УДК 624.07:534.1

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Л. Н. Крайнова, А. И. Муницын

В статье приводится решение задачи о вынужденных изгибных колебаниях трубопровода с учетом внутреннего давления теплоносителя. Рассматриваемый элемент трубопровода жестко защемлен с двух сторон и имеет малую начальную кривизну. Собственные частоты изгибных колебаний трубопровода в двух взаимно перпендикулярных плоскостях имеют близкие значения, что приводит к существованию плоских и пространственных форм колебаний в окрестности главного резонанса.

Ключевые слова: *трубопровод, изгибные колебания, нелинейность, пространственные формы колебаний, взаимодействие форм.*

Введение

Давление жидкости значительно влияет на динамические характеристики элементов гибких трубопроводов [1]. Зависимость собственных частот изгибных колебаний трубы от внутреннего давления рассмотрена в работе [2], там же исследовались колебания в плоскости под действием бегущих волн в жидкости. Учет пространственного движения приводит к дополнительным эффектам. При исследованиях колебаний стержня с неподвижными опорами [3, 4] обнаружена нелинейная взаимосвязь колебаний в двух ортогональных направлениях, что свидетельствует о существовании как плоских форм движения, так и пространственных. Для вынужденных колебаний в окрестности главного резонанса существует диапазон частот, при которых возможны как устойчивые колебания в одной плоскости с внешней нагрузкой, так и пространственные. В последнем случае результирующее движение поперечных сечений стержня происходит по эллипсу.

Постановка задачи

Рассмотрим участок трубопровода с двумя жесткими заделками, полагая, что деформация этого элемента происходит независимо от остальной части трубопровода. Выберем прямоугольную систему координат так, что ось x проходит через центры тяжести сечений трубы в опорах, которым соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Участок трубопровода имеет начальный прогиб $w_0(x)$ в плоскости xz. Обозначим через v, w перемещения точек оси трубопровода вдоль осей y и z (рис. 1).

На стержень действуют внешние гармонические нагрузки во взаимно перпендикулярных направлениях $q_v(x)\cos(\theta t + \psi_1)$ и $q_w(x)\cos(\theta t + \psi_2)$,

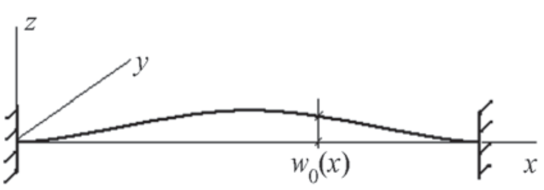

Рис. 1. Расчетная схема

диссипацию учитываем по моделям внутреннего и внешнего трения. Избыточное давление рабочей жидкости p создает распределенную нагрузку, зависящую от кривизны упругой линии [1].

Уравнения изгибных колебаний трубопровода имеют вид

$$m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+EJ\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\tau EJ\frac{\partial^5 v}{\partial x^4\partial t}+\sigma m\frac{\partial v}{\partial t}-EF\varepsilon_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+$$

$$+\pi r^2 p\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=q_v(x)\cos(\theta t+\psi_1);$$

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\tau EJ\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+\sigma m\frac{\partial w}{\partial t}-EF\varepsilon_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+$$

$$+\pi r^2 p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)=q_w(x)\cos(\theta t+\psi_2).$$

Здесь m – погонная масса трубы с учетом рабочей жидкости; E – модуль упругости материала; J – осевой момент инерции сечения; F – площадь поперечного сечения трубы; r – внутренний радиус трубы; τ, σ – коэффициенты внутреннего и внешнего трения; ε_0 – продольная деформация оси. Для неподвижных в продольном направлении опор продольная деформация оси определяется по формуле

$$\varepsilon_0=\frac{1}{2L}\int_0^L\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]dx.$$

Система дифференциальных уравнений должна быть дополнена граничными условиями. В частности, для элемента трубы с жесткими заделками имеем граничные условия $v=w=v'=w'=0$ при $x=0$ и $x=L$.

Наличие внутреннего давления и начального прогиба трубы значительно влияет на спектр собственных частот. Даже в области малых значений давления теплоносителя собственные частоты трубы в двух ортогональных направлениях различны. В области главного резонанса в таких системах возможны как плоские, так и пространственные формы колебаний.

Введем безразмерные перемещения $w_*=w/L$, $v_*=v/L$, координату $x_*=x/L$ и время $t_*=\omega_1 t$, где $\omega_1=(\alpha/L)^2[EJ_z/m]^{1/2}$ – собственная частота колебаний стержня в плоскости xy без давления; α – корень уравнения частот. Для граничных условий типа шарнир–шарнир $\alpha=\pi$, заделка–заделка $\alpha=4{,}730$, и т.д. Также введем обозначения для безразмерных параметров: диссипации $\tau_*=\tau\,\omega_1$, $\sigma_*=\sigma/\omega_1$; распределенной нагрузки $q_v^*=q_v L^3/EJ$, $q_w^*=q_w L^3/EJ$; нелинейности $\gamma_0=FL^2/(4J)$ и давления $\beta=pL^2r^2/(2\pi EJ)$[1]. В безразмерных переменных уравнения пространственных изгибных колебаний трубы имеют вид[2]:

$$\alpha^4\ddot v+v^{IV}+2\alpha^2\beta v''+\tau\dot v^{IV}+\alpha^4\sigma\dot v-4\gamma_0\varepsilon_0 v''=$$

$$=q_v(x)\cos(\theta t+\psi_1);$$

$$\alpha^4\ddot w+w^{IV}+2\alpha^2\beta(w''+w_0'')+\tau\dot w^{IV}+\alpha^4\sigma\dot w-$$

$$-4\gamma_0\varepsilon_0 w''=q_w(x)\cos(\theta t+\psi_2);$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}\int_0^1\left(v'^2+w'^2+2w'w_0'\right)dx, \qquad (1)$$

Ограничимся случаем одномодового приближения и представим решение в виде:

$$v(x,t)=\varphi_1(t)V(x),\quad w(x,t)=\varphi_2(t)V(x); \qquad (2)$$

$$V(x)=V_0\left[\left(\sin\alpha-\operatorname{sh}\alpha\right)\left(\operatorname{ch}\alpha x-\cos\alpha x\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\operatorname{ch}\alpha-\cos\alpha\right)\left(\operatorname{sh}\alpha x-\sin\alpha x\right)\right],$$

где φ_1, φ_2 – прогибы средней точки участка трубопровода; в плоскостях xy и xz соответственно; $V(x)$ – первая форма колебаний стержня с двумя заделками; α = 4,730; V_0 = 0,0109.

Форма колебаний нормирована из условия, что прогиб в средней точке трубы равен единице. Полагаем начальный прогиб трубопровода совпадающим с первой формой колебаний

$$w_0(x,t)=\varphi_0(t)V(x),$$

где φ_0 – начальный прогиб в середине рассматриваемого участка в плоскости xz.

Подстановка (2) в систему (1) и применение процедуры Бубнова – Галеркина приводит к системе уравнений с двумя степенями свободы:

$$\ddot\varphi_1+\eta\dot\varphi_1+(1-\beta)\varphi_1+\gamma\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2+2\varphi_0\varphi_2\right)\varphi_1=$$

$$=f_1\cos(\theta t+\psi_1);$$

$$\ddot\varphi_2+\eta\dot\varphi_2+(1-\beta)\varphi_2+\gamma\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2+2\varphi_0\varphi_2\right)\varphi_2=$$

$$=\beta\varphi_0+f_2\cos(\theta t+\psi_2), \qquad (3)$$

где $\gamma=0{,}240\gamma_0$; f_1, f_2 – амплитуды гармонического возбуждения, соответствующие первой форме колебаний; $\eta=\tau+\sigma$ – параметр диссипации.

Системой уравнений (3) описываются вынужденные колебания трубопровода под действием гармонического возбуждения в одномодовом приближении.

[1] Далее звездочки для безразмерных переменных опускаем.

[2] Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени, штрихами – по безразмерной координате.

Свободные колебания

При отсутствии диссипации и внешнего возбуждения, то есть при значениях $f_1 = f_2 = 0$ и $\eta = 0$ система уравнений (3) описывает свободные колебания элемента трубопровода. Решение будем искать в следующем виде:

$$\varphi_1(t) = A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t,$$

$$\varphi_2(t) = C_2 + A_2 \cos\omega t. \qquad (4)$$

где коэффициенты A_1, B_1, A_2, C_2 являются функциями частоты ω.

В результате подстановки решения (4) в систему уравнений (3) и применения метода Бубнова – Галеркина, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left[1-\beta-\omega^2+\gamma\left(\frac{3}{4}A_1^2+\frac{3}{4}A_2^2+\frac{3}{4}B_1^2+C_2^2+2\varphi_0 C_2\right)\right]A_1=0;$$

$$\left[1-\beta-\omega^2+\gamma\left(\frac{3}{4}A_1^2+\frac{1}{4}A_2^2+\frac{3}{4}B_1^2+C_2^2+2\varphi_0 C_2\right)\right]B_1=0;$$

$$\left[1-\beta-\omega^2+\gamma\left(\frac{3}{4}A_1^2+\frac{3}{4}A_2^2+\frac{1}{4}B_1^2+3C_2^2+4\varphi_0 C_2\right)\right]A_2=0;$$

$$\left[1-\beta+\gamma\left(\frac{1}{2}A_1^2+\frac{3}{2}A_2^2+\frac{1}{2}B_1^2+C_2^2+2\varphi_0 C_2\right)\right]C_2-$$

$$-\beta\varphi_0+\gamma\varphi_0 A_2^2=0, \qquad (5)$$

где ω - безразмерная частота, зависящая от давления, начального прогиба и т.д.

Можно выделить три характерных решения системы уравнений (5). Первое решение определяет зависимость амплитуды колебаний в плоскости начального прогиба трубопровода от частоты колебаний:

$$A_1 = B_1 = 0;$$

$$\omega^2=\frac{1}{2}\frac{3C_2+4\varphi_0-\beta(3C_2+\varphi_0)+\gamma(15C_2^3+30\varphi_0 C_2^2+16\varphi_0^2 C_2)}{\gamma(3C_2+2\varphi_0)};$$

$$A_2^2=-2\frac{C_2-\beta(C_2+\varphi_0)+\gamma(C_2^3+2\varphi_0 C_2^2)}{\gamma(3C_2+2\varphi_0)}. \qquad (6)$$

Второе решение определяет зависимость амплитуды колебаний в плоскости, ортогональной плоскости начального прогиба трубопровода, от частоты:

$$A_2 = B_1 = 0;$$

$$\omega^2=-\frac{1}{2}\frac{C_2+4\varphi_0-\beta(C_2-3\varphi_0)+\gamma(C_2^3+2\varphi_0 C_2^2)}{C_2};$$

$$A_1^2=-2\frac{C_2-\beta(C_2+\varphi_0)+\gamma(C_2^3+2\varphi_0 C_2^2)}{\gamma C_2}. \qquad (7)$$

Существует третье решение, соответствующее пространственным формам колебаний участка трубопровода, при которых точки оси движутся по окружности:

$$A_1=0,\ \omega^2=\frac{C_2+\varphi_0-\beta C_2+\gamma(5C_2^3+10\varphi_0 C_2^2+5\varphi_0^2 C_2)}{\gamma(2C_2+\varphi_0)};$$

$$A_2^2=-\frac{C_2-\beta(C_2+\varphi_0)+\gamma(3C_2^3+4\varphi_0 C_2^2)}{\gamma(2C_2+\varphi_0)};$$

$$B_1^2=-\frac{C_2-\beta(C_2+\varphi_0)-\gamma(5C_2^3+8\varphi_0 C_2^2+4\varphi_0^2 C_2)}{\gamma(2C_2+\varphi_0)}. \qquad (8)$$

Частный случай зависимостей коэффициентов разложения (4) от частоты колебаний, соответствующие трем решениям (6)–(8), представлен на рис. 2. Рассматривался участок трубопровода длиной 1 м, его внутренний и внешний диаметр равны 14 мм и 16 мм, начальный прогиб – 1 мм. Этим размерам соответствует безразмерный параметр нелинейности $\gamma = 2200$, начальный безразмерный прогиб $\varphi_0 = 10^{-3}$. Для безразмерного параметра давления принимались два значения $\beta = 0,6$ и $\beta = 0,5$.

Увеличение постоянного давления в жидкости приводит к уменьшению значений собственных частот колебаний трубопровода [1, 2]. Частоты колебаний в плоскости начального прогиба и в ортогональной ей плоскости стано-

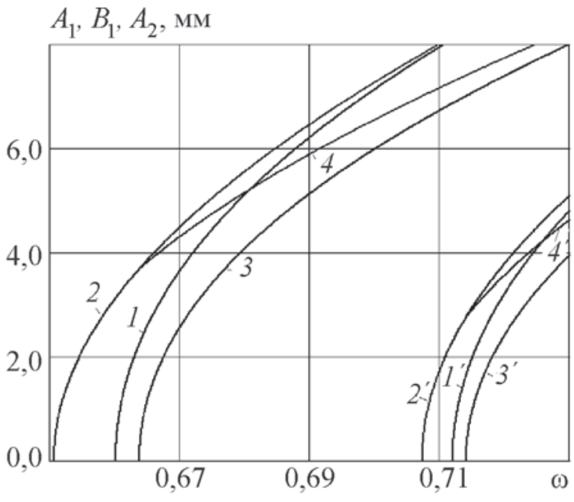

Рис. 2. Зависимости $A_1(\omega), B_1(\omega), A_2(\omega)$ для случая свободных колебаний трубопровода: 1–4 – β= 0,6; 1′–4′ – β= 0,5; 1, 1′ – $A_2(\omega)$ (6); 2, 2′ – $A_1(\omega)$ (7); 3, 3′ – $A_2(\omega)$ (8); 4, 4′ – $B_1(\omega)$ (8)

вятся различными, и разность этих частот возрастает с увеличением давления. Следствием близких значений собственных частот колебаний трубопровода является существование пространственной формы колебаний (третье решение). Эти колебания реализуются при наличии достаточно больших возмущений в плоскости, ортогональной плоскости начального прогиба.

Вынужденные колебания

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях трубопровода для случаев нагружения в плоскости начального прогиба ($f_1 = 0$) и в ортогональной к ней плоскости ($f_2 = 0$). В этих случаях решения (6)–(8) являются скелетными кривыми для амплитудно-частотных характеристик.

Представим искомые *T*-периодические решения в виде отрезка ряда Фурье:

$$\varphi_1(t) = C_1 + A_1\cos(\theta t + \psi_1);$$
$$\varphi_2(t) = C_2 + A_2\cos(\theta t + \psi_2),$$

и из условия ортогональности к базисным функциям по времени получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно частоты и амплитуд гармоник. Для численного решения полученной системы уравнений воспользуемся методом продолжения решения по параметру [5].

Была рассмотрена задача с параметрами как в примере для свободных колебаний, при этом амплитудно-частотные характеристики $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$ были получены для значений параметра диссипации $\eta = 5\cdot10^{-3}$ и параметра давления $\beta = 0{,}6$ (рис. 3, 4). Возбуждение колебаний происходит в плоскости, ортогональной плоскости прогиба трубопровода. При малых значениях амплитуды возбуждения $f_1 = 1\cdot10^{-5}$ (кривые *1*) колебания трубы происходят исключительно в плоскости возбуждения ($A_2 \equiv 0$). В определенном диапазоне частот возможны два режима колебаний с большой и малой амплитудами. Нелинейное взаимодействие между формами колебаний в двух взаимно ортогональных плоскостях мало.

Увеличение амплитуды возбуждения колебаний до $f_1 = 3\cdot10^{-5}$ приводит к качественному изменению АЧХ: амплитуда колебаний в плоскости возбуждения имеет вид кривой *2*, а амплитуда колебаний в ортогональной ей плоскости – кривой *3* (см. рис. 3). В области резонанса взаимодействие между формами колебаний приводит к существованию пространственных режимов движения. Точки оси трубопровода движутся по эллипсу, оси которого наклонены к линии действия внешней нагрузки вследствие учета сил трения.

Вблизи максимума пространственной ветви АЧХ движения сечений стержня происходят по окружности. Кривым *2* и *3* соответствуют два решения, отличающиеся вращением сечений в противоположных направлениях. Решения, соответствующие плоским колебаниям в обла-

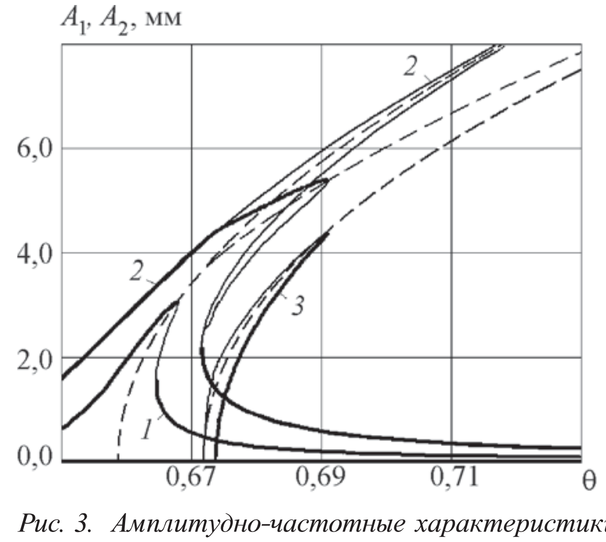

Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$ для случая вынужденных колебаний в плоскости, ортогональной плоскости прогиба трубопровода:
1 – $f_1 = 1\cdot10^{-5}$; 2, 3 – $f_1 = 3\cdot10^{-5}$;
- - - – скелетные кривые;
—— – устойчивые решения

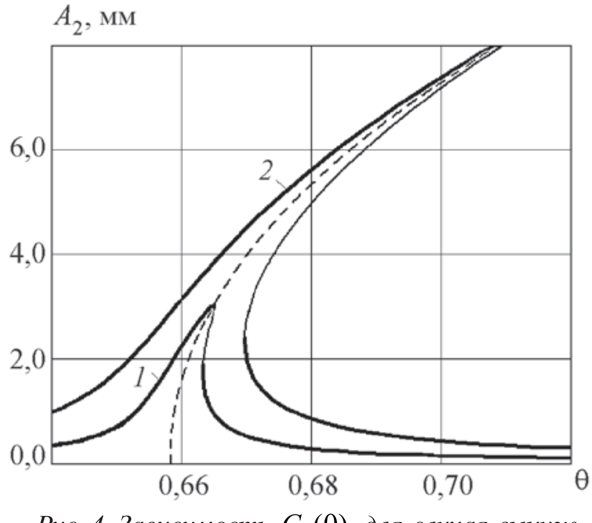

Рис. 4. Зависимость $C_2(\theta)$ для случая вынужденных колебаний в плоскости, ортогональной плоскости прогиба трубопровода:
1 – $f_1 = 1\cdot10^{-5}$; 2, 3 – $f_1 = 3\cdot10^{-5}$;
- - - – скелетные кривые;
—— – устойчивые решения

сти резонанса, являются неустойчивыми.

Рассмотрим случай возбуждения колебаний в плоскости прогиба трубопровода для значений параметров задачи в предыдущем примере. Была получена амплитудно-частотная характеристика $A_2(\theta)$ для значений амплитуды возбуждения $f_2 = 1\cdot 10^{-5}$ и $f_2 = 3\cdot 10^{-5}$ (рис. 5). В этом случае взаимодействие между формами колебаний в двух плоскостях недостаточно велико для появления пространственных движений трубопровода.

При малых амплитудах возбуждения колебаний оба рассмотренных случая дают практически одинаковые значения амплитуд колебаний трубопровода. При увеличении амплитуды нагрузки до $f_k = 3\cdot 10^{-5}$ случай возбуждения колебаний в плоскости начального прогиба трубопровода является более опасным, поскольку на резонансе плоские колебания не переходят в пространственные.

Пространственные колебания появляются в системе при дальнейшем увеличении амплитуды возбуждения. Об этом свидетельствуют амплитудно-частотные характеристики $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$, $C_2(\theta)$ для значения $f_2 = 4\cdot 10^{-5}$ (рис. 6 и 7). Наряду с решением, соответствующим колебаниям трубопровода в плоскости нагрузки ($A_1 = 0$, кривые *1*), было получено решение для пространственной формы колебаний трубы (кривые *2* и *3*).

Данное решение является изолированным, и для его реализации необходимо наличие внешнего возбуждения. В определенном диапазоне частот одновременно возможны пространственные и плоские режимы колебаний. В отличие от случая возбуждения колебаний в плоскости, ортогональной плоскости начального прогиба трубы, плоская форма колебаний устойчива во всем диапазоне частот, и в системе возможны колебания с очень большими амплитудами, что может привести к усталостному разрушению.

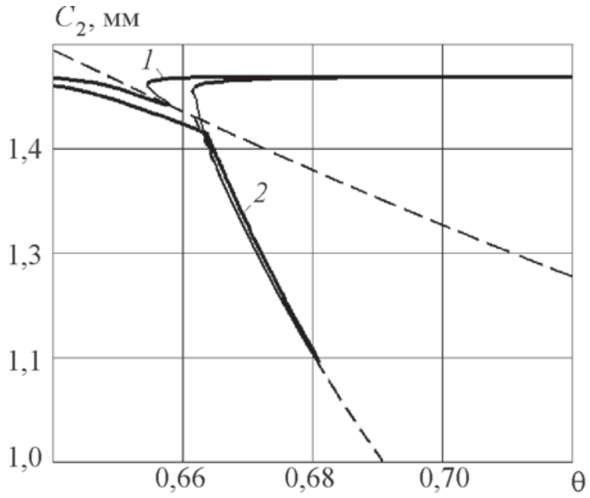

Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика $A_2(\theta)$ для случая возбуждения колебаний в плоскости прогиба трубопровода: 1 – $f_2 = 1\cdot 10^{-5}$; 2 – $f_2 = 3\cdot 10^{-5}$

Заключение

Сравнительный анализ двух случаев нагружения трубопровода, имеющего начальный прогиб, показывает, что в случае вибрационного нагружения в плоскости, ортогональной плоскости начального прогиба, в области резонанса существуют два устойчивых решения, соответствующих вращению сечений трубопровода в двух противоположных направлениях. При

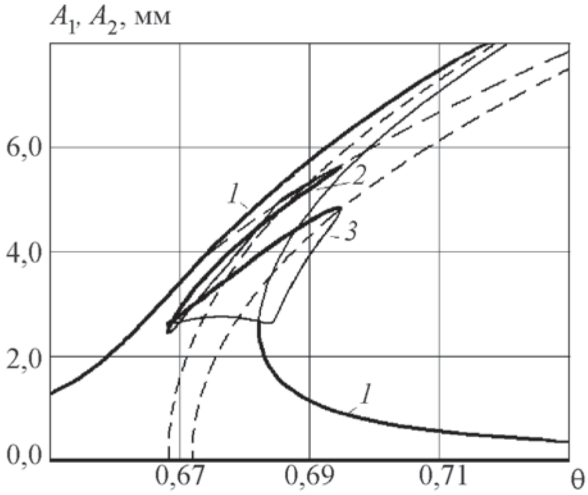

Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики для амплитуды возбуждения колебаний $f_2 = 4\cdot 10^{-5}$: 1 – $A_2(\theta)$, $A_1 = 0$; 2 – $A_2(\theta)$; 3 – $A_1(\theta)$

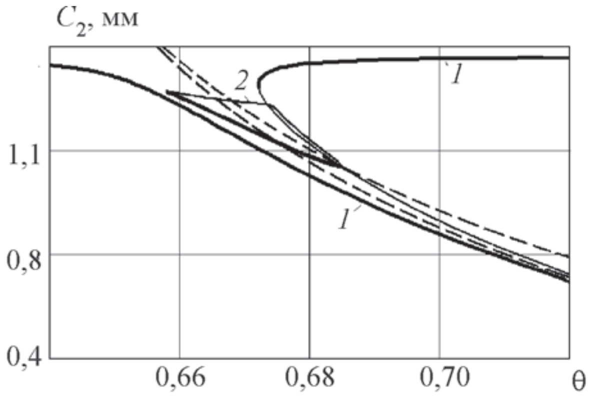

Рис. 7. Зависимость $C_2(\theta)$ для амплитуды возбуждения колебаний трубы $f_2 = 4\cdot 10^{-5}$: 1 – колебания в плоскости нагрузки; 2 – пространственная форма колебаний

нагружении в плоскости начального прогиба существует еще одно устойчивое решение, соответствующее колебаниям трубопровода в плоскости действия нагрузки с большими амплитудами. По условию прочности конструкции, при достаточно большом уровне возбуждения колебаний, последний случай нагружения является менее рациональным.

Список литературы

1. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. – М.: Машиностроение, 1982. – 279 с.
2. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН, МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
3. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 82–90.
4. Муницын А.И. Нелинейные колебания стержня с близкими значениями осевых моментов инерции поперечного сечения // Прикладная математика и механика. Т. 73. Вып. 3. 2009. С. 427–438.
5. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высшая школа, 1989. – 384 с.

Материал поступил в редакцию 2.03.2010

МУНИЦЫН Александр Иванович

E-mail: **munitsyn@rambler.ru**
Тел. **8 (4932)-32-43-37**

Кандидат технических наук, доцент. Доцент кафедры теоретической и прикладной механики Ивановского государственного энергетического университета. Область научных интересов – динамика и прочность машин, нелинейные колебания. Автор 70 научных трудов.

КРАЙНОВА Лариса Николаевна

E-mail: **krainova_larisa@mail.ru**
Тел. **8 (4932)-26-97-11**

Старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики Ивановского государственного энергетического университета.
Область научных интересов – теория колебаний. Автор 8 научных трудов.