УДК 621.01

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕННОСТИ ПЛОСКИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Л. Н. Гудимова, Л. Т. Дворников

В статье проведен анализ четырех видов плоских шарнирных кинематических цепей, таких как цепи Грюблера, группы Ассура, «фермы» Баранова и механизмы в их ретроспекции и современном понимании. Рассмотрены и обоснованы основные параметры цепей. Изложен новый метод для поиска любых плоских стержневых кинематических цепей, в основе которого лежит универсальная структурная система. Приведены примеры синтеза рассмотренных кинематических цепей по предлагаемой методике.

Ключевые слова: *цепи Грюблера, группы Ассура, «фермы» Баранова, базисное звено, замкнутый контур, универсальная структурная система.*

Введение

Известно, что процесс создания новых машин и механизмов начинается с разработки его структурной схемы, которая должна не только удовлетворять условию задаваемого рабочего движения, т.е. функционального назначения, но и гарантировать работоспособность. Последнее условие может быть обеспечено лишь в том случае, если машина строится на основе безупречных требований теории структуры кинематических цепей.

При создании плоских стержневых механизмов это требование сводится к удовлетворению уравнения подвижности механической системы, обоснованному еще академиком П.Л. Чебышевым (1869 г.) и имеющему вид

$$W = 3n - 2p_5, \qquad (1)$$

где W – число степеней подвижности системы; n – число подвижных звеньев; p_5 – число одноподвижных (в частности, шарниров) кинематических пар.

При $W = 1$ в систему для получения механизма достаточно установить одно звено с заданным законом движения.

К настоящему времени есть основания считать, что теория структурного синтеза механизмов практически нашла свое полное разрешение. Это заключение не является общепризнанным в силу того, что пока не предпринимались попытки обобщить все полученные по этому направлению результаты исследований. В настоящей статье сделана попытка такого обобщения.

Ретроспективное исследование результатов изученности шарнирных кинематических цепей

Сравнительно недавно (2007 г.) профессором Э.Е. Пейсахом в [1] было обосновано существование четырех видов плоских кинематических цепей, а именно – кинематических цепей Грюблера, групп Ассура, «ферм» Баранова и, собственно, механизмов. В статье [1] автором приводится таблица реального количества перечисленных цепей в зависимости от числа звеньев в них (табл. 1).

Считая весьма важным полученный Э.Е. Пейсахом результат, отметим, что особенности всех указанных четырех видов цепей к настоящему времени еще недостаточно изучены и использованы. Обратимся к подробному рассмотрению перечисленных цепей, расположив их в хронологическом порядке, по времени их публикации в научной печати, а именно: цепи Грюблера (1883 г.), группы Ассура (1914–16 гг.) и «фермы» Баранова (1951 г.).

Свое исследование М.Ф. Грюблер [2] посвятил замкнутым (принудительным) кинематическим цепям, обладающим подвижностью $W = 4$, т.е. таким, которые не имеют открытых или свободных кинематических пар и обладают в плоскости четырьмя подвижностями: три – совместных для всей цепи – в плоскости и одну – относительного движения звеньев. Таким образом, в соответствии с (1) цепи Грюблера – это такие цепи, которые удовлетворяют условию

$$3n - 2p_5 = 4\ .$$

Таблица 1

Число различных кинематических цепей по Пейсаху

Число звеньев	Число групп Ассура	Число цепей Грюблера	Число механизмов	«Фермы» Баранова	
				Число звеньев	Число «ферм»
2	1	-	-	3	1
4	2	1	1	5	1
6	10	2	9	7	3
8	173	16	153	9	28
10	5442	230	4506	11	-
12	251638	6856	195816	13	-
14	-	318162	11429024	15	-

Например, если ввести в шарниры четыре звена так, как это показано на рис. 1, то, в соответствии с формулой Чебышева (1) эта цепь будет иметь подвижность $W = 12 - 8 = 4$.

Эта четырехзвенная кинематическая цепь – простейшая цепь Грюблера. Если в ней начать останавливать, т.е. делать неподвижными звенья 1, 2, 3 или 4, можно получать разные механизмы – двухкривошипные, кривошипно-коромысловые или двухкоромысловые. При этом структурно они не будут отличаться друг от друга – все они шарнирные четырехзвенники.

При увеличении числа звеньев до шести появятся шестизвенные цепи Грюблера. Чтобы их найти, Грюблером было введено понятие *i*-парных звеньев, т.е. звеньев различной сложности. Звенья могут быть двухпарные (n_2), как все звенья, показанные на рис. 1, трехпарные (n_3), четырехпарные (n_4) и т.д.

Учитывая это, Грюблером были введены два уравнения, описывающие исследуемые цепи:

$$\begin{cases} 2p_5 = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + ..., \\ n = n_2 + n_3 + n_4 + ... \end{cases} \qquad (2)$$

Двойка слева в первом уравнении обосновывается тем, что при сложении всех пар звеньев n_2, n_3, n_4 и т.д. они (пары) просчитываются дважды.

Рассмотрим шестизвенные цепи Грюблера. В таких цепях могут присутствовать лишь звенья n_2 и n_3 (хотя это обстоятельство Грюблером обосновано не было). Тогда, подставляя $n = 6$ в (1) и (2), получим $p_5 = 7$, $n_2 = 4$, $n_3 = 2$. Таких цепей Грюблера всего две (рис. 2).

Останавливая в этих цепях последовательно, т.е. делая неподвижными звенья 1, 2, 3, 4, 5 и 6, можно получить всего пять структурно отличающихся друг от друга шестизвенных механизмов, показанных на рис. 3. Три механизма (см. рис. 3, *а*, *б*, *в*) получаются из цепи, изображенной на рис. 2, *а*, и два – из цепи на рис. 2, *б*.

Если обратить внимание на стрелки, определяющие заданные движения звеньев на рис. 3, то всего из этих пяти схем можно создать девять отличающихся механизмов.

Именно эти девять кинематических цепей, обладающих подвижностью $W = 1$, являлись осно-

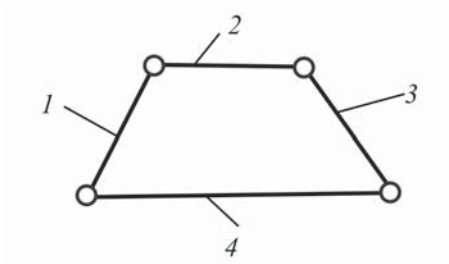


Рис. 1. Четырехзвенная замкнутая кинематическая цепь

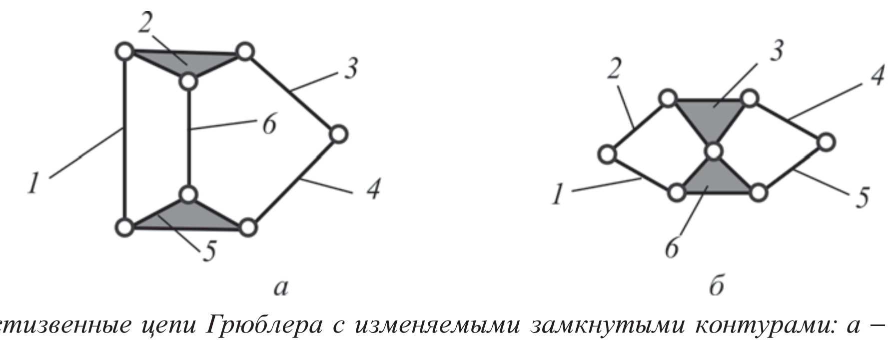


Рис. 2. Шестизвенные цепи Грюблера с изменяемыми замкнутыми контурами: а – α_4, α_5; б – α_4, α_4

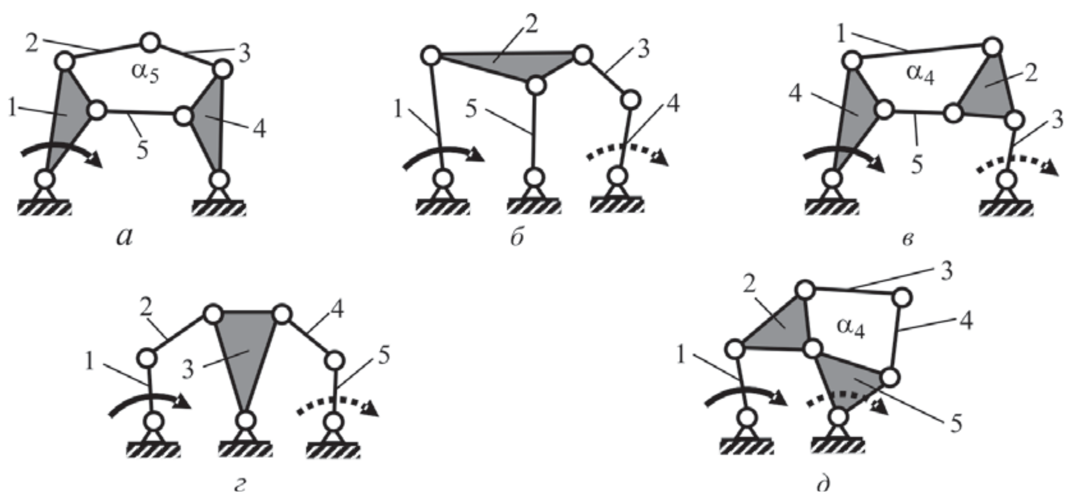


Рис. 3. Шестизвенные механизмы второго класса с изменяемыми замкнутыми контурами (а – α_5, д – α_4), без замкнутых контуров (б, г) и третьего класса (в)

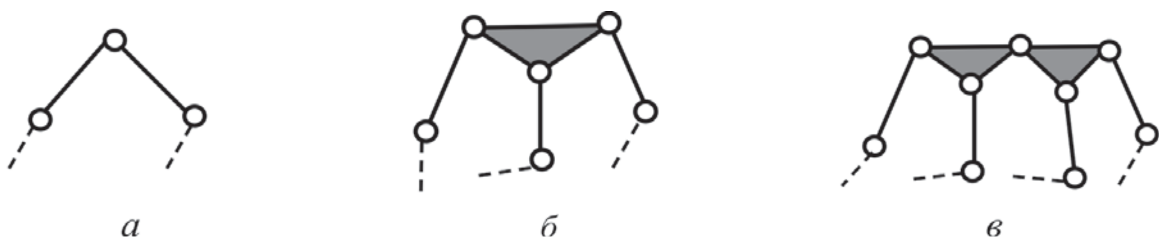


Рис. 4. Нормальные группы Асура: двухповодковая (а), трехповодковая (б), четырехповодковая (в)

вой создания реальных машин на протяжении долгого времени, и поэтому имя Грюблера остается исключительно популярным среди машиностроителей, особенно в Европе и в Америке.

Отметим, что Грюблер не решал и даже не ставил задачу о методе создания собственно названных его именем кинематических цепей.

Согласно табл. 1 Э.Е. Пейсаха, восьмизвенных цепей Грюблера – всего 16. Следует отметить, что по этому вопросу нет единого мнения. Например, в работе [3] приведены сведения о том, что таких цепей 20. Здесь важно другое, а именно, используя цепи Грюблера, можно находить все многообразие отличающихся друг от друга механизмов.

В начале прошлого века к проблеме создания многообразия шарнирных механизмов обратился русский ученый Л.В. Ассур. В работе [4] он обосновал общий принцип построения механизмов, который был сформулирован так: любой механизм может быть создан путем присоединения к ведущему звену группы или групп звеньев, обладающих нулевой подвижностью. Именно такие группы звеньев в дальнейшем стали называть группами Ассура. Л.В. Ассур в 1914 г. указывал на известность трех таких групп – на диаду Сильвестра (рис. 4, *а*), на трехповодковое звено Бурместера (рис. 4, *б*) и на четырехповодковую группу Грюблера (рис. 4, *в*).

Надо сказать, что сам Ассур находил и исследовал так называемые нормальные группы, т.е. такие, которые заканчиваются поводками (в частности, показанные на рис. 4) и не содержат внутри себя изменяемых замкнутых контуров.

В основе поиска групп Ассура лежит опять же формула (1) П.Л. Чебышева. Если поставить условие, что подвижность такой цепи $W = 0$, то все группы можно описать уравнением

$$p_5 = \frac{3n}{2}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что, вообще говоря, групп Ассура бесконечное множество. Задаваясь лишь конкретным значением n, можно находить и конечное число групп.

Л.В. Ассур не ставил перед собой задачу поиска всех возможных групп и показал лишь один из методов получения более сложных шарнирных групп – метод развития поводка. Позже были найдены всего две четырехзвенные группы и десять шестизвенных групп (В.В. Добровольский [5]). Но так как в практике машиностроения наиболее широко применяются так называемые диадные механизмы, то метод

Ассура остается исключительно востребованным и в настоящее время.

Однако широко используемый Ассуров метод синтеза механизмов поставил перед исследователями задачу, заключающуюся в нахождении собственно групп звеньев, которые обладают нулевой подвижностью и могут быть использованы для создания новых схем механизмов.

Значительных результатов в решении этого вопроса добился Г.Г. Баранов. В работе [6] им был предложен метод нахождения групп Ассура, в основу которого положено создание жесткой, замкнутой, неизменяемой группы звеньев, названной им «фермой». Сам метод заключается в получении групп Ассура путем последовательного отбрасывания одного из звеньев «фермы». Называя звенья с двумя кинематическими парами поводками, Г.Г. Баранов классифицировал «фермы» по числу поводков с указанием их класса.

Приведем для примера трехповодковые и четырехповодковые «фермы», состоящие из семи звеньев (рис. 5).

Определяя подвижность «ферм» по формуле (1) и полагая в них $n = 7$, а $p_5 = 9$, получим, что $W = 3$. То есть такие структуры, не имея внутренней подвижности, обладают тремя независимыми совместными движениями в плоскости (два поступательных и одно вращательное). Для таких кинематических цепей формула подвижности запишется в виде:

$$3n - 2p_5 = 3. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) можно найти число кинематических пар в виде зависимости

$$p_5 = \frac{3(n-1)}{2}.$$

Анализ этой зависимости показывает, что «фермами» Баранова будут являться структуры, состоящие из нечетного числа звеньев, начиная с трех, т.е. все они могут быть записаны в такой ряд: ($n = 3$, $p_5 = 3$), ($n = 5$, $p_5 = 6$), ($n = 7$, $p_5 = 9$), ($n = 9$, $p_5 = 12$). Покажем все десять групп Ассура, которые можно получить из приведенных на рис. 5 трех семизвенных «ферм».

Из «фермы» (см. рис. 5, *а*) можно создать три различные группы, они показаны на рис. 6, *а*, *б*, *в*. Группы Ассура (рис. 6, *г*, *д*, *е* и *ж*) созданы из «фермы», изображенной на рис. 5, *б*. И последние три группы нулевой подвижности (рис. 6, *з*, *и*, *к*) получены из «фермы» (см. рис. 6, *в*), содержащей четырехпарное звено.

Нам представляется, что «фермы» Баранова могут быть использованы и для другой цели, а именно, для получения кинематических цепей механизмов. Для этого нужно, не отбрасывать звенья, а размыкать цепь по одной из внешних кинематических пар, например по *A*, и использовать, таким образом, отсоединенное звено в качестве ведущего (рис. 7). Покажем это на примере первой «фермы», изображенной на рис. 5, *а*.

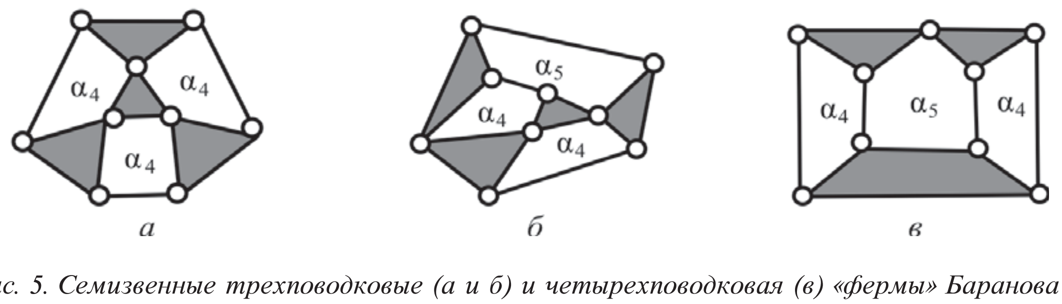
Все описанные выше кинематические цепи разработаны их авторами с практической целью – создавать из них работоспособные механизмы.

В последнее время начинает широко применяться новый метод синтеза структур механизмов, основанный на использовании универсальной структурной системы и опубликованный впервые в 1993 г. [7].

Метод синтеза плоских кинематических шарнирных цепей по универсальной структурной системе

Рассмотрим некоторую обобщенную разветвленную кинематическую цепь (рис. 8). Эту цепь, как и любую другую, можно охарактеризовать рядом присущих ей параметров, которые отличают ее от других рассматриваемых цепей.

Важнейшими и неотъемлемыми параметра-



а *б* *в*

Рис. 5. Семизвенные трехповодковые (а и б) и четырехповодковая (в) «фермы» Баранова

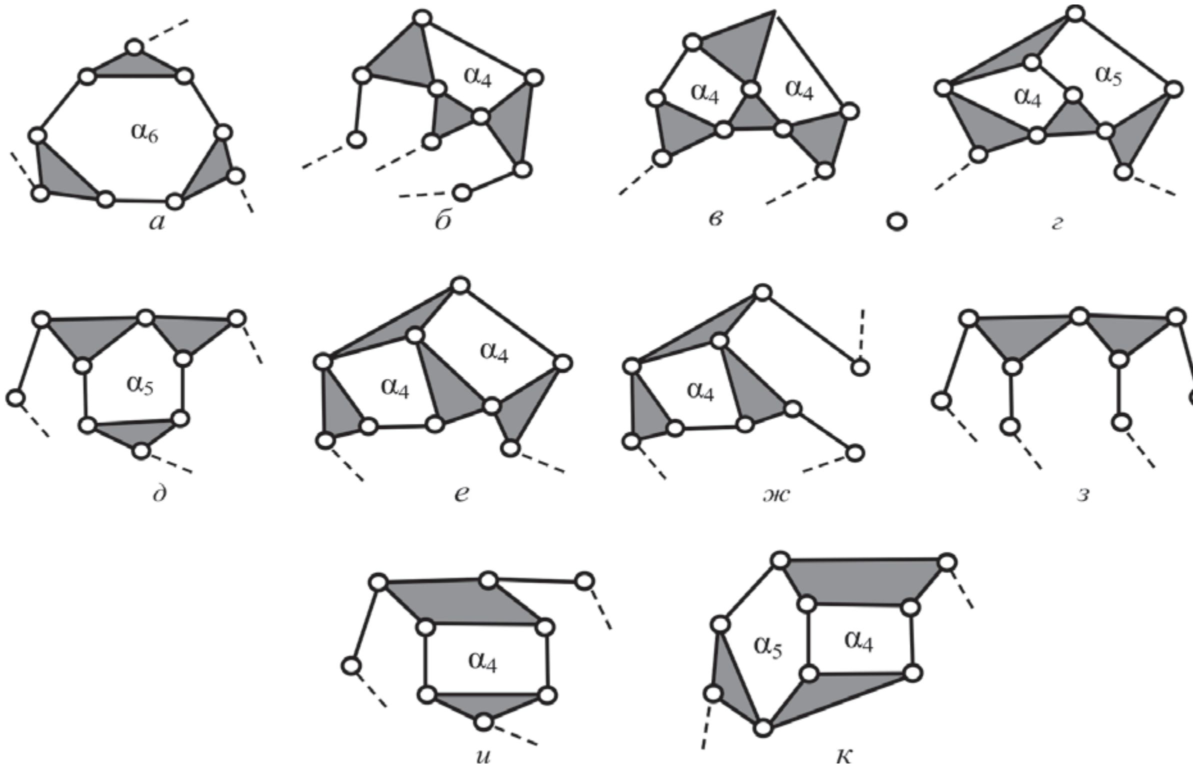


Рис. 6. Шестизвенные группы Ассура с базисным звеном τ = 3 и изменяемыми замкнутыми контурами α_6 (а), α_4 (3-3-4) (б), α_4, α_4 (3-5) (в), α_4, α_5 (г), α_5 (д), α_4, α_4 (4-4) (е), α_4 (3-4-4) (ж), нормальная (з); с базисным звеном τ = 4 α_4 (и), α_4, α_5 (к)

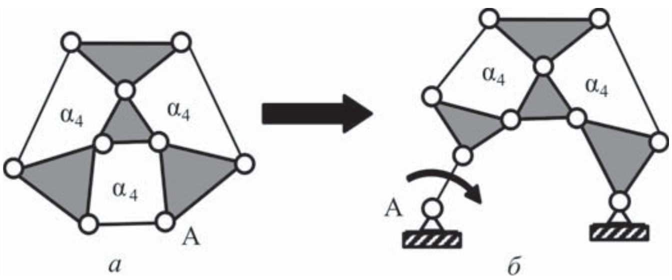


Рис. 7. Семизвенная «ферма» (а) и восьмизвенный плоский шарнирный механизм (б)

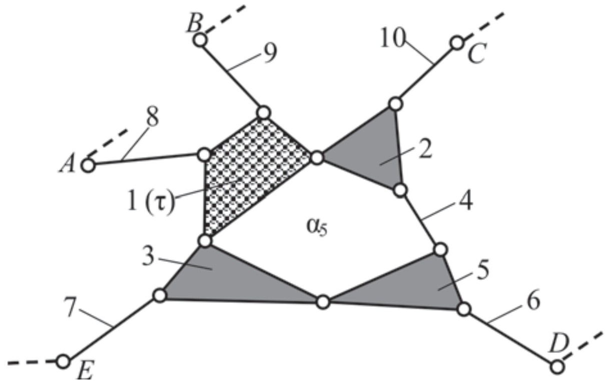


Рис. 8. Разветвленная кинематическая цепь: 1 – 10 звенья цепи различной сложности

ми являются следующие: n – число подвижных звеньев; p – число кинематических пар; τ – число кинематических пар наиболее сложного, базисного звена цепи, которыми оно соединяется с другими звеньями; δ – число выходов (свободных пар) цепи; α – число изменяемых замкнутых контуров в цепи; α_i – сложность изменяемых замкнутых контуров; γ – число ветвей цепи; λ – общее число сторон звеньев цепи ($\lambda_н$ – число наружных сторон, $\lambda_в$ – число внутренних сторон); $\lambda_н / \delta$ – распределение числа наружных сторон цепи между выходами, которые могут быть использованы как исходные при образовании любых по сложности машин и механизмов.

Сложная, разветвленная кинематическая цепь, содержащая линейные звенья 4, 6, 7, 8, 9, 10, трехпарные 2, 3, 5 и четырехпарное 1 (см. рис. 8), может быть описана двумя независимыми уравнениями вида

$$n = 1 + n_{\tau-1} + \ldots + n_i + \ldots + n_2 + n_1 + n_0; \qquad (6)$$

$$p = \tau + (\tau - 1)n_{\tau-1} + \ldots + in_i \ldots + 2n_2 + n_1, \qquad (7)$$

где n_i – число звеньев, добавляющих в цепь по i кинематических пар.

Если уравнения (6) и (7) объединить в систему с формулой подвижности Чебышева (1), то получим универсальную структурную систему вида:

$$\begin{cases} p_5=\tau+(\tau-1)n_{\tau-1}+...+in_i+...+2n_2+n_1; \\ n=1+n_{\tau-1}+...+in_i+...+n_2+n_1+n_0; \\ W=3n+2p_5. \end{cases} \qquad (8)$$

Она позволяет находить решения при поиске структур всех описанных выше кинематических цепей, задаваясь подвижностью: для цепей Грюблера – $W = 4$; для групп Ассура – $W = 0$; для «ферм» Баранова – $W = 3$; для механизмов – $W = 1$.

Если вместо формулы подвижности П.Л. Чебышева записать формулу подвижности В.В. Добровольского, то по приведенной универсальной системе (8) могут решаться задачи синтеза механических систем любого семейства от классически пространственных (при $m = 0$, где m – число общих наложенных на систему связей) до плоских клиновых (при $m = 4$) и при любом числе степеней их свободы

$$\begin{cases} p_5=\tau+(\tau-1)n_{\tau-1}+...+in_i+...+2n_2+n_1; \\ n=1+n_{\tau-1}+...+in_i+...+n_2+n_1+n_0; \\ W_m=(6-m)n-\sum\limits_{5}^{(k-m)=1}(k-m)p_k. \end{cases} \qquad (8)$$

Покажем пример поиска шестизвенных цепей Грюблера. Для них $n = 6$, $W = 4$. Зададимся $\tau = 3$ и получим из (8)

$$\begin{cases} p_5=3+2n_2+n_1; \\ n=1+n_2+n_1+n_0; \\ 3n+2p_5=4. \end{cases} \qquad (9)$$

Из третьего уравнения системы (9) при $n = 6$ найдем, что $p_5 = 7$. Подставим $p_5 = 7$ и $n = 6$ в первое и второе уравнения системы (9), соответственно, и получим, что

$$2n_2+n_1=4;$$

$$n_2+n_1+n_0=5.$$

Выразим из второго уравнения

$$n_1=5-n_2-n_0. \qquad (10)$$

Подставим (10) в первое уравнение $2n_2+5-n_2-n_0=4$, тогда

$$n_2=n_0-1. \qquad (11)$$

Значение n_2, полученное по (11), подставим в уравнение (10) и определим число звеньев, добавляющих в цепь по одной кинематической паре $n_1=5-n_0+1-n_0=6-2n_0$. Из (11) следует, что значение $n_0 = 0$ не допустимо. Примем $n_2 = 1$, тогда $n_0 = 2$, а $n_1 = 2$. По найденному решению получены цепи Грюблера, показанные на рис. 2.

Найдем все группы Ассура ($W = 0$) при $n = 4$, $p_5 = 6$ и $\tau = 3$. Из системы (8) получим

$$2n_2+n_1=3;$$

$$n_2+n_1+n_0=3.$$

Выразим из второго уравнения $n_1=3-n_2-n_0$. Подставив значение n_1 в первое уравнение, получим $2n_2+3-n_2-n_0=3$, т.е. $n_2=n_0$. Тогда $n_1=3-2n_0$. Очевидно, что в этом случае возможно единственное решение, когда $n_2 = 0$, $n_1 = 3$, $n_0 = 0$. Полученному решению соответствуют группы Ассура, показанные на рис. 9.

Найдем «фермы» Баранова при $n = 5$ и при $\tau = 3$. Из третьего уравнения системы (8), когда $W = 3n - 2p_5 = 3$, получим $p_5=\frac{15-3}{2}=6$. При этом первое и второе уравнения системы (8) примут вид

$$2n_2+n_1=3;$$

$$n_2+n_1+n_0=4.$$

Выразим из второго уравнения $n_1=4-n_2-n_0$. При подстановке этого значения n_1 в первое уравнение получим $2n_2+4-n_2-n_0=3$ или $n_2=n_0-1$. И тогда $n_1=4-n_0+1-n_0=5-2n_0$. Пусть $n_0 = 1$, тогда $n_2 = 0$, $n_1 = 3$, если $n_0 = 2$, то $n_2 = 1$, $n_1 = 1$. Оба решения реализуемы (рис. 10). На рисунке 10, *а* приведено решение, когда $n_0 = 1$, $n_2 = 0$, $n_1 = 3$. В этом случае при синтезе «фермы» к базисному звену τ последовательно сначала должны быть присоединены два двухпарных звена, затем одно трехпарное. Каждое из этих звеньев добавляет в цепь по одной свободной кинематической паре, т.е. являются зве-

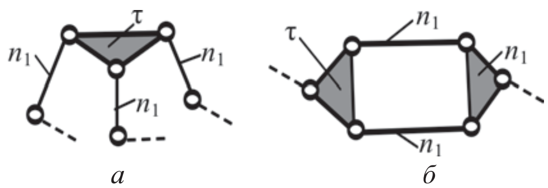


Рис. 9. Четырехзвенные группы Ассура: а – трехповодковая; б – с изменяемым замкнутым контуром

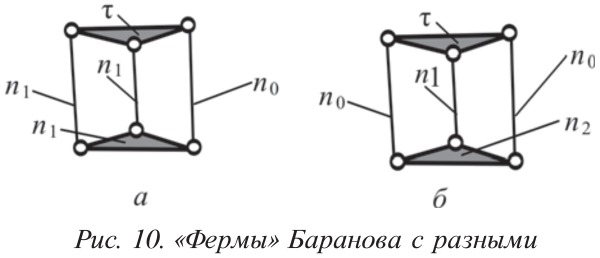


Рис. 10. «Фермы» Баранова с разными значениями n_i: а – $n_0 = 1$, $n_1 = 3$; б – $n_0 = 2$, $n_2 = 1$, $n_1 = 1$

ньями (n_1), а четвертое звено n_0 замыкает цепь, а значит, не добавляет в нее ни одной кинематической пары. Создание «фермы» Баранова при полученных значениях $n_0 = 2$, $n_2 = 1$, $n_1 = 1$ (см. рис. 10, *б*) производится следующим образом: к базисному звену τ присоединяется двухпарное звено, добавляющее в цепь одну пару (n_1), трехпарное же звено, соединяясь с ним, добавит в цепь две пары (n_2), а два линейных звена n_0 замкнут цепь.

Таким образом, несмотря на то, что количество звеньев n_0, n_1 и n_2 в решениях разные, полученные кинематические цепи «ферм» Баранова структурно одинаковы, т.е. содержат три двухпарных и два трехпарных звена.

Обратимся к механизмам, у которых $W = 1$. Тогда при $\tau = 2$, из системы уравнений (8) получим три следующих уравнения

$$p_5 = 2 + n_1; \tag{12}$$

$$n = 1 + n_1 + n_0; \tag{13}$$

$$3n - 2p_5 = 1. \tag{14}$$

Из уравнения (13) выразим число звеньев, добавляющих в цепь по одной кинематической паре, $n_1 = n - 1 - n_0$. Подставим это значение в уравнение (12) и получим $p_5 = 2 + n - 1 - n_0$. При этом уравнение (14) примет вид $3n - 2p_5 = 3n - 4 - 2n + 2 + n_0 = 1$, откуда $n + 2n_0 = 3$ и $n_0 = 0$, $n = 3$, $n_1 = 2$. Полученному решению соответствует механизм на рис. 1.

Заключение

На основании рассмотренных примеров можно сделать вывод, что предлагаемый метод синтеза плоских шарнирных кинематических цепей, основанный на использовании универсальной структурной системы (8), применим для поиска любых кинематических цепей, в том числе цепей Грюблера, групп Ассура, «ферм» Баранова и механизмов.

Список литературы

1. Пейсах Э.Е. О группах Ассура, фермах Баранова, цепях Грюблера, плоских шарнирных механизмах и об их структурном синтезе // Инженерное образование: Наука и образование: интернет-журн. 04.04.2007. – режим доступа: www. technomag.ldu.ru (дата обращения: 08.02.2010).
2. Grübler M. Allgemeine Eigenschaften für Zwanglaüfigen ebenen kinematischen Ketten. – Civiningenieur. 1883. 29. S. 167–200.
3. Дворников Л.Т., Федоров А.И. О сущности и возможности метода М. Грюблера применительно к синтезу структур плоских механизмов // Материалы шестнадцатой научно-практической конференции по проблемам механики и машиностроения. Новокузнецк, 2006. С. 82–94.
4. Ассур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. – М., Изд-во АН СССР, 1952. – 588 с.
5. Добровольский В.В., Артоболевский И.И. Структура и классификация механизмов. – М.: Изд-во АН СССР, 1939. – 47 с.
6. Баранов Г.Г. Классификация, строение, кинематика и кинетостатика плоских механизмов с парами первого рода // Тр. семинара по теории механизмов и машин. 1952. Т. 2, вып. 46. С. 16–39.
7. Дворников Л.Т. Новые формализации в структуре механизмов // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1993. № 1. С. 3–8.

Материал поступил в редакцию 22.09.2009

ДВОРНИКОВ Леонид Трофимович

E-mail: **tmmiok@yandex.ru**
Тел. **(8-384-3)-46-57-91**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теории механизмов и машин и основ конструирования Сибирского государственного индустриального университета. Область научных интересов – теория механизмов и машин, структурный синтез, бурильные машины. Автор 362 научных публикаций.

ГУДИМОВА Людмила Николаевна

E-mail: **lyu-qudiova@yandex.ru**
Тел. **(8-384-3)-46-57-91**

Кандидат технических наук, декан транспортно-механического факультета, доцент кафедры теории механизмов и машин и основ конструирования Сибирского государственного индустриального университета. Область научных интересов – структурный анализ и синтез плоских шарнирных многозвенных кинематических цепей. Автор 44 научных публикаций.