УДК 539.374

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛА ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

О.Г. Киквидзе

КИКВИДЗЕ
Омари Георгиевич

Профессор, доктор технических наук. Сотрудник Кутаисского государственного технического университета им. Н. Мусхелишвили. Специалист в области механики деформируемого твердого тела; прикладной теории пластичности и ползучести. Автор более 40 научных трудов.

Введение

В ряде случаев термомеханическое нагружение твердых тел вызывает деформирование, которое характеризуется необратимым изменением объема. Необратимое изменение объема наблюдается при сварке, термообработке металлических материалов, сопровождающиеся фазовыми превращениями и т. д. Например, при мартенситных превращениях в сплавах на основе железа, объемные изменения существенны (около 4%), что вызывает пластическую деформацию в окружающей исходной фазе. Многократное термоциклирование урановых образцов приводит к необратимому их формоизменению [1]. Помимо урана и его сплавов формоизменение достоверно зафиксировано и на таких металлах, как α–железо, титан, медь, алюминий, никель, цинк. В образцах, материал которых имеет текстуру, необратимые тепловые формоизменения зафиксированы даже при отсутствии внешнего напряжения. При кручении трубчатых образцов из материалов с памятью формы, в интервале температур прямых мартенситных превращений, с изменением температуры накапливаются неупругие фазовые деформации сдвига.

1. Условие устойчивости материала и основное неравенство

Феноменологическая теория деформирования материалов, как известно, строится на основе экспериментальных данных испытания образцов независимо от того, определяющие уравнения получаются от общих постулатов или от обобщения простейших соотношений. Рассмотрим теорию необратимого деформирования материалов при термомеханическом нагружении на основе двух серий экспериментальных данных: растяжения образцов при постоянной температуре и переменном напряжении и деформирования образцов при постоянном напряжении и переменной температуре.

На каждом шаге напряжения и температуры состояние образца равновесное и соответственно процесс деформации равновесный. Рассматривая равновесный необратимый процесс деформации, достаточно указать поведение материала при нагружении и разгрузке. Очевидно, что при термомеханическом нагружении этот режим относится как к механическому, так и к тепловому факторам. Деформации считаются малыми.

На основе указанных экспериментальных данных, используя известный метод объединения двух неравенств разных размерностей, применяемый в термодинамике необратимых процессов [2], в статье [3] для замкнутого пути термомеханического нагружения «нагружение – разгрузка – нагрев – охлаждение» сформулировано следующее условие устойчивости материала:

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma^{o}_{ij})\, d\varepsilon_{ij} + a_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^{o}_{ij})\, dT \geq 0, \qquad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты истинного напряженного состояния; σ^{o}_{ij} – компоненты некоторого допустимого напряженного состояния; ε_{ij} – компоненты истинного деформированного состояния, соответствующие истинному напряженному состоянию; ε^{o}_{ij} – компоненты допустимого деформированного состояния, соответствующие допустимому напряженному состоянию; a_{ij} – тензор, компоненты которого имеют размерность Па/°С, введен для выравнивания размерностей слагаемых; Т – температура.

Истинное напряженное состояние удовлетворяет условию

$$f(\sigma_{ij}, T, Q) = 0,$$

представляющее уравнение поверхности нагружения, а допустимое напряженное состояние – неравенству

$$f(\sigma^{o}_{ij}, T, Q) = 0,$$

где Q – некоторый структурный параметр.

Интегрирование в выражении (1) ведется в пространстве «температура-напряжение» по пути, который начинается от точки с координатами (σ^{o}_{ij}, T) и возвращается в эту же точку. Значение интеграла (1) для обратимых процессов на замкнутом пути термомеханического нагружения равно нулю.

Для компонентов полной деформации примем принцип аддитивности

$$\varepsilon^{o}_{ij} = \varepsilon^{e}_{ij} + \varepsilon^{T}_{ij} + \varepsilon^{H}_{ij}, \quad d\varepsilon^{o}_{ij} = d\varepsilon^{e}_{ij} + d\varepsilon^{T}_{ij} + d\varepsilon^{H}_{ij}, \qquad (2)$$

где ε^{e}_{ij}; ε^{T}_{ij}; ε^{H}_{ij} – компоненты упругих, температурных и необратимых деформаций соответственно.

Чтобы дать интерпретацию ограничений, налагаемых на материал условием (1), рассмотрим элемент упрочняющейся среды (рисунок).

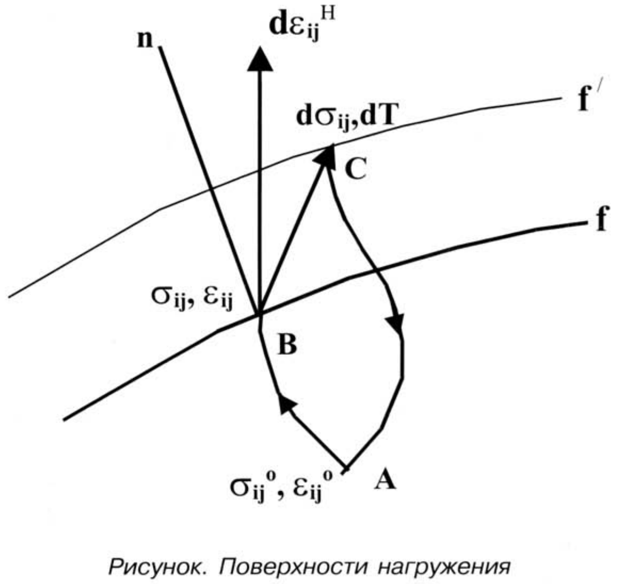

Рисунок. Поверхности нагружения

Пусть f – текущее положение поверхности нагружения, а f′ – новое положение поверхности нагружения, бесконечно близкое к текущему положению. Для некоторого пути нагружения ***A*** → ***B*** → ***C*** начальной точке соответствует исходное напряженно-деформированное состояние σ_{ij}^{o}, ε_{ij}^{o}. Из точки B до точки C производится бесконечно малое термомеханическое догружение, вызывающее приращение упругих, температурных и необратимых деформаций. Вернемся в точку A каким-нибудь путем CA. За весь цикл выполняется условие устойчивости материала (1).

Поскольку упругие и температурные деформации являются обратимыми, для замкнутого пути ABCA в выражении (1) остаются только необратимые деформации и, следовательно, можно записать:

$$\int (\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{o})\,d\varepsilon_{ij}^{H}+a_{ij}(\varepsilon_{ij}^{H}-\varepsilon_{ij}^{oH})\,dT>0 \qquad (3)$$

Поскольку необратимая деформация происходит только на бесконечно малом участке BC, последнее неравенство принимает вид:

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{o})\,d\varepsilon_{ij}^{H}+a_{ij}(\varepsilon_{ij}^{H}-\varepsilon_{ij}^{oH})\,dT>0.$$

Из этого выражения следует основное неравенство

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{H}+a_{ij}\varepsilon_{ij}^{H}dT>\sigma_{ij}^{o}d\varepsilon_{ij}^{H}+a_{ij}\varepsilon_{ij}^{o}dT, \qquad (4)$$

необходимое для установления определяющих уравнений.

Когда исходное напряженно-деформированное состояние будет истинным состоянием, отвечающим точке B на поверхности нагружения f, то для цикла BCB можно записать

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{H}+a_{ij}\varepsilon_{ij}^{H}dT>0.$$

2. Определяющие уравнения

Экстремальные принципы для получения определяющих уравнений широко использованы в работе Г. Циглера [4]. Согласно основному неравенству (4) функция приращения

$$d\Omega=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{H}+a_{ij}\varepsilon_{ij}^{H}dT,$$

при заданных приращениях необратимых деформации и температуры имеет максимум на действительных напряжениях σ_{ij} и необратимых деформациях ε_{ij}^{H}.

Функция $d\Omega$, в конечном счете, является функцией компонентов напряжений и температуры, которые при необратимом деформировании связаны условием (2).

В уравнении (2) в качестве структурного параметра Q, например, при деформировании материалов с памятью формы в интервале температур прямых мартенситных превращений, следует взять долю мартенситной фазы [3], а при деформировании металлов за пределом упругости за структурный параметр обычно принимается мера упрочнения (параметр Удквиста или работа при пластических деформациях).

Воспользуемся методом Лагранжа для нахождения экстремума функции ($dL = d\Omega - \lambda df$) нескольких переменных, связанных между собой дополнительным условием. Тогда получим выражение для приращений необратимых деформаций

$$d\varepsilon_{ij}^{H}=-\frac{\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^{H})}{\partial\sigma_{ij}}dT+d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}, \qquad (5)$$

где $d\lambda$ – скалярный неопределенный множитель Лагранжа.

Введем обозначение

$$de_{ij}^{H}=d\varepsilon_{ij}^{H}+\frac{\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^{H})}{\partial\sigma_{ij}}dT. \qquad (6)$$

Подставляя соотношение (6) в выражение для эквивалентной величины приращений деформации [5]

$$\overline{d\varepsilon_{ij}^{H}}=\sqrt{\frac{2}{3}de_{ij}^{H}de_{ij}^{H}},$$

определим множитель Лагранжа:

$$d\lambda=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\overline{d\varepsilon_{ij}^{H}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}}. \quad (7)$$

При соответствующем выборе функции f уравнение (5) с учетом соотношения (7) связывает приращения компонентов необратимой деформации, приращение температуры и компоненты напряжений.

Уравнение (5) показывает, что геометрически вектор приращения необратимых деформаций не направлен по нормали поверхности нагружения. Принятие того или иного закона нагружения также вносит изменение в развитие необратимых деформаций. Вопрос о направлении вектора необратимой деформации не всегда находит свое решение. Это отчасти связано с тем, что для практических расчетов важнейшее значение имеют определяющие уравнения, наиболее полно описывающие свойства материала.

Формулы (5) и (7) можно использовать для вычисления приращений деформаций, связанных с фазовыми превращениями при деформировании материалов с памятью формы в интервале температур прямых мартенситных превращений [3], при соответствующем выборе поверхности нагружения f.

При рассмотрении пластического деформирования изотропного материала наиболее приемлемым и простым является использование теории течения с законом изотропного упрочнения [5]:

$$f = 3S_{ij}S_{ij} / 2 - [\Phi(\chi,T)]^2 = 0,$$

где S_{ij} – компоненты девиатора напряжений; χ – мера упрочнения.

Используя формулу (7), выразим множитель Лагранжа:

$$d\lambda=\frac{\overline{d\varepsilon_e^p}}{(2\sigma_e)},\ \sigma_e=\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}\,,$$

где $\overline{d\varepsilon_e^p}$ – эквивалентное приращение пластических деформаций; σ_e – эквивалентное напряжение.

Тогда, согласно формуле (5), получим приращение компонентов пластических деформаций изотропного материала:

$$d\varepsilon_{ij}^p = -\frac{\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^p)}{\partial\sigma_{ij}}dT + \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_e^p}}{\sigma_e}S_{ij}. \quad (8)$$

Считаем, что компоненты тензора a_{ij} не зависят от напряжений, а являются параметрами материала. Для обычных металлов тензор a_{ij} представляет шаровой тензор, компоненты которого обозначим через a_o.

Используя приведенные выше формулы, приращение относительного изменения объема определяем так:

$$d\varepsilon_o=\frac{d\sigma_o}{3K}+\alpha dT-a_o\frac{\partial\varepsilon_o^p}{\partial\sigma_{ij}}dT, \quad (9)$$

где ε_o – средняя деформация; σ_o – среднее нормальное напряжение; K – объемный модуль упругости; α – коэффициент линейного температурного расширения; $\varepsilon_o^p=\varepsilon_{ij}^p/3$ – средняя пластическая деформация.
(Считается, что параметры, характеризующие термоупругие свойства материала, не зависят от температуры.)

Для изотропного материала приращения компонентов упругих деформаций связаны с приращениями компонентов напряжения законом Гука

$$d\varepsilon_{ij}^e=\frac{1}{2G}(d\sigma_{ij}-\delta_{ij}\frac{3\mu}{1+\mu}d\sigma_o),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; μ – коэффициент Пуассона; G – модуль упругости второго рода.

Между величинами G, K и μ существует следующая связь:

$$G=\frac{1-2\mu}{2(1+\mu)}K.$$

Приращения температурных деформаций определяются как

$$d\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha dT \delta_{ij}.$$

Представим условие (2) следующим образом:

$$f(\sigma_e, T, Q) = \psi(\sigma_{ij}, T) - H(Q) = 0.$$

При развивающейся необратимой деформации условия нагружения и разгрузки можно записать аналогично неизотермической теории пластичности [6]:

разгрузка

$$f=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT < 0,\ dH=0;$$

нейтральный процесс

$$f=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT = 0,\ dH=0;$$

нагружение

$$f=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT > 0,\ dH\neq0.$$

Таким образом, полученные определяющие уравнения дают возможность учитывать в расчетах необратимое изменение объема, неупругие деформации сдвига, имеющие место при охлаждении материала с памятью формы в интервале температур прямых мартенситных превращений. Если пренебречь пластической объемной деформацией и принять компоненты тензора $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, то получаются определяющие уравнения термопластичности, приведенные в работе [7].

Решение нелинейных краевых задач с использованием равенств (5) и (7) осуществляется шаговым методом по параметру нагружения. Вычисление производной деформации по напряжениям проводится на каждом шаге с помощью разностных схем на основе решения предыдущего шага. Зная приращения компонентов деформаций, на каждом шаге параметра нагружения определяются компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Литература

1. Давиденков Н.Н., Лихачев В.А. Необратимое формоизменение металлов при циклическом тепловом воздействии. – М.; Л.: Машгиз, 1962. – 224 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
3. Махутов Н.А., Киквидзе О. Г. Условие устойчивости материалов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1996. № 4. С. 53-56.
4. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. – М.: Мир, 1966. – 134 с.
5. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
6. Ранецкий Б., Савчук А. Температурные эффекты в пластичности. Часть 1. Связанная теория // В кн.: Механика. Проблемы теории пластичности и ползучести. – М.: Мир, 1979. С. 204-220.
7. Биргер И. А. Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 193-196.