

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КВАРЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ*

А. М. Гуськов, Е. А. Коровайцева, А. Е. Шохин

Статья посвящена исследованию свободных колебаний пьезоэлектрических пластин с произвольной анизотропией. Представлен вывод уравнений планарных и сдвиговых по толщине колебаний прямоугольных пластин. Приведены результаты расчета собственных частот и форм колебаний кварцевых пластин типовых срезов.

Ключевые слова: пьезоэлектрическая сплошная среда, срез пластины, планарные колебания, метод Галеркина, сдвиговые колебания.

Введение

Изделия из пьезоэлектрических материалов широко используются в электронной промышленности в качестве источника электромеханических колебаний. Расчет собственных частот колебаний пьезоэлектрических пластин представляет сложную задачу в связи с анизотропией свойств таких материалов. Вид и частота колебаний кварцевой пластины в значительной степени определяются срезом пьезоэлемента – его ориентацией относительно кристаллографических осей кварца. Число срезов достигает нескольких десятков [1], для каждого среза существует условное обозначение (рис. 1). Для решения задачи о колебаниях пластин из пьезоэлектрических материалов разработано несколько теорий, основанных на аппроксимации двумерных уравнений, получаемых разложением выбранных величин в ряд. В теоретических работах, посвященных анализу свойств пьезоэлектрических пластин, используются два типа разложения: разложение в степенной ряд и разложение с помощью полиномов Лежандра, причем все уравнения представлены в координатной форме [2, 3, 4].

В данной статье представлен вывод уравнений планарных и сдвиговых по толщине колебаний пьезоэлектрических пластин в векторно-матричной и операторной формах соответственно. Для расчета планарных колебаний используется метод Галеркина, причем в качестве координатных функций приняты собственные формы колебаний пластин из изотропного материала. Приводятся примеры численного расчета собственных частот и форм колебаний пластин из основного пьезоматериала – кварца.

Вывод уравнения планарных колебаний пластины

В общем виде система уравнений движения пьезоэлектрической сплошной среды представляется следующими соотношениями [5]:

– уравнениями движения Ньютона

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_x, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_y, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_z; \end{aligned} \quad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» № 2.1.2/5277 и гранта РФФИ № 10-08-00640-а.

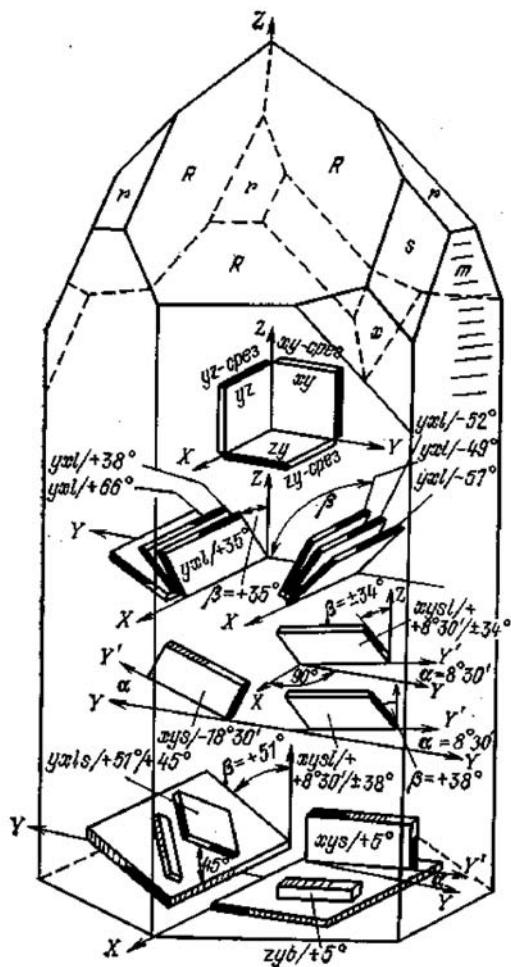


Рис. 1. Кристалл кварца с расположением срезов относительно кристаллографических осей x, y, z

– уравнениями вынужденной электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \psi; \quad (2)$$

– уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}^E \varepsilon_x + c_{12}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z + c_{14}^E \varepsilon_{yz} + c_{15}^E \varepsilon_{zx} + c_{16}^E \varepsilon_{xy} - \\ &- e_{11} E_x - e_{21} E_y - e_{31} E_z, \\ \sigma_y &= c_{12}^E \varepsilon_x + c_{22}^E \varepsilon_y + c_{23}^E \varepsilon_z + c_{24}^E \varepsilon_{yz} + c_{25}^E \varepsilon_{zx} + c_{26}^E \varepsilon_{xy} - \\ &- e_{12} E_x - e_{22} E_y - e_{32} E_z, \\ \sigma_z &= c_{13}^E \varepsilon_x + c_{23}^E \varepsilon_y + c_{33}^E \varepsilon_z + c_{34}^E \varepsilon_{yz} + c_{35}^E \varepsilon_{zx} + c_{36}^E \varepsilon_{xy} - \\ &- e_{13} E_x - e_{23} E_y - e_{33} E_z, \\ \tau_{yz} &= c_{14}^E \varepsilon_x + c_{24}^E \varepsilon_y + c_{34}^E \varepsilon_z + c_{44}^E \varepsilon_{yz} + c_{45}^E \varepsilon_{zx} + c_{46}^E \varepsilon_{xy} - \\ &- e_{14} E_x - e_{24} E_y - e_{34} E_z, \\ \tau_{zx} &= c_{15}^E \varepsilon_x + c_{25}^E \varepsilon_y + c_{35}^E \varepsilon_z + c_{45}^E \varepsilon_{yz} + c_{55}^E \varepsilon_{zx} + c_{56}^E \varepsilon_{xy} - \\ &- e_{15} E_x - e_{25} E_y - e_{35} E_z, \\ \tau_{xy} &= c_{16}^E \varepsilon_x + c_{26}^E \varepsilon_y + c_{36}^E \varepsilon_z + c_{46}^E \varepsilon_{yz} + c_{56}^E \varepsilon_{zx} + c_{66}^E \varepsilon_{xy} - \\ &- e_{16} E_x - e_{26} E_y - e_{36} E_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11}^S E_x + \varepsilon_{12}^S E_y + \varepsilon_{13}^S E_z + e_{11} \varepsilon_x + e_{12} \varepsilon_y + e_{13} \varepsilon_z + \\ &+ e_{14} \varepsilon_{yz} + e_{15} \varepsilon_{zx} + e_{16} \varepsilon_{xy}, \\ D_y &= \varepsilon_{12}^S E_x + \varepsilon_{22}^S E_y + \varepsilon_{23}^S E_z + e_{21} \varepsilon_x + e_{22} \varepsilon_y + e_{23} \varepsilon_z + \\ &+ e_{24} \varepsilon_{yz} + e_{25} \varepsilon_{zx} + e_{26} \varepsilon_{xy}, \\ D_z &= \varepsilon_{13}^S E_x + \varepsilon_{23}^S E_y + \varepsilon_{33}^S E_z + e_{31} \varepsilon_x + e_{32} \varepsilon_y + e_{33} \varepsilon_z + \\ &+ e_{34} \varepsilon_{yz} + e_{35} \varepsilon_{zx} + e_{36} \varepsilon_{xy}; \end{aligned} \quad (3)$$

– соотношениями Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ – вектор перемещений; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ – компоненты тензора деформаций; $\mathbf{D} = \{D_x, D_y, D_z\}^T$ – вектор электрической индукции; $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}^T$ – вектор напряженности электрического поля; ψ – функция электростатического потенциала; ρ – плотность материала; c_{ij}^E ($i=1,6; j=1,6$) – составляющие тензора коэффициентов жесткости, измеренные при постоянном электрическом поле; e_{ij} ($i=1,3; j=1,6$) – составляющие тензора пьезоэлектрических коэффициентов; ε_{ij}^S ($i=1,3; j=1,3$) – составляющие тензора диэлектрических проницаемостей.

Система (1)–(4) содержит 22 уравнения с 22 неизвестными. Для вывода уравнений планарных колебаний пластины (рис. 2) используем гипотезу о плоском электроупругом состоянии и в соответствии с ней полагаем

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \\ u_x &= u_x(x, y, t), \quad u_y = u_y(x, y, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Для пластины с электродными покрытиями при $z = \pm a$ соотношения (5) дополняются равенством

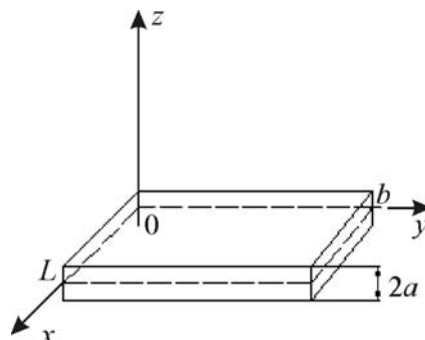


Рис. 2. Система координат

$$\psi = -zE(t).$$

Запишем соотношения (1)–(4) в векторно-матричной форме с учетом принятых предположений. Введем векторы:

$$\mathbf{u} = \{u_x \ u_y\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy}\}^T, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\varepsilon_z \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{zx}\}^T, \\ \mathbf{E} = \{E_x \ E_y\}^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^T.$$

Тогда соотношения Коши примут вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \\ \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соотношения (3) с учетом принятых предположений для случая планарных колебаний пластины принимают вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}_2 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_3 \mathbf{E} + E_z \mathbf{e}_4; \quad (6)$$

$$\mathbf{c}_{11} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{c}_{12} \mathbf{E} = \mathbf{d}_{11} \mathbf{e} + E_z \mathbf{d}_{12}; \quad (7)$$

$$\mathbf{c}_{21} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{c}_{22} \mathbf{E} = \mathbf{d}_{21} \mathbf{e} + E_z \mathbf{d}_{22}; \quad (8)$$

$$D_z = \mathbf{d}_1^T \mathbf{E} + d_2 E_z + \mathbf{d}_3^T \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{d}_4^T \boldsymbol{\xi}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{16}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{26}^E \\ c_{16}^E & c_{26}^E & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E \\ c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E \\ c_{36}^E & c_{46}^E & c_{56}^E \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_3 = -\begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \\ e_{16} & e_{26} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = -\begin{bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}_{11} = \begin{bmatrix} c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E \\ c_{34}^E & c_{44}^E & c_{45}^E \\ c_{35}^E & c_{45}^E & c_{55}^E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{12} = -\begin{bmatrix} e_{13} & e_{23} \\ e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{21} = \begin{bmatrix} e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ e_{23} & e_{24} & e_{25} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{22} = \begin{bmatrix} e_{11}^S & e_{12}^S \\ e_{21}^S & e_{22}^S \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{d}_{11} = -\begin{bmatrix} c_{13}^E & c_{23}^E & c_{36}^E \\ c_{14}^E & c_{24}^E & c_{46}^E \\ c_{15}^E & c_{25}^E & c_{56}^E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{12} = \begin{bmatrix} e_{33} \\ e_{34} \\ e_{35} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_{21} = -\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{26} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{22} = -\begin{bmatrix} e_{13}^S \\ e_{23}^S \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{d}_1 = \{\varepsilon_{13}^S \ \varepsilon_{23}^S\}^T, \quad \mathbf{d}_2 = \{\varepsilon_{33}^S\}.$$

$$\mathbf{d}_3 = \{e_{31} \ e_{32} \ e_{35}\}^T, \quad \mathbf{d}_4 = \{e_{33} \ e_{34} \ e_{35}\}^T.$$

Система уравнений (7)–(8) позволяет рассчитать вектора $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{E}$:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{d}_{11}^{**} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{d}_{12}^{**} E_z;$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{d}_{21}^{**} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{d}_{22}^{**} E_z; \quad (9)$$

$$\mathbf{d}_{11}^{**} = \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{d}_{11} - \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{c}_{12} \mathbf{d}_{21}^{**};$$

$$\mathbf{d}_{12}^{**} = \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{d}_{12} - \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{c}_{12} \mathbf{d}_{22}^{**};$$

$$\mathbf{d}_{21}^{**} = (\mathbf{c}_{22} - \mathbf{c}_{21} \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{c}_{12})^{-1} (\mathbf{d}_{21} - \mathbf{c}_{21} \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{d}_{11});$$

$$\mathbf{d}_{22}^{**} = (\mathbf{c}_{22} - \mathbf{c}_{21} \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{c}_{12})^{-1} (\mathbf{d}_{22} - \mathbf{c}_{21} \mathbf{c}_{11}^{-1} \mathbf{d}_{12}).$$

Подставляя (9) в (6), имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_1^* \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}_4^* E_z; \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{d}_{11}^{**} + \mathbf{e}_3 \mathbf{d}_{21}^{**};$$

$$\mathbf{e}_4^* = \mathbf{e}_2 \mathbf{d}_{12}^{**} + \mathbf{e}_3 \mathbf{d}_{22}^{**} + \mathbf{e}_4.$$

Дифференциальные уравнения движения (1) для случая планарных колебаний имеют вид:

$$\mathbf{B}_x \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} + \mathbf{B}_y \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя (10) в (11) и учитывая (4), получаем дифференциальное уравнение движения в перемещениях:

$$\mathbf{B}_x^* \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \mathbf{B}_y^* \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \mathbf{B}_{xy}^* \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_x^* = \mathbf{B}_x \mathbf{e}_1^* \mathbf{A}_x; \quad \mathbf{B}_y^* = \mathbf{B}_y \mathbf{e}_1^* \mathbf{A}_y;$$

$$\mathbf{B}_{xy}^* = \mathbf{B}_x \mathbf{e}_1^* \mathbf{A}_y + \mathbf{B}_y \mathbf{e}_1^* \mathbf{A}_x. \quad (13)$$

Вывод уравнения сдвиговых по толщине колебаний пластины

Для вывода уравнений сдвиговых по толщине колебаний запишем систему (1)–(4) в операторной форме, используя матрицу дифференциальных операторов

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx} \ \sigma_{xy}\}^T$ и вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{zx} \ \varepsilon_{xy}\}^T$. Тогда уравнения (1)–(4) примут вид:

$$\mathbf{L}\sigma = \rho\ddot{\mathbf{u}}; \quad (14)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0;$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \psi;$$

$$\sigma = \mathbf{c}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \mathbf{E}; \quad (15)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} + \mathbf{e}^T \boldsymbol{\varepsilon}; \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}. \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{c}^E$ – матрица коэффициентов жесткости, измеренных при постоянном электрическом поле; $\mathbf{e}$ – матрица пьезоэлектрических коэффициентов; $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ – матрица диэлектрических проницаемостей.

Подставляя (17) в (15) и (16), получаем

$$\sigma = \mathbf{c}^E \mathbf{L}^T \mathbf{u} - \mathbf{e} \mathbf{E}; \quad (18)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} + \mathbf{e}^T \mathbf{L}^T \mathbf{u}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (14), имеем

$$\mathbf{L} \mathbf{c}^E \mathbf{L}^T \mathbf{u} - \mathbf{L} \mathbf{e} \mathbf{E} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (20)$$

При значении вектора электрической индукции $\mathbf{D} = 0$ из (19) получаем

$$\mathbf{E} = -(\boldsymbol{\varepsilon}^S)^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{L}^T \mathbf{u}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получим

$$\mathbf{L} \mathbf{c}^E \mathbf{L}^T \mathbf{u} + \mathbf{L} \mathbf{e} (\boldsymbol{\varepsilon}^S)^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{L}^T \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (22)$$

Для сдвиговых по толщине колебаний со смещением в направлении оси x ($u_x \neq 0$; $u_y = u_z = 0$; $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$) из (22) получим уравнение:

$$C \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \quad (23)$$

$$C = c_{55}^E + e_{15} (\varepsilon_{11}' e_{15} + \varepsilon_{12}' e_{25} + \varepsilon_{13}' e_{35}) + \\ + e_{25} (\varepsilon_{21}' e_{15} + \varepsilon_{22}' e_{25} + \varepsilon_{23}' e_{35}) + \dots \\ \dots + e_{15} (\varepsilon_{31}' e_{15} + \varepsilon_{32}' e_{25} + \varepsilon_{33}' e_{35}).$$

Здесь ε_{ij}' – коэффициенты матрицы, обратной матрице диэлектрических проницаемостей.

Планарные колебания прямоугольной пластины

Рассматриваемая прямоугольная пластина (см. рис. 2) заделана по контуру. Граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{u}(0, y) = 0, \mathbf{u}(L, y) = 0; \\ \mathbf{u}(x, 0) = 0, \mathbf{u}(x, b) = 0. \quad (24)$$

Для решения краевой задачи (12), (24) воспользуемся методом Галеркина [6]. В качестве координатных функций, удовлетворяющих краевым условиям (24) используем:

$$\sin \frac{j\pi x}{L}, \quad j = 1, 3, 5, \dots, n \text{ по направлению } x;$$

$$\sin \frac{j\pi y}{b}, \quad j = 1, 3, 5, \dots, m \text{ по направлению } y.$$

Поскольку кварцевые резонаторы работают только на нечетных гармониках, в координатных функциях рассматриваем только нечетные гармоники.

Решение (12) представим в виде ряда Фурье:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \Phi(x) \mathbf{u}(t) \mathbf{F}(y); \quad (25)$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) & \dots & \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_{x,1,1}(t) & u_{x,1,3}(t) & \dots & u_{x,1,m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{x,n,1}(t) & u_{x,n,3}(t) & \dots & u_{x,n,m}(t) \\ u_{y,1,1}(t) & u_{y,1,3}(t) & \dots & u_{y,1,m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{y,n,1}(t) & u_{y,n,3}(t) & \dots & u_{y,n,m}(t) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}(y) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \\ \dots \\ \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix}.$$

Подставляя (25) в (12) и применяя процедуру ортогонализации, получаем уравнение

$$\left(-\frac{\pi^2 n^2 b}{4L} \mathbf{B}_x^* - \frac{\pi^2 m^2 L}{4b} \mathbf{B}_y^*\right) \mathbf{u}_{i,j} - \rho \frac{Lb}{4} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{i,j}}{\partial t^2} = 0, \\ i = 1, 3, 5, \dots, n, \quad j = 1, 3, 5, \dots, m.$$

Для собственных гармонических колебаний с частотой ω получаем задачу на собственные значения:

$$\left(\frac{\pi^2}{\rho} \left(\frac{n^2}{L^2} \mathbf{B}_x^* + \frac{m^2}{b^2} \mathbf{B}_y^*\right) - \omega^2 \mathbf{I}\right) \mathbf{u}_{i,j} = 0, \quad (26)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Для примера рассмотрим пластину SC-среза ($yxbll/+22,4^\circ/+34,3^\circ$), имеющую размеры:

$L = 6$ мм, $b = 6$ мм, $2a = 120$ мкм. Матрицы (13) в этом случае имеют числовые значения (в Па)

$$\mathbf{B}_x^* = \begin{pmatrix} 6,025 & -0,041 \\ -0,041 & 2,925 \end{pmatrix} \cdot 10^{10},$$

$$\mathbf{B}_y^* = \begin{pmatrix} 2,93 & 1,12 \\ 1,12 & 4,22 \end{pmatrix} \cdot 10^{10}.$$

Уравнение (26) решалось численно в среде *Matlab 7*. В результате расчета были получены значения собственных частот планарных колебаний пластины (табл.). В силу электромеханической анизотропии кварца матрицы (13) – не-сферические, поэтому каждому набору форм колебаний соответствуют две частоты.

Таблица

Значения частот планарных колебаний для пластины SC-среза с размерами $L = 6$ мм, $b = 6$ мм

Номер гармоники		Частота, МГц
по оси x, i	по оси y, j	
1	1	0,417
		0,498
1	3	0,821
		1,12
3	1	1,22
		0,894
3	3	1,25
		1,49

Примеры распределения полей безмерных перемещений $\mathbf{u}$ и вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ для частот 0,417 МГц, 0,498 МГц, 1,22 МГц и 0,894 МГц показаны на рис. 3. Компоненты вектора напряженности электрического поля были рассчитаны по (21) и (25) для случая свободных колебаний ($E_z = 0$):

$$\mathbf{E} = \mathbf{d}_{21}^{**} \left(\mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right),$$

где матрица $\mathbf{d}_{21}^{**}$ имеет вид

$$\mathbf{d}_{21}^{**} = \begin{pmatrix} -2,22 & 1,07 & 3,02 \\ 2,53 & -1,16 & 1,32 \end{pmatrix} [\text{В/м}].$$

Изображения на рис. 3 свидетельствуют о том, что при одинаковых формах колебаний распределение компонент вектора напряженности электрического поля различается, что связано с анизотропией кварца.

Сдвиговые по толщине колебания прямоугольных пластин

Для случая свободных колебаний граничные условия имеют вид:

$$z = \pm a, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0.$$

Решение уравнения (23) ищем в виде [2]

$$u_x(z, t) = A \sin\left(\frac{\pi n z}{2a}\right) \sin \omega t. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (23), получаем

$$\left(-C \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 + \rho \omega^2 \right) A \sin\left(\frac{\pi n z}{2a}\right) = 0.$$

Тогда выражение для собственной частоты сдвиговых колебаний пластины имеет вид

$$\omega = \frac{\pi n}{2a} \sqrt{\frac{C}{\rho}}.$$

Для пластины SC-среза¹ значение собственной частоты колебаний для третьей гармоники 47,4833 МГц. Форма колебаний пластины приведена на рис. 4.

Заключение

В статье описана процедура получения уравнений, позволяющих рассчитывать собственные частоты и формы планарных и сдвиговых по толщине колебаний пьезоэлектрических пластин, в том числе кварцевых пластин произвольного среза. Приведенный численный анализ показал, что разработанная методика позволяет с высокой степенью точности определять частотный спектр описанных типов колебаний пластин.

Список литературы

1. Глюкман Л.И. Пьезоэлектрические кварцевые резонаторы. – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.
2. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах. – М.: Мир. 1990. – 584 с.
3. Тирстен Х.Ф., Миндлин Р.Д. Вынужденные колебания пьезоэлектрических пластин // Прикладная математика. 1962. № 20. – С. 107-110.
4. Холланд Р., Эрнис Е.П. Конструкции резонансных пьезоэлектрических устройств. Кембридж: Пресса М.И.Т., 1979. – 231 с.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 277 с.

¹ Для других срезов расчеты проводятся аналогично.

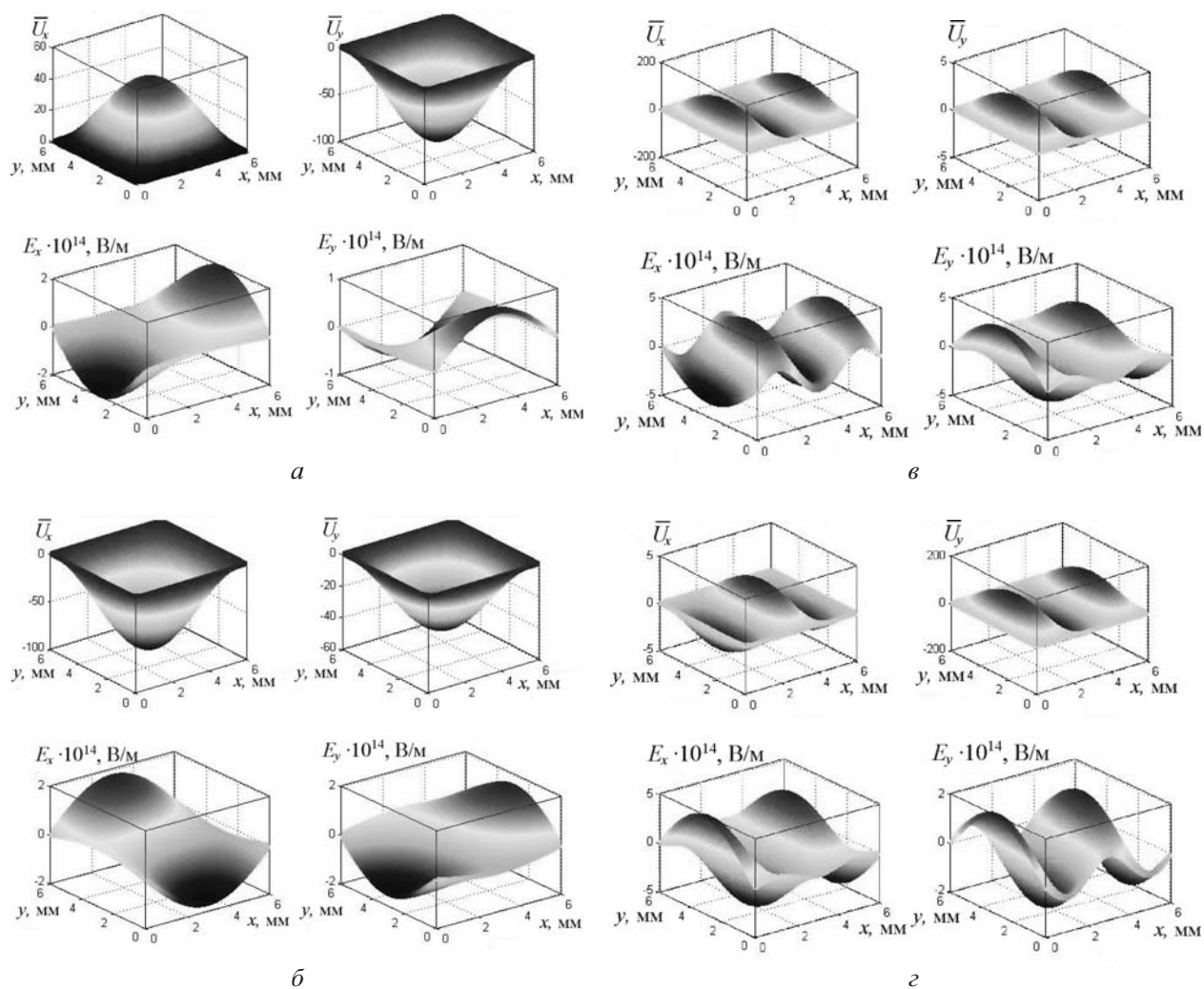


Рис. 3. Распределение полей безразмерных перемещений U и вектора напряженности электрического поля E при планарных колебаниях пластины SC-среза для гармоник:

- а) – 1 по оси x , 1 по оси y , $p=0,417$ МГц;
- б) – 1 по оси x , 1 по оси y , $p=0,498$ МГц;
- в) – 3 по оси x , 1 по оси y , $p=1,22$ МГц;
- г) – 3 по оси x , 1 по оси y , $p=0,894$ МГц

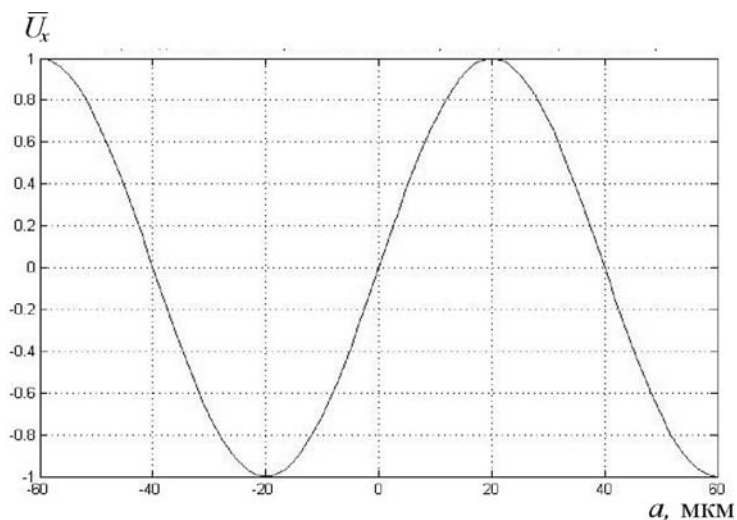


Рис. 4. Форма сдвиговых по толщине колебаний для третьей гармоники, частота $p=47,4833$ МГц; $\bar{U}_x$ – безразмерное перемещение

6. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.

Материал поступил в редакцию 25.06.2010

**ГУСЬКОВ
Александр
Михайлович**

E-mail: gouskov_am@mail.ru
Тел. +7 (499) 263-64-87

Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Специалист в области прикладной механики, динамики технологических систем, теории устойчивости движения и нелинейной механики. Автор более 100 научных работ.

**КОРОВАЙЦЕВА
Екатерина
Анатольевна**

E-mail: katrell@mail.ru
Тел. +7 (499) 263-64-87

Ассистент и аспирант кафедры прикладной механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов – нелинейная динамика кварцевого генератора, динамика механических систем, численные методы математического моделирования. Автор двух научных публикаций.

**ШОХИН
Александр
Евгеньевич**

E-mail: Rudenko@msiu.ru
Тел. +7 (499) 135-30-47

Научный сотрудник лаборатории вибромеханики Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Область научных интересов – динамика механических систем, виброзащита, вибрационные измерения. Автор двух научных публикаций.

Уважаемые читатели!

Журнал «Машиностроение и инженерное образование» входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора или кандидата наук.

Аннотации статей на русском и английском языках размещены на интернет-странице журнала: www.mio.msiu.ru