут генерироваться даже при низких «докритических» скоростях движения нагрузки. Найдены аналитические выражения для частот и волновых чисел возбуждаемых волн.

Список литературы

1. *Клепиков С.Н.* Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: Изд-во «Будивэльник», 1967. – 185 с.
2. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
3. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. 2013. № 6 (70). С. 18–29.
4. *Весницкий А.И.* Избранные труды по механике. – Н. Новгород: ИД «Наш дом», 2010. – 248 с.
5. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. – М.: Наука, 1972. – 438 с.

Материал поступил в редакцию 07.03.14

ЕРОФЕЕВ Владимир Иванович

E-mail: **erof.vi@yandex.ru**
Тел.: **(831) 432-05-76**

Доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Института проблем машиностроения Российской академии наук, профессор кафедры теории упругости и пластичности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Сфера научных интересов: волновая динамика и виброзащита машин. Автор 12 монографий, более 350 статей, 4 изобретений.

КОЛЕСОВ Даниил Александрович

E-mail: **alandess@yandex.ru**
Тел.: **(910) 101-00-63**

Аспирант Института проблем машиностроения Российской академии наук. Сфера научных интересов: математическое моделирование динамических процессов. Автор 5 статей.

ЛИСЕНКОВА Елена Евгеньевна

E-mail: **EELissen@yandex.ru**
Тел.: **(831) 465-78-89**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и системного анализа Нижегородского института управления – Филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации. Сфера научных интересов: математическое моделирование динамических процессов. Автор более 50 статей.