

# ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ НИКЕЛЕВОГО СПЛАВА ЭИ437БУ-ВД ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ\*

А. М. Локощенко, Д. О. Платонов

В данной статье приведены результаты исследования длительной прочности жаропрочного никелевого сплава ЭИ437БУ-ВД при 650 °C. Результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов при комбинации растягивающей силы и крутящего момента анализируются с помощью критериального подхода, который основан на концепции так называемого эквивалентного напряжения. Рассмотрены дробная и дробно-степенная зависимости времени до разрушения от различных выражений эквивалентного напряжения.

**Ключевые слова:** никелевый сплав, длительная прочность, сложное напряженное состояние, эквивалентные напряжения, критерии, растяжение, кручение, статистические методы.

## Введение

Большинство экспериментальных данных по длительной прочности металлов было получено на основе результатов испытаний в условиях одноосного растяжения. Однако при оценке работоспособности элементов конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии, необходимы подходы, учитывающие неодноосность нагружения. Проведение высокотемпературных испытаний в условиях сложного напряженного состояния связано со значительными техническими трудностями, поэтому в настоящее время известно относительно небольшое количество надежных опытных данных.

При анализе этих экспериментальных данных обычно используется критериальный подход, основанный на концепции так называемого эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ . При этом задача нахождения критерия длительной прочности сводится к определению двух функций:

зависимости эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  от главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) и зависимости времени до разрушения  $t^*$  от  $\sigma_e$  [1].

В работах [1, 2] был проведен анализ всех известных авторам экспериментальных данных по длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии с помощью критериального подхода (28 серий испытаний).

В 2008 г. были опубликованы новые экспериментальные данные, посвященные анализу испытаний жаропрочного никелевого сплава ЭИ437БУ-ВД [3]. Этот сплав широко используется при изготовлении деталей роторов газотурбинных двигателей (диски и валы). В данной статье проведено моделирование длительной прочности этого сплава на основе результатов испытаний трубчатых образцов с использованием дополнительных подходов.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-08-00142) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект № П1123).

### Анализ результатов испытаний [3] с помощью четырех базовых эквивалентных напряжений

Испытания проводились на тонкостенных трубчатых образцах (наружный  $D=18$  мм и внутренний  $d=17$  мм диаметры, рабочая длина  $L=108$  мм). Заготовки этих образцов вырезались из штамповок дисков сплава ЭИ437БУ-ВД, термообработанных по стандартному режиму. Испытания проводились на установке УИМТ-1500, которая обеспечивала одновременную передачу на трубчатый образец растягивающей силы  $P$  и крутящего момента  $M$ . Условия проведения испытаний соответствовали требованиям ГОСТ 10145-81 [4].

Осьное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения, а также главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  ( $\sigma_2=0$ ) вычислялись по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2P}{\pi D(D-d)}, \\ \tau &= \frac{4M}{\pi D^2(D-d)}, \\ \sigma_{1,3} &= \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].\end{aligned}$$

В качестве эквивалентных напряжений в этом параграфе рассматриваются четыре базовые зависимости  $\sigma$  [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{e1} &= \sigma_1, \quad \sigma_{e2} = \sigma_u = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}, \\ \sigma_{e3} &= 0,5(\sigma_{e1} + \sigma_{e2}), \quad \sigma_{e4} = \sigma_1 - \sigma_3,\end{aligned}$$

где  $\sigma_u$  – интенсивность напряжений.

В таблице 1 приведены результаты испытаний, опубликованные в [3]: для всех значений  $j$  ( $1 \leq j \leq 36$ ) указаны величины  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $t^*$ , а также величины эквивалентных напряжений  $\sigma_{em}$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ).

За основу статистического анализа был принят метод, изложенный ранее в ряде работ [1, 5]. При этом рассматриваются два варианта критерия длительной прочности (зависимости времени до разрушения  $t^*$  от эквивалентного напряжения  $\sigma_{em}$ ): степенная и дробно-степенная зависимости  $t^*(\sigma_{em})$ , соответственно,

$$t^*(\sigma_{em}) = C\sigma_{em}^{-n}; \quad (1)$$

$$t^*(\sigma_{em}) = D \left( \frac{\sigma_b - \sigma_{em}}{\sigma_{em}} \right)^l, \quad (2)$$

где  $C$ ,  $n$ ,  $D$ ,  $l$  – константы;  $\sigma_b$  – предел кратковременной прочности металла при температуре испытаний.

В энциклопедии [6] приведены характеристики квазистатического деформирования и разрушения сплава ЭИ437БУ-ВД при различных температурах, откуда следует, что при температуре  $T = 650$  °С предел кратковременной прочности составляет  $\sigma_b = 950$  МПа.

Основными целями исследования являются сравнение эффективности моделей (1) и (2) и установление предпочтительного вида эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ .

В данной статье для оценки суммарного расхождения экспериментальных значений времен до разрушения  $t^*$  и теоретических значений  $t^*(\sigma_{em})$  для случая степенной модели рассматриваются три величины:

$$S_{1m} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left[ \frac{t^*(\sigma_{em}) - t^*}{t^*(\sigma_{em}) + t^*} \right]_i^2 \quad \text{при (1) – (2);} \quad (3)$$

$$W_{1m} = \sum_{i=1}^N \left[ \lg \left( \frac{t^*(\sigma_{em})}{t^*} \right) \right]_i^2 \quad \text{при (1) – (2);} \quad (4)$$

$$\eta_{1m} = \frac{1}{(N-1)(n^2+1)} \sum_{i=1}^N \left[ \lg \left( \frac{t^*}{t^*(\sigma_{em})} \right) \right]_i^2 \quad \text{при (1), (5)}$$

где  $N$  – количество испытаний в серии, а значения  $m=1, 2, 3, 4$  характеризуют один из четырех видов эквивалентного напряжения  $\sigma_{em}$ .

Аналогичные суммарные расхождения, полученные при использовании дробно-степенной модели  $t^*(\sigma_{em})$ , назовем соответственно  $S_{2m}$  и  $W_{2m}$ .

Для каждого вида зависимости и для каждой меры суммарного расхождения (3)–(5) введем минимальную величину суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений  $t^*$ :

$$\begin{aligned}S_1 &= \min_m S_{1m}; \quad W_1 = \min_m W_{1m}; \quad \eta_1 = \min_m \eta_{1m}; \\ S_2 &= \min_m S_{2m}; \quad W_2 = \min_m W_{2m}; \quad m=1, 2, 3, 4.\end{aligned} \quad (6)$$

Для определения существенных различий значений суммарных расхождений  $S_{1m}$  ( $m=1–4$ ) при разных значениях  $m$  воспользуемся известным статистическим распределением Фишера [5]. С этой целью введем в рассмотрение отношения  $\bar{S}_{1m} = S_{1m}/S_1$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ), где величина  $S_1$ , согласно (6), характеризует тот вид эквивалентного напряжения, который приводит к наилучшему соответствуию экспериментальных и теоретических значений времени до разрушения при использовании (1) и (3). Значения  $\bar{S}_{1m}$  следует сравнивать с критическим значе-

Таблица 1

*Результаты испытаний ЭИ437БУ-ВД [3] и значения эквивалентных напряжений*

| <i>j</i> | $\sigma$ , МПа | $\tau$ , МПа | $t^*$ , час | $\sigma_{e1}$ , МПа | $\sigma_{e2}$ , МПа | $\sigma_{e3}$ , МПа | $\sigma_{e4}$ , МПа |
|----------|----------------|--------------|-------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1        | 637,7          | 0,0          | 29,5        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 2        | 637,7          | 0,0          | 33,5        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 3        | 637,7          | 0,0          | 31,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 4        | 637,7          | 0,0          | 28,5        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 5        | 637,7          | 0,0          | 58,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 6        | 637,7          | 0,0          | 50,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 7        | 637,7          | 0,0          | 25,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 8        | 637,7          | 0,0          | 17,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 9        | 637,7          | 0,0          | 15,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 10       | 637,7          | 0,0          | 13,0        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 11       | 637,7          | 0,0          | 15,5        | 637,7               | 637,7               | 637,7               | 637,7               |
| 12       | 490,5          | 0,0          | 476,0       | 490,5               | 490,5               | 490,5               | 490,5               |
| 13       | 539,6          | 0,0          | 118,0       | 539,6               | 539,6               | 539,6               | 539,6               |
| 14       | 0,0            | 343,4        | 209,5       | 343,4               | 594,8               | 469,1               | 686,8               |
| 15       | 0,0            | 397,3        | 2,0         | 397,3               | 688,1               | 542,7               | 794,6               |
| 16       | 0,0            | 372,8        | 23,5        | 372,8               | 645,7               | 509,3               | 745,6               |
| 17       | 0,0            | 294,3        | 88,0        | 294,3               | 509,7               | 402,0               | 588,6               |
| 18       | 0,0            | 294,3        | 805,0       | 294,3               | 509,7               | 402,0               | 588,6               |
| 19       | 294,3          | 245,3        | 436,0       | 433,2               | 516,8               | 475,0               | 572,1               |
| 20       | 264,9          | 220,7        | 883,0       | 389,8               | 465,1               | 427,5               | 514,8               |
| 21       | 235,4          | 196,2        | 2671,0      | 346,5               | 413,4               | 379,9               | 457,6               |
| 22       | 353,2          | 294,3        | 218,5       | 519,8               | 620,2               | 570,0               | 686,4               |
| 23       | 353,2          | 294,3        | 13,0        | 519,8               | 620,2               | 570,0               | 686,4               |
| 24       | 353,2          | 294,3        | 41,0        | 519,8               | 620,2               | 570,0               | 686,4               |
| 25       | 412,0          | 343,4        | 11,0        | 606,4               | 723,5               | 665,0               | 800,9               |
| 26       | 343,4          | 294,3        | 107,0       | 512,4               | 614,6               | 563,5               | 681,4               |
| 27       | 392,4          | 196,2        | 709,0       | 473,7               | 519,1               | 496,4               | 554,9               |
| 28       | 549,4          | 274,7        | 6,0         | 663,2               | 726,8               | 695,0               | 777,0               |
| 29       | 490,5          | 245,3        | 7,0         | 592,1               | 648,9               | 620,5               | 693,7               |
| 30       | 490,5          | 245,3        | 20,0        | 592,1               | 648,9               | 620,5               | 693,7               |
| 31       | 392,4          | 196,2        | 65,0        | 473,7               | 519,1               | 496,4               | 554,9               |
| 32       | 372,8          | 186,4        | 227,0       | 450,0               | 493,2               | 471,6               | 527,2               |
| 33       | 490,5          | 245,3        | 72,0        | 592,1               | 648,9               | 620,5               | 693,7               |
| 34       | 392,4          | 196,2        | 425,5       | 473,7               | 519,1               | 496,4               | 554,9               |
| 35       | 343,4          | 171,7        | 416,0       | 414,5               | 454,3               | 434,4               | 485,6               |
| 36       | 490,5          | 245,3        | 28,5        | 592,1               | 648,9               | 620,5               | 693,7               |

нием распределения Фишера  $F_*(N, \alpha)$ , зависящим от количества испытаний  $N$  и выбранного уровня значимости  $\alpha$ . Если какое-либо значение  $\bar{S}_{1m}$  меньше  $F_*$ , то согласно критерию Фишера оно несущественно отличается от минимального значения  $\bar{S}_1 = 1$ . В этом случае несколько выражений  $\sigma_{em}$  могут быть приняты за эквивалентное напряжение конкретного материала. Если же среди отношений  $\bar{S}_{1m}$  имеются

три величины большие  $F_*$ , то за эквивалентное напряжение можно принять только то выражение  $\sigma_{em}$ , которому соответствует значение  $\bar{S}_{1m} = 1$ .

Аналогично можно определить истинные эквивалентные напряжения при использовании и других мер суммарного расхождения для степенной и дробно-степенной моделей. В качестве уровня значимости примем

Таблица 2

Величины суммарного расхождения (исходные экспериментальные данные)

|   |   |  | $\bar{S}_{1m}, \bar{W}_{1m}, \bar{\eta}_{1m}$ |               |               |               |
|---|---|--|---|---------------|---------------|---------------|
|   |   |  | $\sigma_{e1}$                                 | $\sigma_{e2}$ | $\sigma_{e3}$ | $\sigma_{e4}$ |
| $t^* = C\sigma_e^{-n}$  | $S_{min} = S_1 = 0,124$                     | $\bar{S}_{1m} = S_{1m} / S_1$          | 1,72  | 1             | 1,21          | 1,43          |
|   | $W_{min} = W_1 = 4,305$                     | $\bar{W}_{1m} = W_{1m} / W_1$          | 2,79  | 1             | 1,67          | 1,55          |
|   | $\eta_{min} = \eta_1 = 8,464 \cdot 10^{-4}$ | $\bar{\eta}_{1m} = \eta_{1m} / \eta_1$ | 8,34  | 1             | 2,43          | 1,52          |
| $t^* = D \left( \frac{\sigma_b - \sigma_e}{\sigma_e} \right)^l$ | $S_{min} = S_2 = 0,125$                     | $\bar{S}_{2m} = S_{2m} / S_2$          | 1,63  | 1             | 1,19          | 1,56          |
|   | $W_{min} = W_2 = 4,204$                     | $\bar{W}_{2m} = W_{2m} / W_2$          | 2,76  | 1             | 1,73          | 1,70          |

Примечание. Пунктиром подчеркнуты величины суммарного расхождения, не превосходящие  $F_*$ .

значение  $\alpha=0,05$ . В этом случае критическое значение распределения Фишера равно  $F_*(N, \alpha) = -F_*(36; 0,05) = 1,76$ .

В таблице 2 приведены значения величин минимального суммарного расхождения при использовании степенной ( $S_1, W_1, \eta_1$ ) и дробно-степенной ( $S_2, W_2$ ) моделей соответственно, а также относительные величины суммарного расхождения при различных моделях (1)–(2) и мерах расхождения (3)–(5):

$$\bar{S}_{1m} = S_{1m} / S_1; \quad \bar{W}_{1m} = W_{1m} / W_1; \quad \bar{\eta}_{1m} = \eta_{1m} / \eta_1;$$

$$\bar{S}_{2m} = S_{2m} / S_2; \quad \bar{W}_{2m} = W_{2m} / W_2; \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Из этих данных следует, что во всех случаях наилучшее соответствие экспериментальных

и теоретических значений времени до разрушения достигается при использовании эквивалентного напряжения  $\sigma_{e2}$ . В качестве примера на рис. 1 в логарифмических координатах приведены экспериментальные данные и теоретические кривые длительной прочности при различной мере суммарного расхождения.

Для сравнения эффективности применения степенной и дробно-степенной моделей длительной прочности введем отношения

$$a = S_2 / S_1 \text{ и } b = W_2 / W_1.$$

Из таблицы 2 следует:

$$a = 1,002; \quad b = 0,977.$$

В связи с незначительным отличием  $a$

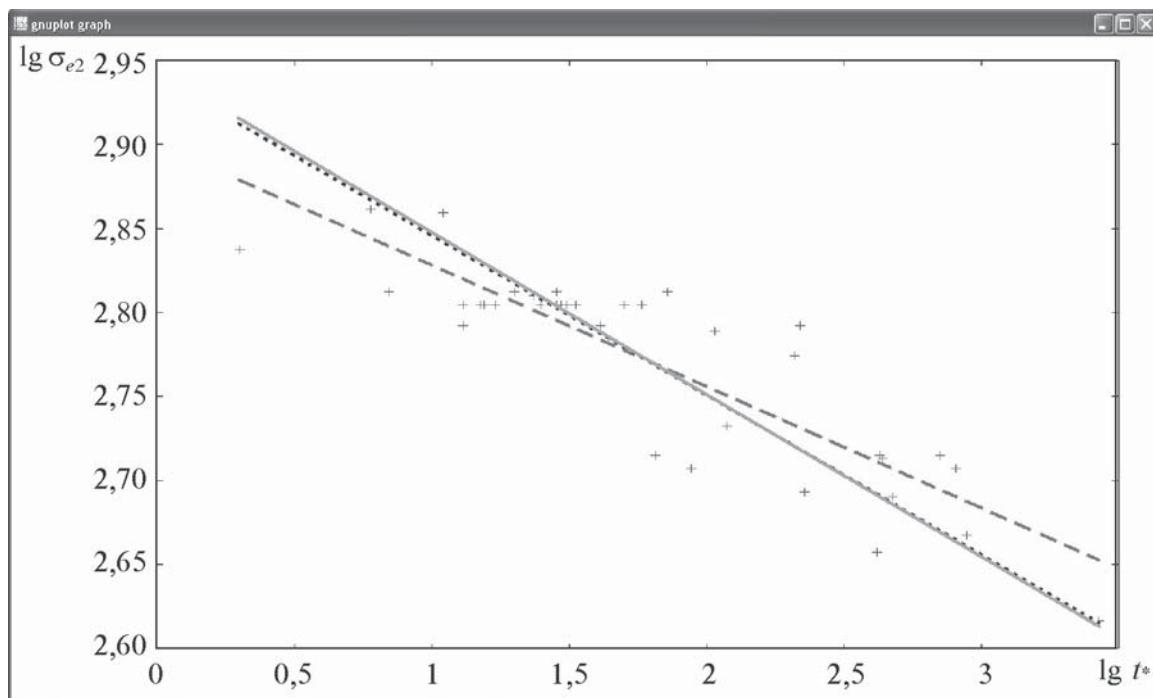


Рис. 1. Экспериментальные данные и теоретические кривые длительной прочности при использовании в качестве эквивалентного напряжения величины  $\sigma_{e2}$ : — —  $S$ ; - · -  $W$ ; —  $\eta$

и  $b$  от 1 можно сделать вывод, что обе модели длительной прочности – степенная и дробно-степенная – приводят к близким результатам. При этом следует учитывать, что использование дробно-степенной модели требует знания предела кратковременной прочности  $\sigma_b$  при температуре испытаний. Однако, поскольку необходимые значения  $\sigma_b$  не всегда можно найти в соответствующих справочниках, как правило, использование степенной модели более целесообразно. В связи с этим далее проводится анализ экспериментальных данных [3] только при использовании степенной модели длительной прочности.

### **Анализ результатов испытаний [3] с помощью новых зависимостей для эквивалентных напряжений**

Если ни одно из рассмотренных четырех базовых эквивалентных напряжений  $\sigma_{em}$  ( $m=1,2,3,4$ ) не приводит к удовлетворительному соответствуию экспериментальных и теоретических значений времени до разрушения, то следует использовать усложненные выражения  $\sigma_e$  с материальными константами. В работе [7] приведен обзор различных видов эквивалентных напряжений с одной и несколькими константами, характеризующими условия испытаний.

Опишем экспериментальные данные [3] с ис-

пользованием степенной модели и различных усложненных зависимостей для эквивалентных напряжений с одной константой. В качестве таких рассмотрены следующие выражения:  $\sigma_{e5}$  (А.А. Лебедев [8]),  $\sigma_{e6}$  (А.М. Локощенко и С.А. Шестериков [9]),  $\sigma_{e7}$  (Е.Р. Голубовский [10]) и  $\sigma_{e8}$  (В.П. Голуб [11]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{e5} = \chi \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2} + (1-\chi) \sigma_1; \\ \sigma_{e6} = \sigma_1 - 2\xi \sigma_3; \\ \sigma_{e7} = \lambda \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2} + (1-\lambda)(\sigma_1 + \sigma_3); \\ \sigma_{e8} = \delta (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sqrt{2}/3)^{(2\sigma_3/\sigma_1)} \times \\ \times (1-\delta) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2}, \end{array} \right. \quad (7)$$

при  $\sigma_1 > 0 \geq \sigma_3$ .

Используемые в (7) константы  $\chi$ ,  $\xi$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  определяются таким образом, чтобы они обеспечивали минимальное суммарное расхождение экспериментальных и теоретических значений времени до разрушения. В таблице 3 для всех четырех рассмотренных новых зависимостей для эквивалентных напряжений  $\sigma_{e5}-\sigma_{e8}$  для различной меры суммарного расхождения приведены полученные значения констант и соответствующих величин этого суммарного расхождения. Для определения эффективности применения новых зависимостей для эквивалентных напряжений сравним полученные зна-

Таблица 3

*Характеристики длительной прочности при использовании степенной модели  
и усложненных зависимостей для эквивалентных напряжений  $\sigma_{e5}-\sigma_{e8}$*

| $\sigma_e$    |        | $\chi, \xi, \lambda, \delta$ | $S_{1m}, W_{1m}, \eta_{1m}$ | $\bar{S}_{1m}, \bar{W}_{1m}, \bar{\eta}_{1m}$ |
|---------------|--------|------------------------------|-----------------------------|---|
| $\sigma_{e5}$ | $S$    | $\chi = 0,90$                | $S_{15} = 0,123$            | $\bar{S}_{15} = 0,987$                        |
|               | $W$    | $\chi = 0,99$                | $W_{15} = 4,304$            | $\bar{W}_{15} = 1,000$                        |
|               | $\eta$ | $\chi = 1,02$                | $N_o = 0,000844$            | $\eta = 0,997$                                |
| $\sigma_{e6}$ | $S$    | $\xi = 0,31$                 | $S_{16} = 0,129$            | $\bar{S}_{16} = 1,036$                        |
|               | $W$    | $\xi = 0,35$                 | $W_{16} = 4,739$            | $\bar{W}_{16} = 1,101$                        |
|               | $\eta$ | $\xi = 0,40$                 | $\eta_{16} = 0,000920$      | $\eta_{16} = 1,087$                           |
| $\sigma_{e7}$ | $S$    | $\lambda = 0,96$             | $S_{17} = 0,123$            | $\bar{S}_{17} = 0,985$                        |
|               | $W$    | $\lambda = 0,99$             | $W_{17} = 4,303$            | $\bar{W}_{17} = 1,000$                        |
|               | $\eta$ | $\lambda = 1,01$             | $\eta_{17} = 0,000844$      | $\eta_{17} = 0,997$                           |
| $\sigma_{e8}$ | $S$    | $\delta = 1,05$              | $S_{18} = 0,157$            | $\bar{S}_{18} = 1,264$                        |
|               | $W$    | $\delta = 1,04$              | $W_{18} = 5,768$            | $\bar{W}_{18} = 1,340$                        |
|               | $\eta$ | $\delta = 1,03$              | $\eta_{18} = 0,00106$       | $\eta_{18} = 1,254$                           |

чения суммарного расхождения  $S_{1m}$ ,  $W_{1m}$  и  $\eta_{1m}$  ( $m = 5, 6, 7, 8$ ) с минимальными значениями суммарного расхождения, соответствующими четырем базовым эквивалентным напряжениям  $\sigma_{em}$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ). В таблице 3 приведены значения для величин:

$$\bar{S}_{1m} = S_{1m}/S_1; \bar{W}_{1m} = W_{1m}/W_1;$$

$$\bar{\eta}_1 = \eta_{1m}/\eta_1; m = 5, 6, 7, 8.$$

Выше было показано, что при анализе рассматриваемых экспериментальных данных с помощью четырех базовых эквивалентных напряжений  $\sigma_{e1} - \sigma_{e4}$  наилучшее соответствие экспериментальных и теоретических значений времени до разрушения достигается при использовании  $\sigma_{e2} = \sigma_u$ . Среди четырех новых зависимостей для эквивалентных напряжений интенсивность напряжений фигурирует только в  $\sigma_{e5}$  и  $\sigma_{e7}$ . Поэтому, естественно, что при использовании  $\sigma_{e5}$  и  $\sigma_{e7}$  величины  $\bar{S}_{1m}$ ,  $\bar{W}_{1m}$  и  $\bar{\eta}_{1m}$  при  $m = 5$  и  $m = 7$  должны быть не больше 1. Из таблицы 3 следует, что эффект использования  $\sigma_{e5}$  и  $\sigma_{e7}$  по сравнению с  $\sigma_{e2}$  очень незначителен: минимальные значения относительных величин суммарного расхождения при  $\sigma_{e5}$  и  $\sigma_{e7}$  меньше соответствующих величин при  $\sigma_{e2}$  не более, чем на 1,5%. В выражениях  $\sigma_{e6}$  и  $\sigma_{e8}$  интенсивность напряжений  $\sigma_u$  отсутствует, в связи с этим величины  $\bar{S}_{1m}$ ,  $\bar{W}_{1m}$  и  $\bar{\eta}_{1m}$  при  $m = 6$  и  $m = 8$  превышают 1, причем на десятки процентов.

Таким образом, применение усложненных зависимостей  $\sigma_{em}$  ( $m = 5-8$ ) не приводит к существенному уменьшению величин суммарного расхождения экспериментальных и теоретических времен до разрушения. В связи с этим использование усложненных зависимостей для эквивалентных напряжений при описании экспериментальных данных [3] нецелесообразно.

### **Анализ длительной прочности при исключении случайных опытных данных**

Известно, что при проведении большой серии испытаний металлов на длительную прочность некоторые экспериментальные данные отличаются от основной массы данных. Это отличие объясняется отклонениями химического состава или структуры металла в некоторых образцах, отклонениями формы отдельных образцов (например, возможными надрезами), непостоянным температурным режимом некоторых испытаний и другими возможными при-

чинами. В связи с этим некоторая часть испытаний нарушает общий характер зависимости  $t^*(\sigma_e)$  и даже иногда приводит к ее немонотонности. Это обстоятельство вызывает необходимость определить критерий случайности отдельных испытаний и исключить результаты этих опытов из общего набора экспериментальных данных. Проблема заключается в определении степени влияния отброшенных случайных опытных данных на основные выводы относительно выбора вида эквивалентного напряжения при описании рассматриваемых экспериментальных данных.

Рассмотрим два способа исключения случайных опытных данных из рассмотрения при использовании степенной модели длительной прочности.

### **Первый способ исключения случайных данных**

В качестве первого способа разделения всех результатов испытаний на «случайные» и «неслучайные» использован интервальный метод оценки параметров распределения [12].

Для каждой меры суммарного расхождения  $S$ ,  $W$  и  $\eta$  и для каждого вида эквивалентного напряжения  $\sigma_{em}$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) в логарифмических координатах  $\lg t^* - \lg \sigma_{em}$  на рис. 1 показаны экспериментальные данные и соответствующие теоретические кривые длительной прочности. Прямые соответствуют теоретическим зависимостям с найденными ранее значениями материальных констант при использовании мер суммарного расхождения  $S$ ,  $W$  и  $\eta$ .

В качестве совокупности элементов выборки использованы расстояния от опытных данных до теоретических прямых.

Для определения отбрасываемых экспериментальных данных проведем ось  $z$  перпендикулярно аналитической прямой  $t^*(\sigma_{em})$ . Затем вычислим расстояния  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) всех экспериментальных точек от этой аналитической прямой ( $z_i > 0$ ). Для определения длины интервала разбиения  $\delta_0$  найдем отношение максимального значения  $z_i$  к количеству испытаний  $N = 36$ , где  $k$ -й интервал ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) характеризует расстояние  $z_k$  в диапазоне  $(k-1)\delta_0 < z_k < k\delta_0$ . Каждому интервалу ставим в соответствие количество экспериментальных точек  $N_k$ , попавших в этот интервал:  $N_k = N_k(k)$ . Построим гистограмму этих значений  $N_k(k)$ , в которой по оси абсцисс отложены значения  $k$ , соответствующие рас-

стояниям  $z_k$  до полученной прямой, а по оси ординат – количества экспериментальных точек  $N_k$ . Для оценки количества отбрасываемых экспериментальных точек рассмотрим величину

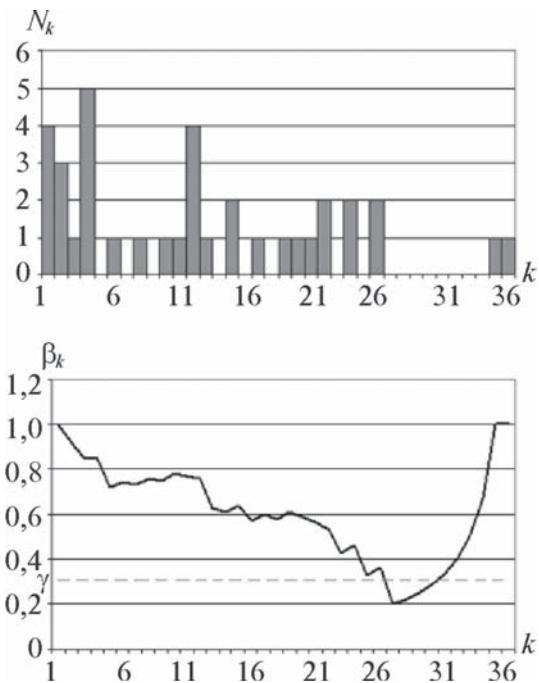
$$\beta_k = \frac{1}{(N-k+1)} \cdot \sum_{i=k}^N N_i.$$

Расстояние до середины  $k$ -го интервала равно  $z_k = 0,5(2k-1)\delta_0$ , значения  $\beta_k$  в серединах рассматриваемых интервалов  $z_k$  соединим отрезками прямых, в результате получим ломаную  $\beta_k(k)$ .

В качестве характерного уровня расстояний от теоретической прямой, который может служить ориентиром при оценке отбрасываемых точек, введем параметр  $\gamma(N) = N^{-1/3}$ , зависящий от количества испытаний  $N$ ; этот параметр является монотонно убывающей функцией от  $N$ : в данном случае  $\gamma = 36^{-1/3} = 0,303$ . В данном методе отбрасываются точки, попавшие во все интервалы с номерами  $k, (k+1), (k+2), \dots, N$ . Необходимо установить критерий определения величины  $k$  – номера первого отброшенного интервала. В работе [12] первый отброшенный интервал характеризуется минимальным значением  $k$ , для которого одновременно удовлетворяются два неравенства:

$$\beta_k > \beta_{k-1}, \quad \beta_k < \gamma.$$

На рисунке 2 в качестве примера приведены результаты исследования для эквивалентного напряжения  $\sigma_{e2}$  и меры суммарного расхождения  $S$  в графической форме: гистограммы  $N_k(k)$  и зависимости  $\beta_k(k)$ . В таблице 4 для каждого вида эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  в числителе приведена величина суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений времени до разрушения в оставшихся экспериментальных данных, а в знаменателе – количество отброшенных испытаний  $N_0$ . Анализ отбрасывания случайных данных при учете всех рассматриваемых мер суммарного расхождения  $S, W$  и  $\eta$  позволил сделать вывод о том,



*Рис. 2. Гистограммы  $N_k(k)$  и зависимости  $\beta_k(k)$  при использовании эквивалентного напряжения  $\sigma_{e2}$  и меры суммарного расхождения  $S$*

что суммарное количество отброшенных испытаний составляет 10% от всех рассмотренных испытаний ( $43/432=10\%$ ). Если анализировать все испытания только при учете эквивалентного напряжения  $\sigma_{e2}$ , то отброшенные испытания составляют  $(5/108)=4.6\%$ . Вычисления показали, что после отбрасывания экспериментальных данных, имеющих случайный характер, при описании оставшихся результатов испытаний следует использовать  $\sigma_{e2}$  или  $\sigma_{e3}$  в зависимости от выбора меры суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

#### **Второй способ исключения случайных данных**

Для выявления результатов испытаний, имеющих случайный характер, составим уравнение

Таблица 4

*Величины суммарного расхождения (оставшиеся экспериментальные данные)*

| $t^* = C\sigma_e^{-n}$ | $S_{\min} = S_3 = 0,053$                     | $\bar{S}_{1m} = S_{1m} / S_1$          | $\frac{\bar{S}_{1m}}{N_0}, \frac{\bar{W}_{1m}}{N_0}, \frac{\bar{\eta}_{1m}}{N_0}$ |               |               |               |
|------------------------|--|--|---|---------------|---------------|---------------|
|                        |  |  | $\sigma_{e1}$   | $\sigma_{e2}$ | $\sigma_{e3}$ | $\sigma_{e4}$ |
|                        | $W_{\min} = W_3 = 1,462$                     | $\bar{W}_{1m} = W_{1m} / W_3$          | 2,81/3  | 1,90/2        | 1/7           | 3,33/2        |
|                        | $\eta_{\min} = \eta_2 = 7,564 \cdot 10^{-4}$ | $\bar{\eta}_{1m} = \eta_{1m} / \eta_2$ | 1,68/7  | 1/1           | 1,23/3        | 1,32/2        |

регрессии эквивалентного напряжения от времени до разрушения в логарифмических координатах, а также установим корреляционную зависимость времени до разрушения от эквивалентного напряжения  $\sigma_{e2}$  и определим доверительные интервалы отклонений [13]. В качестве  $\sigma_e$  будем использовать выражение  $\sigma_{e2}$ , так как именно  $\sigma_{e2}$  приводит к минимальной величине суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения среди четырех базовых выражений  $\sigma_e$ .

Рассмотрим логарифмы значений времени до разрушения  $x = \lg t^*$  и эквивалентных напряжений  $y = \lg \sigma_{e2}$  всех испытаний. Размах этих значений по осям  $x$  и  $y$  составляют:

$$x_{\max} - x_{\min} = 3,43 - 0,30 = 3,13;$$

$$y_{\max} - y_{\min} = 2,86 - 2,61 = 0,25.$$

Для удобства разобьем эти значения на 9 интервалов по  $x = \lg t^*$  с шагом  $h_x = 0,35$  и на 7 интервалов по  $y = \lg \sigma_{e2}$  с шагом  $h_y = 0,036$ .

Для нахождения общих выборочных средних значений  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  и средних квадратических отклонений  $\psi_x$  и  $\psi_y$  сведем исходные значения в корреляционную таблицу (табл. 5) в условных вариантах  $v$ ,  $\omega$  с ложными нулями для  $x: B_x = 1,875$  и для  $y: B_y = 2,736$ . Значения в различных ячейках таблицы определяют количество экспериментальных данных, попавших в соответствующие интервалы.

Для вычисления эмпирических моментов в условных вариантах воспользуемся формулами:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=-4}^4 v_i N_{v_i}}{N} = -0,056; \quad \bar{\omega} = \frac{\sum_{i=-3}^3 \omega_i N_{\omega_i}}{N} = -0,056; \quad (8)$$

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum_{i=-4}^4 v_i^2 N_{v_i}}{N} = 3,72; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\sum_{i=-3}^3 \omega_i^2 N_{\omega_i}}{N} = 3,67. \quad (9)$$

При помощи уравнений (8)–(9) найдем условные средние квадратические отклонения

$$\psi_v = \sqrt{\bar{v}^2 - v^2} = 1,928; \quad \psi_\omega = \sqrt{\bar{\omega}^2 - \omega^2} = 1,634.$$

Определим общие средние значения  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , а также средние квадратические отклонения:

$$\bar{x} = \bar{v} h_x + B_x = 1,885; \quad \bar{y} = \bar{\omega} h_y + B_y = 2,77;$$

$$\psi_x = \psi_v \cdot h_x = 0,675; \quad \psi_y = \psi_\omega \cdot h_y = 0,059.$$

Для нахождения коэффициента корреляции  $r$  в условных вариантах воспользуемся формулой

$$r = \frac{\sum N_{v\omega} v \omega}{N \psi_v \psi_\omega} = -0,899, \quad (10)$$

где  $N_{v\omega}$  – частоты одновременного появления  $v$  и  $\omega$ .

Поскольку величина  $|r|$  близка к единице, это свидетельствует о достаточно тесной корреляционной связи между временем до разрушения  $t^*$  и эквивалентным напряжением  $\sigma_{e2}$ .

Составим уравнение прямой регрессии  $y$  по  $x$ :

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \frac{\psi_y}{\psi_x} (x - \bar{x}),$$

которое при учете найденных значений  $r$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  примет следующий вид:

$$\bar{y}_x = -0,078x + 2,917.$$

Групповые средние значения  $\bar{y}_{x_i}$  по осредненным значениям  $X_i$  ( $i=1-9$ ) приведены в таблице 6.

Найдем средние квадратические отклонения  $\Sigma_{\bar{y}_x}$  и  $\Sigma_y$ :

$$\psi_{\bar{y}_x} = \Sigma_{\bar{y}_x} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 N_{x_i} (\bar{y}_{x_i} - y_i)^2}{N}} = \pm 0,083.$$

По правилу «трех сигм» с надежностью  $\gamma = 0,997$  следует ожидать, что выполняется неравенство  $|\bar{y}_x - y| < 3\Sigma_{\bar{y}_x}$ , т.е. в данном случае

Таблица 5

Корреляционная таблица в условных вариантах  $v$ ,  $\omega$ 

| $v$<br>$\omega$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $N_v$ |
|-----------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|-------|
| -3              |    |    |    |    |   |   |   |   | 1 | 1     |
| -2              |    |    |    |    |   |   | 1 | 1 |   | 2     |
| -1              |    |    |    |    | 2 | 1 | 3 | 1 |   | 7     |
| 0               |    |    |    |    |   | 1 |   | 1 |   | 2     |
| 1               |    |    |    |    |   | 1 |   |   |   | 1     |
| 2               |    | 1  | 6  | 9  | 3 | 1 |   |   |   | 20    |
| 3               | 1  | 1  | 1  |    |   |   |   |   |   | 3     |
| $N_\omega$      | 1  | 2  | 7  | 9  | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 | 36    |

Таблица 6

Зависимость величин  $\bar{y}_{x_i}$  от  $X_i$

| $X_i$           | 0,475 | 0,825 | 1,175 | 1,525 | 1,875 | 2,225 | 2,575 | 2,925 | 3,275 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\bar{y}_{x_i}$ | 2,844 | 2,826 | 2,813 | 2,808 | 2,765 | 2,754 | 2,691 | 2,700 | 2,628 |

$|\bar{y}_x - y| < 3 \cdot 0,083 = 0,249$ . Из анализа полученных результатов следует, что средние групповые значения эквивалентных напряжений, вычисленные по уравнению регрессии, отклоняются по абсолютной величине от соответствующих средних групповых  $\bar{y}_x$  не более чем на 0,249.

Для оценки наибольшей величины отклонений применим формулу

$$\Sigma_y = \pm \psi_y \sqrt{1 - r^2} = \pm 0,026.$$

Применяя правило «трех сигм», получаем неравенство  $|\bar{y}_x - y| < 3\Sigma_y = 0,078$ , из которого находим неравенства, определяющие доверительный интервал

$$\bar{y}_x - 0,078 < y < \bar{y}_x + 0,078.$$

Из рисунка 3 видно, что ни одно значение  $\sigma_{e2}$ , полученное по экспериментальным данным, не выходит за пределы доверительного интервала уравнения прямой регрессии с надежностью  $\gamma = 0,997$ , следовательно, можно считать, что они не имеют случайного характера. Таким образом, данный метод подтверждает справедливость использования интенсивности напряжений ( $\sigma_e = \sigma_{e2}$ ) в качестве эквивалентного напряжения.

### Заключение

В работе было проведено исследование оценок длительной прочности жаропрочного никелевого сплава ЭИ437БУ-ВД при 650 °С в условиях сложного напряженного состояния с помощью критериального подхода.

Рассмотрены две модели длительной прочности (степенная и дробно-степенная) и четыре вида зависимости эквивалентного напряжения от главных напряжений. Для сравнения эффективности применения различных теоретических соотношений при описании экспериментальных данных были введены три меры суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения. Наилучшее описание результатов испытаний независимо от модели длительной прочности было получено при использовании интенсивности напряжений в качестве эквивалентного напряжения. Также показано, что применение усложненных зависимостей для эквивалентного напряжения нецелесообразно. Рассмотрены два способа исключения экспериментальных данных, имеющих случайный характер.

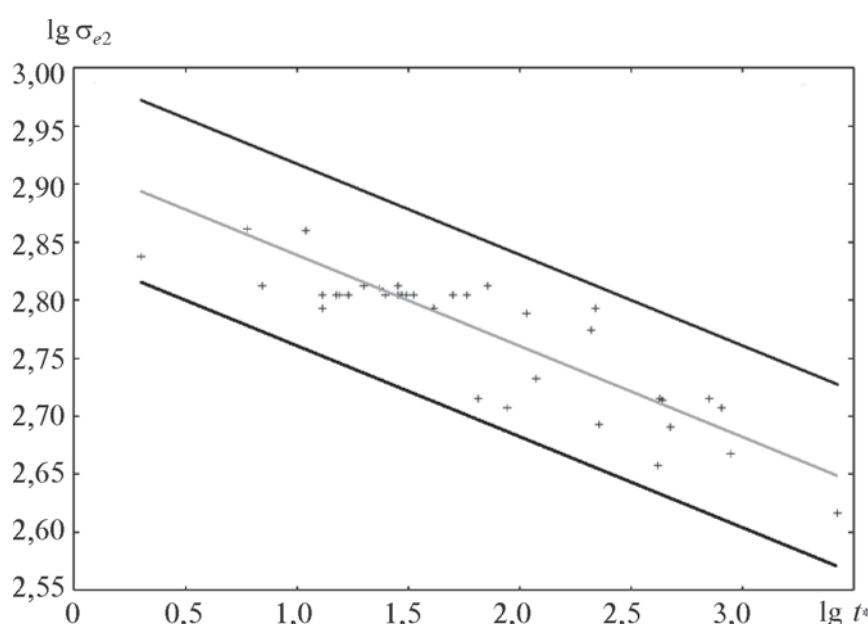


Рис. 3. Зависимость времени до разрушения от эквивалентного напряжения  $\sigma_{e2}$  (в логарифмических координатах) и доверительный интервал уравнения прямой регрессии с надежностью  $\gamma = 0,997$

**Список литературы**

1. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: МГИУ. 2007. – 264 с.
2. Локощенко А.М., Платонов Д.О. Математическое моделирование длительной прочности цилиндрических оболочек в агрессивной среде при сложном напряженном состоянии. Ч. 1. // Машиностроение и инженерное образование. 2006. № 3. С. 55–66.
3. Голубовский Е.Р., Демидов А.Г. Оценка длительной прочности при сложном напряженном состоянии сплава ЭИ437 БУ-ВД для дисков ГТД // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор-Сич». 2008. № 3. С. 106–110.
4. ГОСТ 10145-81 «Металлы. Метод испытания на длительную прочность». – М.: Государственный комитет СССР по стандартам, 1982. – 12 с.
5. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
6. Машиностроение. Энциклопедия. Т. II-3: Цветные металлы и сплавы. Композиционные металлические материалы. – М.: Машиностроение, 2001. – 880 с.
7. Локощенко А.М. Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // Известия Саратовского университета. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2009. Том. 9. Вып. 4. Ч. 2. С. 128–135.
8. Лебедев А.А. Обобщенный критерий длительной прочности // Термопрочность материалов и конструкционных элементов. – Киев.: Наукова думка, 1965. С. 69–76.
9. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Исследование длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1986. № 12. С. 3 – 8.
10. Каблов Е.Н., Голубовский Е.Р. Жаропрочность никелевых сплавов. – М.: Машиностроение. 1998. – 464 с.
11. Голуб В.П. Критерии длительного разрушения изотропных материалов при плоском напряженном состоянии // Теоретическая и прикладная механика. 2002. Вып. 35. С. 3–19.
12. Локощенко А.М., Мартыненко А.И., Платонов Д.О. Анализ критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии с учетом корректировки результатов испытаний // Проблемы динамики и прочности в газотурбостроении: Тез. докл. II международной науч.-техн. конф. ИПП НАНУ. – Киев, 2004. С. 119–121.
13. Широков В.Ф., Зарбалиев С.М. Математическая статистика: учеб. пособ. – М.: КолосС, 2009. – 480 с.

*Материал поступил в редакцию 15.03.2010*

**ЛОКОЩЕНКО  
Александр  
Михайлович**

E-mail: [loko@imec.msu.ru](mailto:loko@imec.msu.ru)  
Тел. 8 (495) 939-53-08

Доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Лауреат Государственной премии РСФСР. Действительный член РАЕН. Область научных интересов – механика деформируемого твердого тела. Автор более 200 научных работ, в том числе 4 монографий и учебных пособий.

**ПЛАТОНОВ  
Денис Олегович**

E-mail: [platonow@msiu.ru](mailto:platonow@msiu.ru)  
Тел. 8 (495) 620-39-28

Кандидат технических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики МГИУ. Область научных интересов – ползучесть и длительная прочность металлов. Автор 22 научных работ.