

УСЛОВИЯ ПЕРЕДАЧИ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКИХ МАНИПУЛЯТОРАХ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ*

С. Брио, В. Аракелян, В. А. Глазунов

В статье проведен анализ углов давления и реакции в кинематических парах плоских манипуляторов параллельной структуры. Показано, что вблизи сингулярностей углы давления и реакции повышаются. Построены рабочие зоны манипуляторов, ограниченные максимальными реакциями в кинематических парах.

Ключевые слова: плоский манипулятор параллельной структуры, сингулярность, угол давления, рабочая зона.

Введение

Известно, что у манипуляционных механизмов параллельной структуры вблизи особых положений резко снижается нагрузочная способность. Для поиска особых положений применяют подходы, основанные на матрицах Якоби или на винтовом исчислении. Однако необходимо установить критерии не только особого положения, но и положений, близких к нему, где ухудшаются функциональные возможности. В данной работе для решения этой проблемы разрабатывается подход, основанный на анализе углов давления. При этом также должны учитываться условия передачи моментов, так как они характеризуют близость механизма к особым положениям.

Постановка задачи

Манипуляционные механизмы параллельной структуры вблизи особых положений (сингулярностей), связанных с потерей управляемости, могут утрачивать свои функциональные возможности [1–5]. Поэтому многие авторы уделили внимание этой проблеме [1–12], рас-

сматривая траектории, не содержащие особых положений, а также определяя критерии сингулярности. Один из наиболее применимых подходов к решению этого вопроса основан на матрицах Якоби [1–4], которые выражают взаимосвязь между силовыми и кинематическими винтами, соответствующими выходному звену, и входными воздействиями – обобщенными координатами и силами:

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau},$$

где $\mathbf{t}$ – кинематический винт платформы (выходного звена); $\mathbf{J}$ – матрица Якоби; $\dot{\mathbf{q}}$ – обобщенные скорости; $\mathbf{w}$ – силовой винт, действующий на платформу; $\boldsymbol{\tau}$ – обобщенные силы.

Хорошо известно, что элементы указанных матриц зависят от положения механизма, а для особых его положений матрицы вырождаются. Однако нужно находить положения механизма, близкие к особым, в которых может произойти потеря нагрузочной способности. Поэтому необходимо установить критерии близости к особым положениям, и желательно, чтобы эти критерии отражали технический смысл.

* Данная работа частично выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Грант № 10-07-00727.

В данном вопросе может быть целесообразно использование винтового исчисления, на этой основе был предложен критерий передачи движения [7], который впоследствии был разработан для разных механизмов [8–10]. Однако подобный подход не всегда соответствует требованию наглядности критерия. Поэтому был предложен критерий, основанный на силовом анализе [11]. Согласно этому критерию обобщенная сила не должна превышать допустимый максимум. Недостатком данного подхода является необходимость анализа всех направлений сил и моментов.

В данной работе развивается подход, основанный на анализе углов давления [12]. Это дает наглядность, но, как оказалось, угла давления недостаточно для анализа функциональных возможностей механизма. Может оказаться, что вблизи особых положений резко возрастают реакции в кинематических парах (рис. 1). Здесь небольшое усилие w , приложенное к конечному звену, вызывает большую реакцию R_1 в неприводной паре B . Но при этом обобщенная сила τ_1 остается в допустимых пределах, так как она зависит от компоненты F_1 реакции R_1 , ортогональной оси звена AB .

Для анализа сил реакций в данной работе применяется подход, основанный на рассмотрении углов давления и расстояний до мгновенной оси вращения. Это позволяет оценить каждое положение механизма и затем построить его рабочую зону.

Определение критерия функциональных возможностей

Рассмотрим манипулятор параллельной структуры с тремя степенями свободы: два перемещения вдоль осей x и y и вращение вокруг оси z . Имеют место три цепи, состоящие из одной приводной пары и двух неприводных пар. Неприводные (пассивные) пары обозначим как

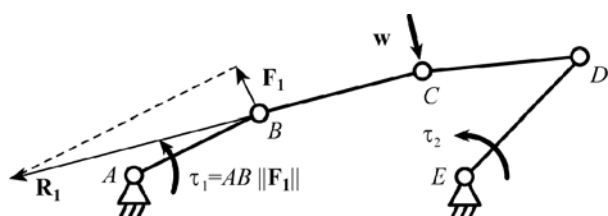


Рис. 1. Пятизвенный механизм вблизи особого положения

R – вращательная¹, P – поступательная, а приводные (активные) пары обозначим как $\underline{R}$ и $\underline{P}$. Каждая цепь передает на выходное звено (платформу) силовой винт – вектор R_i ($i = 1, 2, 3$), который можно привести к точке B_i . Если цепь присоединена к платформе посредством вращательной пары R , то точка B_i фиксирована относительно платформы. Если цепь присоединена к платформе посредством поступательной пары P , то точка B_i подвижна относительно платформы и сопряжена с вращательной парой R (рис. 2).

Силы R_i можно соотнести с внешним силовым винтом $w^T = [f^T, m]$ (f – внешняя сила, m – скалярная величина, соответствующая внешнему моменту), приводя все величины к произвольной точке Q :

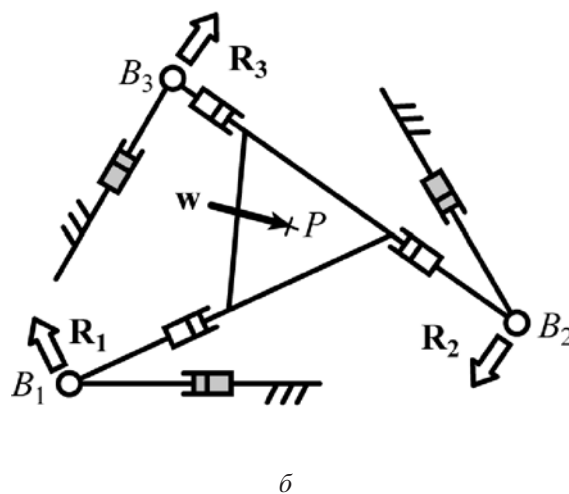
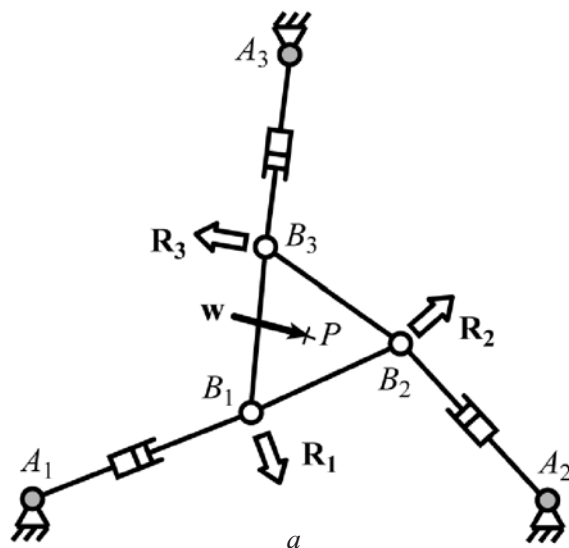


Рис. 2. Манипуляторы 3- $\underline{RPR}$ (а) и 3- $\underline{PRP}$ (б)

¹ Обозначения R (без индексов) используются для вращательных кинематических пар, обозначения R_i (с индексами) используются для реакций.

$$\mathbf{f} = -\sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i, \quad m = -\sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{d}}_{QBi}^T \mathbf{R}_i, \\ \bar{\mathbf{d}}_{QBi}^T = [-y_{QBi}, x_{QBi}],$$

где x_{QBi} и y_{QBi} – координаты вектора $\mathbf{QB}_i$.

Полагая, что $\mathbf{R}_i = R_i \mathbf{r}_i$, где $\|\mathbf{R}_i\| = R_i$; $\mathbf{r}_i$ – единичный вектор, и приводя силы к точке B_1 , получаем:

$$\mathbf{w} = -\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \\ 0 & \bar{\mathbf{d}}_{B1B2}^T \mathbf{r}_2 & \bar{\mathbf{d}}_{B1B3}^T \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \\ = -[\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3] \mathbf{R} = -\mathbf{A}^T \mathbf{R},$$

где $\mathbf{f}_i^T = [\mathbf{r}_i^T, \bar{\mathbf{d}}_{B1Bi}^T \mathbf{r}_i]$ – единичный винт, соответствующий направлению силового винта, действующего со стороны привода на платформу.

Реакции в неприводных парах могут быть выражены следующим образом:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{A}^{-T} \mathbf{w}, \quad \mathbf{A}^{-T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \mathbf{t}_3^T \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{t}_i^T = [\mathbf{v}_i^T, \omega_i]$ – кинематический винт платформы, приведенный к точке B_i , когда лишь привод i не зафиксирован; $\mathbf{v}_i$ – скорость точки B_i ; ω_i – угловая скорость.

Принимая во внимание, что $\mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-T} = \mathbf{I}$, получаем: $\mathbf{f}_1^T \mathbf{t}_1 = \mathbf{r}_1^T \mathbf{v}_1 = 1$. Кроме того, известно [12], что угол давления α_1 (рис. 3) может быть представлен как минимальный угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{v}_1$. То есть

$$|\mathbf{r}_1^T \mathbf{v}_1| = \|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{v}_1\| \cos \alpha_1 \quad \text{или} \quad \cos \alpha_1 = \frac{|\mathbf{r}_1^T \mathbf{v}_1|}{\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{v}_1\|}.$$

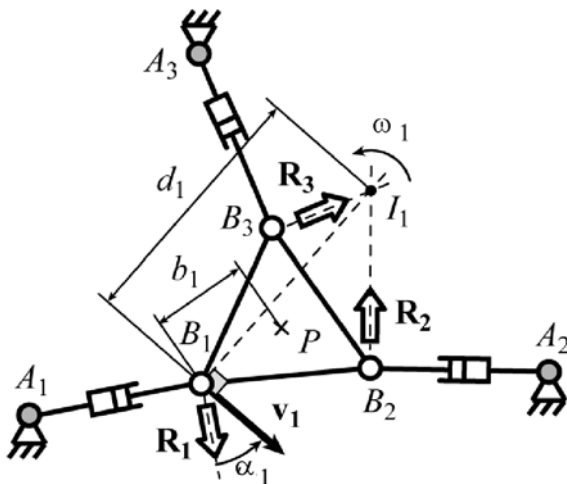


Рис. 3. Угол давления для одной цепи манипулятора 3-RPR

Поскольку $\mathbf{r}_1$ – единичный вектор, получаем: $\|\mathbf{v}_1\| = 1/\cos \alpha_1$. Для плоских механизмов скорость $\mathbf{v}_Q$ любой точки Q равна произведению угловой скорости на расстояние между точкой Q и мгновенным центром скоростей I_i , $i = 1, 2, 3$. В результате имеем: $\|\mathbf{v}_1\| = d_1 |\omega_1|$, где d_1 – расстояние между точками I_1 и B_1 (см. рис. 3).

Из этого соотношения получаем:

$$R_1 = -(\mathbf{v}_1^T \mathbf{f} + \omega_1 (m + \bar{\mathbf{d}}_{B1P}^T \mathbf{f})) = \\ = -((\mathbf{v}_1^T + \omega_1 \bar{\mathbf{d}}_{B1P}^T) \mathbf{f} + \omega_1 m).$$

Для заданной нормы f внешней силы $\mathbf{f}$ и для заданной величины m внешнего момента, а также для произвольного направления вектора $\mathbf{f}$, максимального значения величина R_1 достигает при условии

$$R_{1\max} = \max_{\mathbf{f}, m} (R_1) = \\ = f \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 + (\omega_1 b_1)^2 - 2 \|\mathbf{v}_1\| |\omega_1 b_1| \cos \beta_1} + |\omega_1 m|,$$

где b_1 – расстояние между точкой приложения внешнего силового винта, обозначенного как P , и точкой B_i ; β_1 – угол между векторами $\mathbf{v}_1$ и $-\omega_1 \bar{\mathbf{d}}_{B1P}$.

Для численного анализа достаточно использовать полученное выражение, однако для более детального рассмотрения свойств механизма целесообразно воспользоваться выражением для угла давления α_1 и расстояния d_i . Преобразуя предыдущее соотношение, получаем:

$$R_{i\max} = (\gamma_i f + |m|/d_i) / \cos \alpha_i; \\ \gamma_i = \sqrt{1 + (b_i/d_i)^2 - 2 \cos \beta_i b_i/d_i}.$$

Отметим, что расстояние между точками P и I_i равно $\gamma_i d_i$ (рис. 4, а). Может быть иное взаимное расположение сил и моментов (рис. 4, б).

Из приведенных соотношений следует: чем меньше угол α_i , тем меньше величина силы реакции. Если сила $\mathbf{f}$ приложена в точке P , то амплитуда (норма) силы $\mathbf{f}_1^*$ на конце фиктивного рычага должна быть умножена на коэффициент $\gamma_i f$. Если к фиктивному рычагу приложен момент m , то норма силы $\mathbf{f}_2^*$ на конце рычага равна $|m|/d_i$. Соответственно, результирующая сила равна

$$\|\mathbf{f}^*\| = \|\mathbf{f}_1^* + \mathbf{f}_2^*\| = \gamma_i f + |m|/d_i.$$

Амплитуда (норма) силы $\|\mathbf{f}^*\|$ должна быть поделена на $\cos \alpha_i$. Следовательно, если α_i увеличивается для заданных f и m , то реакция в шар-

нере также растет. Чтобы избежать нерабочих состояний, необходимо установить допустимое значение реакции $R_{\max}$ в кинематической паре и сравнить его с наличествующей реакцией $R_{i\max}$, т.е. $R_{i\max} \leq R_{\max}$.

Итак, нужно найти α_i и d_i , то есть параметры фиктивного рычага. Преобразования приведенных выше уравнений приводят к условию:

$$f\sqrt{1 + (b_i/d_i)^2} - 2\cos\beta_i b_i/d_i \leq R_{\max} \cos\alpha_i - |m|/d_i.$$

Поскольку величины f , $\cos\alpha_i$, d_i и $R_{\max}$ имеют положительные значения, данное соотношение выполнимо, только при

$$|m|/(R_{\max} \cos\alpha_i) \leq d_i. \quad (1)$$

Преобразование данного условия приводит к выражению

$$0 \leq p_i(d_i); \quad (2)$$

$$p_i(d_i) = u_i d_i^2 + v_i d_i + w_i; \quad u_i = R_{\max}^2 \cos^2 \alpha_i - f^2;$$

$$v_i = -2(|m| R_{\max} \cos\alpha_i - \cos\beta_i b_i f^2);$$

$$w_i = m^2 - f^2 b_i^2.$$

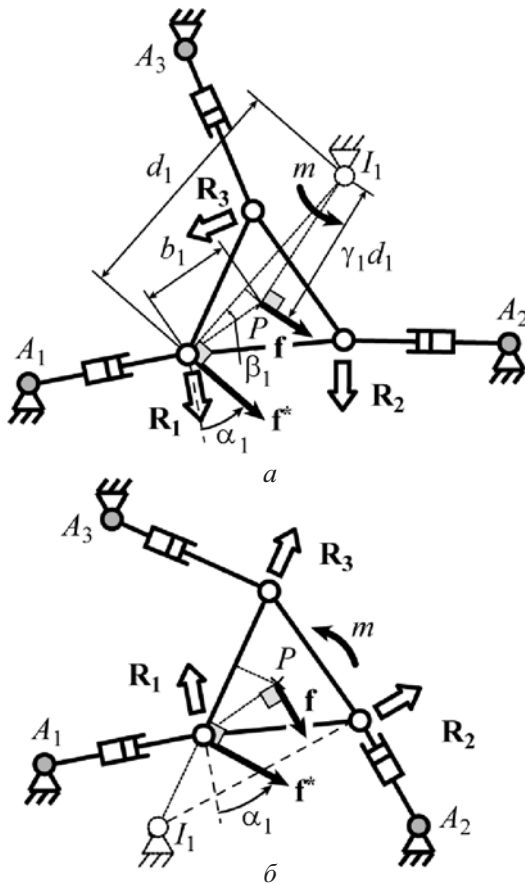


Рис. 4. Замещающие механизмы, соответствующие положениям мгновенному центру скоростей I_1 за платформой (а) и перед платформой (б)

Неравенство (2) имеет несколько решений, зависящих от соотношения между величинами u_i , v_i и w_i . Следует рассмотреть различные случаи, соответствующие знаку величины u_i .

Если $u_i > 0$, то полином p_i имеет два корня, из которых лишь один соответствует реальному механизму. Преобразования приводят к условию $d_i \geq \max[(d_i)_2, |m|/(R_{\max} \cos\alpha_i)]$, где $(d_i)_2$ соответствует действительному корню полинома p_i .

Приведем пример, соответствующий данному случаю. Рассмотрим манипулятор 3-RPR, выходное звено и основание которого имеют форму равносторонних треугольников. Обобщенные координаты имеют значения q_{10} , q_{20} , q_{30} , так что расстояние между точками I_1 и P равно $2b_1$, а сторона B_1B_2 треугольника платформы параллельна стороне A_1A_2 основания (рис. 5), где $b_1 = 0,1$ м – расстояние между точками B_1 и P , угол α_1 равен 0. Сила f и момент m приложены в точке P .

При этом $\gamma_1 = 2$, и имеет место соотношение $R_1 = 2f + |m|/d_1 = 2f + |m|/b_1 \leq R_{\max}$. Например, величина f силы f равна $R_{\max}/3 = 100$ Н (это соответствует условию $u_1 > 0$), а момент равен $R_{\max} b_1/3 = 10$ Н·м. Итак, $R_1 = R_{\max} = 300$ Н. Предельное значение реакции в шарнире B_1 имеет место, когда $d_1 = b_1 = 0,1$ м.

Если $u_i < 0$, то преобразования приводят к условию

$$\max(|m|/(R_{\max} \cos\alpha_i), b_i/(2\cos\beta_i)) \leq d_i \leq (d_i)_1.$$

Здесь $(d_i)_1$ вновь соответствует действительному корню полинома p_i .

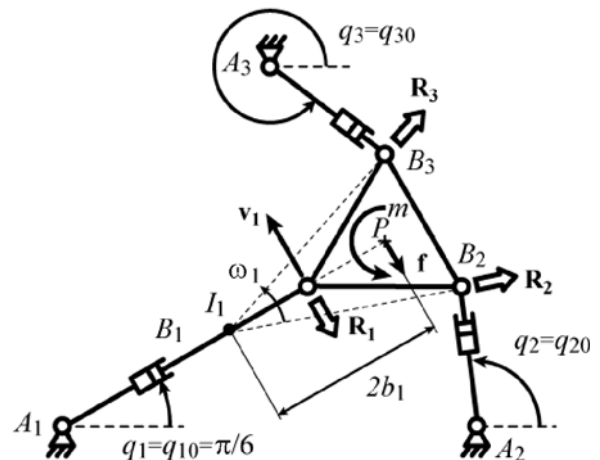


Рис. 5. Манипулятор 3-RPR в конфигурации, соответствующей условию $u_1 > 0$

Приведем пример. Центр платформы совпадает с центром базы, а линия B_1B_2 параллельна A_1A_2 (рис. 6).

Сила f и момент m приложены в точке P . Для данного примера расстояние между точками B_1 и I_1 равно $3b_1$ (принято, что $b_1 = 0,1$ м), угол $\alpha_1 = 0, \gamma = 2/3$. При этом имеет место соотношение $R_1 = 2f/3 + |m|/d_1 = 2f/3 + |m|/(3b_1) \leq R_{\max}$. Пусть сила f равна $4R_{\max}/3 = 240$ Н (это соответствует условию $u_1 < 0$), а момент равен $R_{\max} b_1/3 = 6$ Н·м. Соответственно $R_1 = R_{\max} = 180$ Н. Предельное значение реакции в шарнире B_1 имеет место, когда $d_1 = 3b_1 = 0,3$ м.

Если $u_i = 0$, то $\cos \alpha_i = f/R_{\max}$. Данное соотношение можно записать как $0 \leq v_i d_i + w_i$, где $v_i = 2f(\cos \beta_i b_i f - |m|)$, $w_i = m^2 - f^2 b_i^2$. Следу-

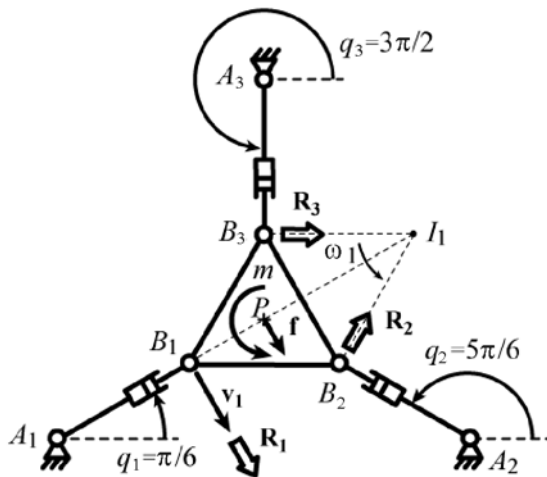


Рис. 6. Манипулятор 3-RPR в конфигурации, соответствующей центру рабочей зоны и условию $u_1 < 0$

ет выделить три случая: $v_i > 0$, $v_i < 0$ и $v_i = 0$. Они приводят к разным условиям, которые должны быть соотнесены с неравенством (1).

Полученные результаты указаны в табл. 1. Отметим, что для манипулятора с двумя степенями свободы (см. рис. 1) достаточно рассмотреть угол давления при $\cos \alpha_i \geq f/R_{\max}$, поскольку расстояние d_i не определено.

Следует также рассмотреть реакции в промежуточных кинематических парах, так как они тоже могут превышать допустимые значения. Можно выразить реакции в промежуточных парах как линейные функции от реакций, найденных выше. Соответствующие результаты приведены в табл. 2. Таким образом, чтобы избежать нерабочих состояний механизма, необходимо рассматривать реакции во всех кинематических парах.

Определение параметров рабочей зоны

Рассмотрим реакции в кинематических парах внутри рабочей зоны двух плоских манипуляционных механизмов. Один из них соответствует пятизвенному механизму (см. рис. 1) и имеет две степени свободы, другой - манипулятор типа 3-RPR соответствует плоскому аналогу робота PAMINSA, разработанному в Национальном институте прикладных наук (г. Ренн, Франция) [6].

Плоский пятизвенный манипулятор соответствует роботу DexTAR с параметрами:

$$l_{AB} = l_{DE} = l_{AB} = l_{DE} = 0,23 \text{ м}; a = 0,1375 \text{ м}.$$

Для пятизвенного механизма (рис. 7) можно показать, что матрица A^T , выражающая координаты

Таблица 1

Условия отсутствия нерабочих состояний механизма, определяемых реакциями в кинематических парах, сопряженных с платформой

	$ m > fb_i$	$ m < fb_i$			$ m = fb_i$		
$\frac{f}{R_{\max}} < \cos \alpha_i$	$d_i \geq \max \left((d_i)_2, \frac{ m }{R_{\max} \cos \alpha_i} \right)$						
$\frac{f}{R_{\max}} > \cos \alpha_i$	—	$\cos \alpha_i \geq \frac{ m \cos \beta_i + \sin \beta_i \sqrt{f^2 b_i^2 - m^2}}{R_{\max} b_i}, \frac{ m }{R_{\max} \cos \alpha_i} \leq d_i \leq (d_i)_1$					
$\frac{f}{R_{\max}} = \cos \alpha_i$	—	$b^{(i)} > 0$	$b^{(i)} < 0$	$b^{(i)} = 0$	$b^{(i)} > 0$	$b^{(i)} < 0$	$b^{(i)} = 0$
		$d_i \geq \max \left(\frac{ m }{R_{\max} \cos \alpha_i}, \frac{-c^{(i)}}{b^{(i)}} \right)$	—	—	$d_i \geq \frac{ m }{R_{\max} \cos \alpha_i}$	—	$d_i \geq b_i,$ для $\beta_i = 0$

Таблица 2

Реакции в промежуточных кинематических парах

Тип цепи	Реакции в парах	Тип цепи	Реакции в парах
<u>RPR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, \tau]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, m_{Ci}]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ \tau = \rho_i R_i$; $ m_{Ci} = l_i R_i$	<u>RPR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, 0]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, 0]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = \tau = R_i$
<u>RRR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, \tau]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, 0]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ \tau = l_{i1} R_i \cos \varepsilon_i $	<u>RRR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, 0]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, \tau]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ \tau = l_{i2} R_i \sin \varepsilon_i $
<u>PRR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, m_{Ai}]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, 0]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ m_{Ai} = l_{i1} R_i \sin \varepsilon_i $; $ \tau = R_i \cos \varepsilon_i $	<u>PRR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, 0]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, \tau]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ \tau = l_{i2} R_i \sin \varepsilon_i $
<u>PPR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, m_{Ai}]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, m_{Ci}]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ m_{Ai} = R_i \rho_i - l_{i1} \cos \varepsilon_i $; $ m_{Ci} = R_i l_{i2}$; $ \tau = R_i \sin \varepsilon_i $	<u>PPR</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, m_{Ai}]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, m_{Ci}]^T$, $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ m_{Ai} = R_i l_{i1} - \rho_i \cos \varepsilon_i $; $ m_{Ci} = R_i l_{i2} \cos \varepsilon_i $; $ \tau = R_i \sin \varepsilon_i $
<u>PRP</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, m_{Ai}]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, m_{Ci}]^T$, где $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ m_{Ai} = R_i l_{i1} \sin \varepsilon_i $; $ m_{Ci} = R_i \rho_i$; $ \tau = R_i \cos \varepsilon_i $	<u>RRP</u>	$\mathbf{w}_{Ai}^T = [\mathbf{f}_{Ai}^T, m_{Ai}]^T$, $\mathbf{w}_{Ci}^T = [\mathbf{f}_{Ci}^T, m_{Ci}]^T$, где $\ \mathbf{f}_{Ai}\ = \ \mathbf{f}_{Ci}\ = R_i$; $ m_{Ci} = R_i \rho_i$; $\tau = R_i l_{i1} \sin \varepsilon_i $

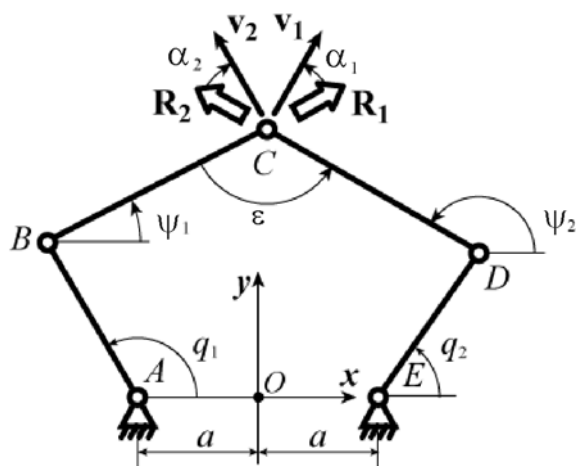


Рис. 7. Пятизвенный механизм

наты векторов-усилий [3, 5], передаваемых на выходное звено, имеет вид:

$$\mathbf{A}^T = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \cos \psi_2 \\ \sin \psi_1 & \sin \psi_2 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, при фиксированном приводе 2 (или 1) направление скорости $\mathbf{v}_1$ (или $\mathbf{v}_2$) точки C перпендикулярно линии CD (или BC) (см. рис. 7). Следовательно,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \psi_2 \\ \cos \psi_2 \end{bmatrix}.$$

В результате имеем выражение для угла давления:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{R}_1^T \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{R}_1\| \|\mathbf{v}_1\|} \right) = \cos^{-1} (\sin (\psi_2 - \psi_1)) = \\ &= \cos^{-1} (\sin \varepsilon) = \alpha_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{R}_2^T \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{R}_2\| \|\mathbf{v}_2\|} \right). \end{aligned}$$

Угол ε соответствует углу передачи, при его фиксации получаем треугольник BCD и механизм с одной степенью свободы (рис. 8).

Принимая во внимание допустимые максимальные реакции $R_{\max}$, а также действующую силу f , получаем возможность определить максимальную величину угла давления α . Для фиксированной величины угла $\alpha_{\max}$ имеют место четыре возможные величины угла ε (см. рис. 8).

Таким образом, имеют место четыре механизма, вид которых зависит от взаимного положения звеньев пятизвенника. Следовательно, могут быть найдены положения точки C, соответствующие некоторому углу давления и некоторой реакции. Зависимость реакции от положения для четырех сборок четырехзвенника приведена на рис. 9. Внешний контур на рисун-

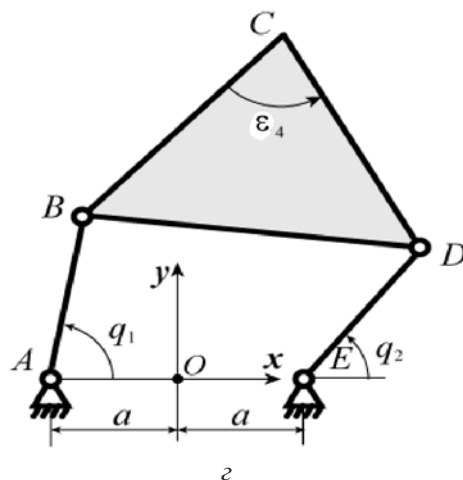
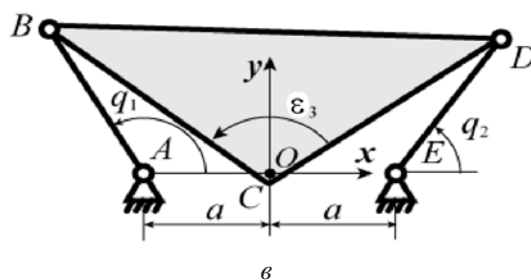
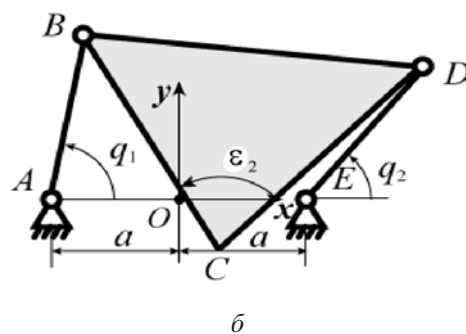
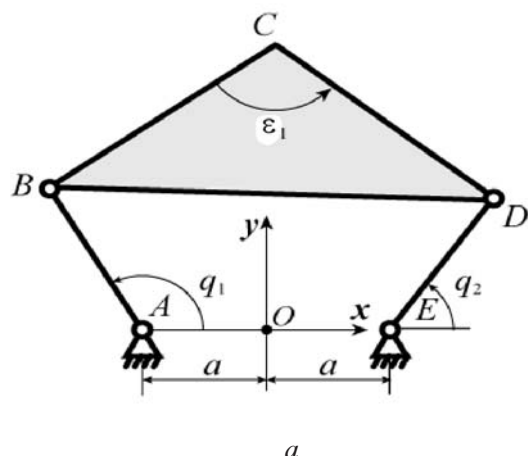


Рис. 8. Механизмы, соответствующие фиксированному углу $\alpha_{\max}$:
 $a - \varepsilon_1 = \sin^{-1}(\cos \alpha_{\max})$; $b - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \pi$;
 $в - \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$; $г - \varepsilon_4 = -\varepsilon_1 + \pi$

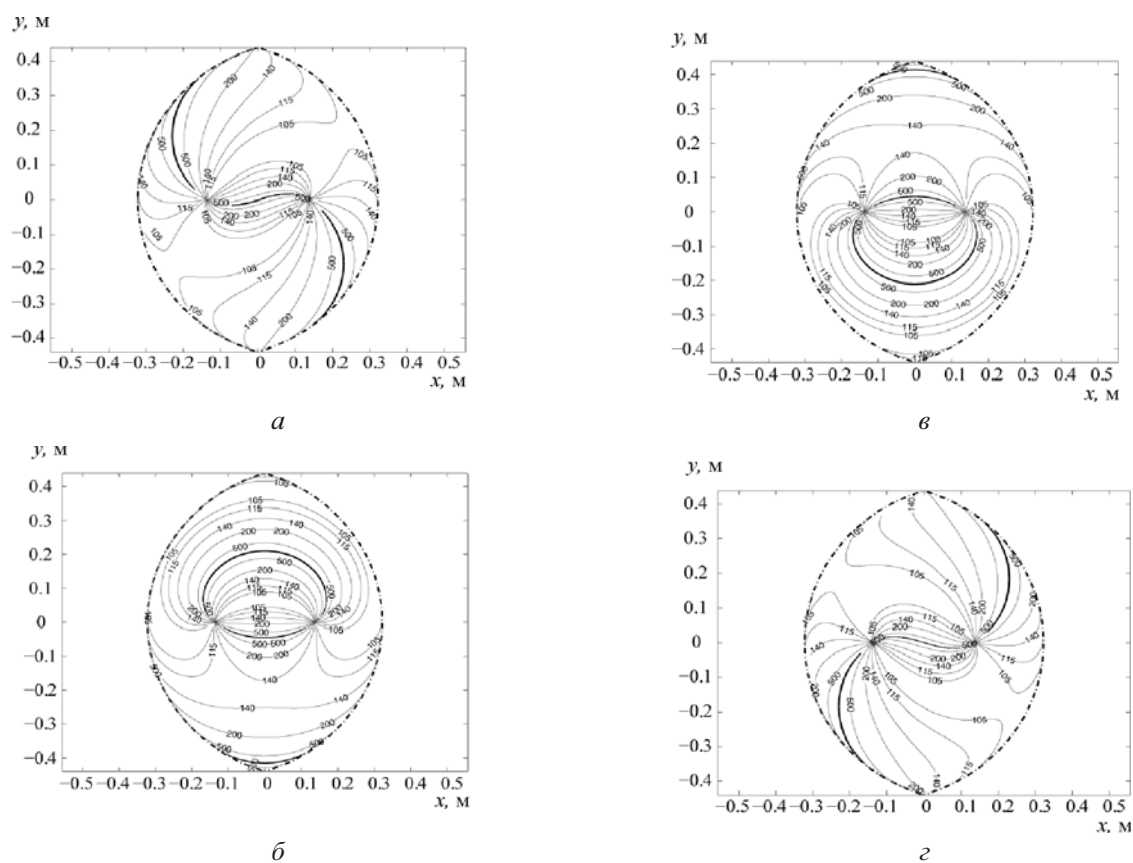


Рис. 9. Зависимость реакции от положения точки C в рабочей зоне при $f = 100$ Н:

$a - \varepsilon_1 = \sin^{-1}(\cos \alpha_{\max})$; $б - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \pi$; $в - \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$; $г - \varepsilon_4 = -\varepsilon_1 + \pi$

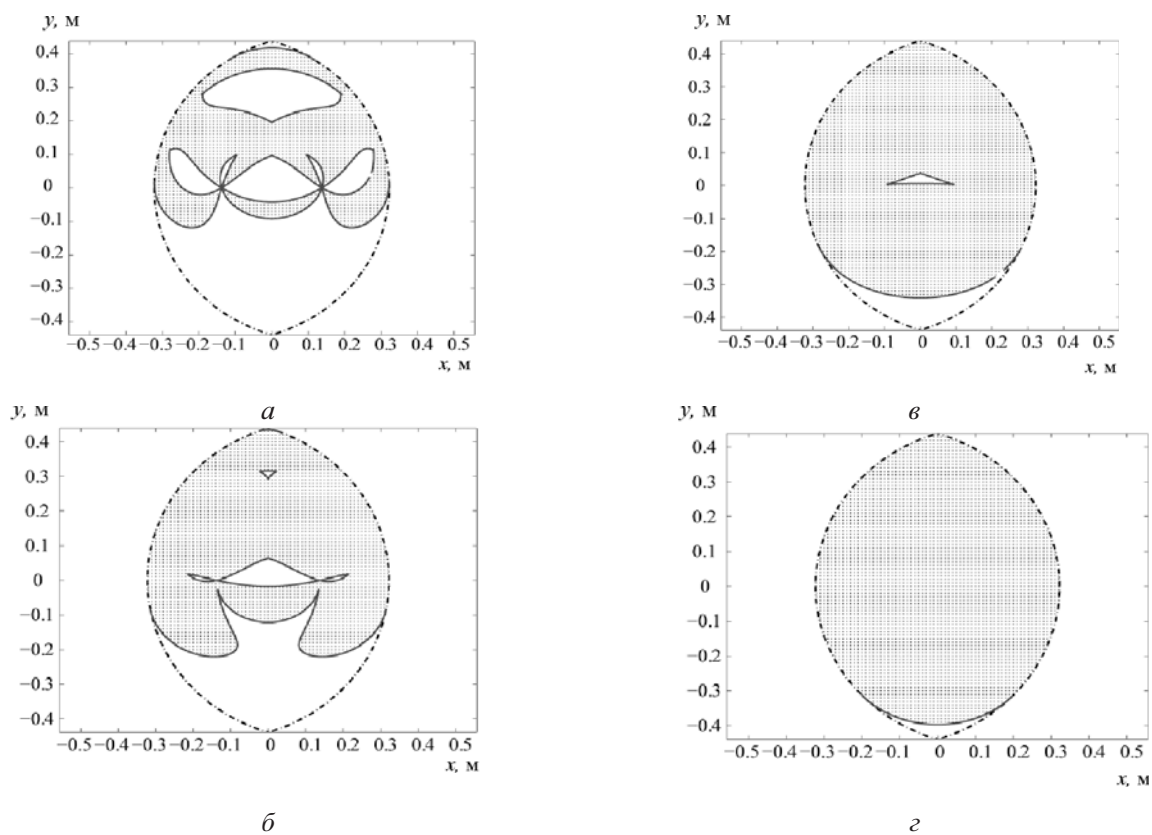


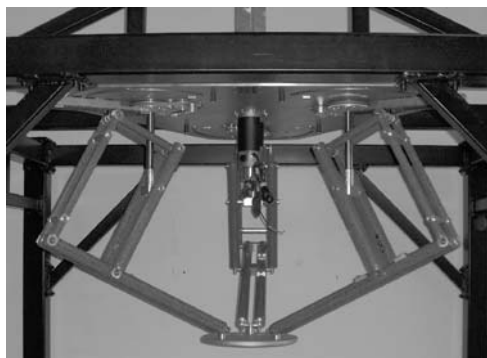
Рис. 10. Рабочая зона в зависимости от угла $\alpha_{\max}$:

$a - \alpha_{\max} = 20^\circ$; $б - \alpha_{\max} = 40^\circ$; $в - \alpha_{\max} = 60^\circ$; $г - \alpha_{\max} = 80^\circ$

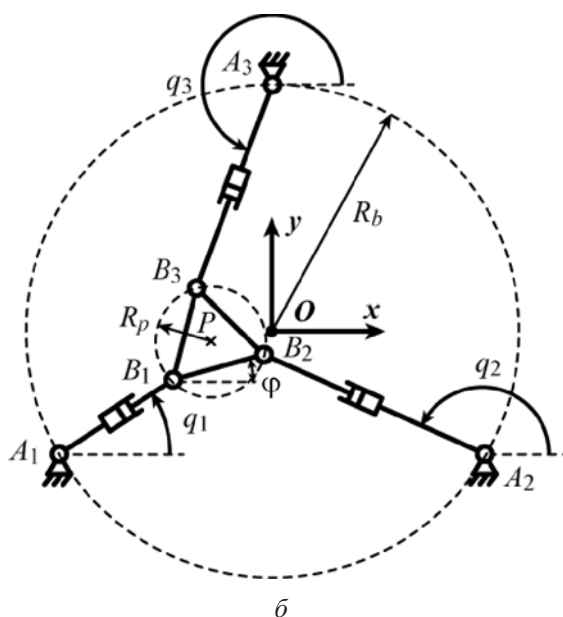
ке соответствует первому типу сингулярности [3], когда теряется степень свободы; внутренняя более жирная линия соответствует второму типу сингулярности [3] при неуправляемой подвижности. Можно показать, что чем ближе механизм ко второму типу сингулярности, тем больше реакции.

Далее рассмотрим вид рабочей зоны, ограниченной условием максимального угла давления (рис. 10). Очевидно, что чем больше допустимый угол $\alpha_{\max}$, тем больше рабочая зона. Кроме того, при малых допустимых углах давления рабочая зона делится на несколько частей.

Рассмотрим манипулятор *PAMINSA* (рис. 11, а), который имеет параллельную структуру и четыре степени свободы, соответствующие движениям Шенфлисса – три поступательные перемещения и одно вращение.

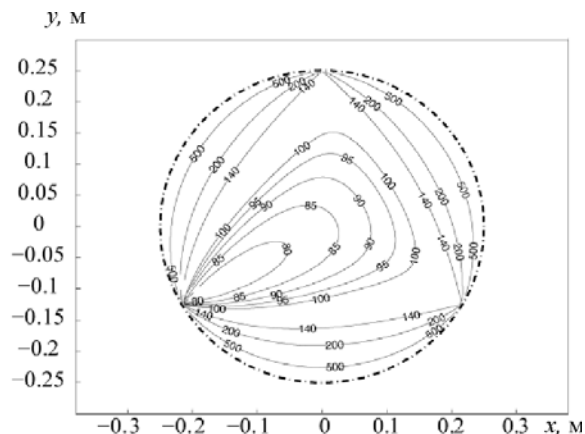


а

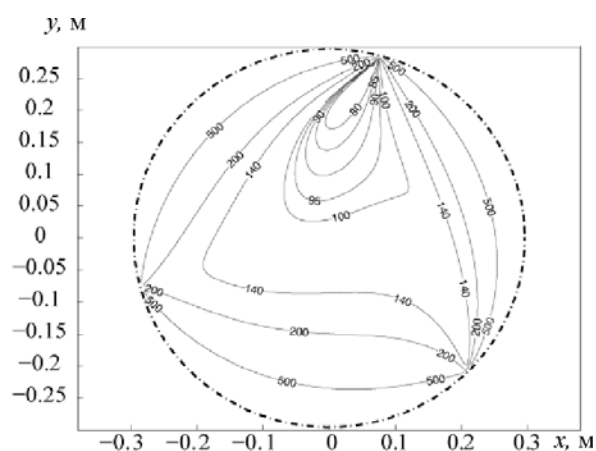


б

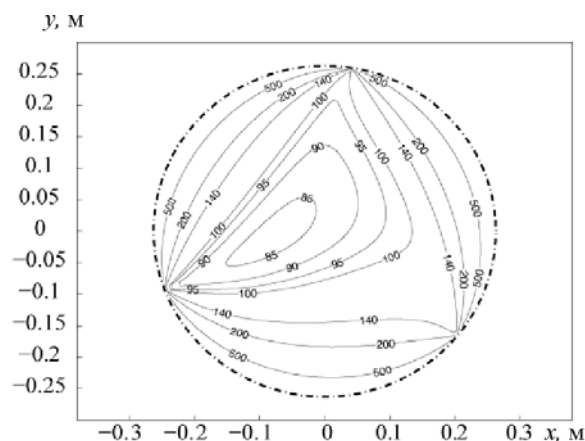
Рис. 11. Манипулятор *PAMINSA*: а – общий вид; б – модель плоского механизма



а



б



в

Рис. 12. Реакции в паре B_1 внутри рабочей зоны для разных углов φ ориентации платформы при $f = 100 \text{ Н}$ и $m = 5 \text{ Н·м}$: а – $\varphi = 0^\circ$; б – $\varphi = 25^\circ$; в – $\varphi = 50^\circ$

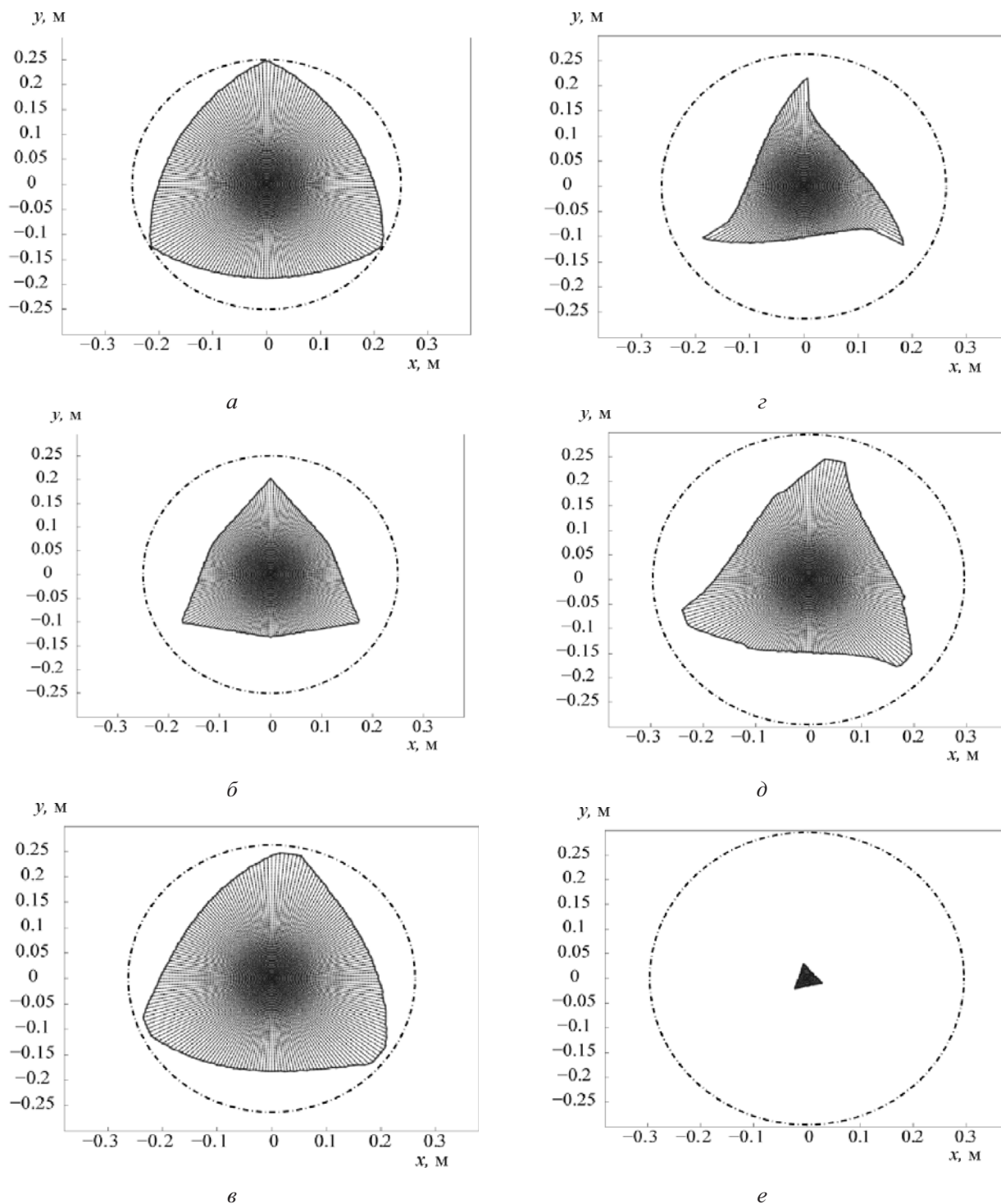


Рис. 13. Рабочая зона при постоянной ориентации φ в функции от R_{max} :
 $a - \varphi = 0^\circ, R_{max} = 200 \text{ H}$; $b - \varphi = 0^\circ, R_{max} = 110 \text{ H}$; $в - \varphi = 25^\circ, R_{max} = 200 \text{ H}$;
 $г - \varphi = 25^\circ, R_{max} = 110 \text{ H}$; $д - \varphi = 50^\circ, R_{max} = 200 \text{ H}$; $е - \varphi = 50^\circ, R_{max} = 110 \text{ H}$

В этом роботе вертикальное перемещение кинематически развязано относительно перемещений в плоскости. Если вертикальные движения заблокированы, то этот манипулятор соответствует плоскому механизму 3-RPR (рис. 11, б) с основанием и платформой, выполненными

в виде равносторонних треугольников. Радиусы описанных окружностей соответственно равны: для основания $R_b = 0,35 \text{ м}$, для платформы $R_p = 0,1 \text{ м}$.

Для манипулятора 3-RPR можно показать, что если приведение осуществлено относительно

но точки B_1 , матрица A^T координат векторов-усилий [3, 5], передаваемых на выходное звено, имеет вид:

$$A^T = [R_1 \quad R_2 \quad R_3] = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix};$$

$$f_i^T = [-\sin q_i \quad \cos q_i];$$

$$m_1 = 0; \quad m_2 = \sqrt{3}R_p \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}^T f_2;$$

$$m_3 = \sqrt{3}R_p \begin{bmatrix} -\sin(\pi/3 + \varphi) \\ \cos(\pi/3 + \varphi) \end{bmatrix}^T f_3.$$

Для точек B_2 и B_3 выражения будут аналогичны. Для этого механизма могут быть найдены углы давления, а также мгновенные центры вращения для каждого положения [12].

В зависимости от угла φ поворота платформы и положения точки B_1 внутри рабочей зоны могут быть определены реакции в данной кинематической паре (рис. 12), в частности это сделано для силы $f = 100$ Н и момента $m = 5$ Н·м. На этом рисунке штриховая линия соответствует сингулярности второго типа [3], которая возникает при следующих условиях [6]:

– для заданной ориентации платформы φ точка P расположена на окружности с центром в точке O , имеющей радиус $\sqrt{R_b^2 + R_p^2 - 2R_b R_p \cos \varphi}$;

– для угла ориентации $\varphi = \pm \cos^{-1}(R_p / R_b)$ имеет место сингулярность при любом положении точки P .

Можно видеть, что чем ближе платформа к положению сингулярности, тем больше реакция. Кроме того, минимальные значения реакции имеют место в центре рабочего пространства.

Рассмотрим рабочее пространство данного плоского манипулятора, границы которого определяются из условия, что реакции принимают предельные значения. В отличие от предыдущего случая, когда границу рабочей зоны можно было найти аналитически, для рассматриваемого механизма необходим численный подход. Он основан на дискретизации рабочего пространства по полярным координатам (r, θ) . Для заданного угла θ и радиуса r алгоритм предполагает анализ возможности манипулятора выдержать приложенную силу, при этом используются данные табл. 1. Если реакция превышает допустимое значение, то запоминается предыдущая точка, которая принадлежит границе рабочей зоны. Форма рабочей зоны зависит

от максимально допустимой величины реакции $R_{\max}$ во вращательной паре, соответствующей точке B_i , и от угла φ ориентации платформы (рис. 13). Можно видеть, что чем меньше $\alpha_{\max}$, тем меньше рабочее пространство, которое для всех случаев имеет лишь один сегмент.

Заключение

В статье представлен алгоритм определения близости к вырожденным конфигурациям плоских механизмов параллельной структуры, основанный на силовом анализе и сопоставлении возникающих реакций с допустимыми. При этом рассматриваются углы давления, а также расстояния между линией приложения соответствующей силы и мгновенным центром вращения. Для манипуляционных механизмов были построены рабочие зоны с границами, соответствующими предельно допустимым реакциям в кинематических парах. Можно сделать вывод, что вид и размер рабочей зоны в значительной степени зависят от допустимой силы реакции и допустимого угла давления.

Список литературы

1. Merlet J.-P. Parallel Robots. – Kluwer Academic Publishers, 2006. – 417 p.
2. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 412 p.
3. Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed loop kinematic chains // IEEE Trans. Rob. Res. 1990. V. 6(3). P. 281 – 290.
4. Глазунов В.А., Колисков А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.: Наука, 1991. – 96 с.
5. Bonev I., Zlatanov D., Gosselin C. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory // Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design. 2003. V. 125. P. 573–581.
6. Briot S., Arakelian V., Guégan S. Design and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator with high-load carrying capacity // Transaction of the ASME. Journal of Mechanical Design. 2008. V. 130. No. 12. P. 612–619.
7. Sutherland G., Roth B. A transmission index for spatial mechanisms // Transactions of the ASME. Journal of Engineering for Industry. 1973. V 95. P. 589–597.
8. Chablat D., Wenger Ph., Angeles J. The isoconditioning loci of a class of closed-chain

- manipulators // IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1998. P. 1970–1976.
9. Balli S., Chand S. Transmission angle in mechanisms // Mechanism and Machine Theory. 2002. V. 37. P. 175–195.
10. Chen C., Angeles J. Generalized transmission index and transmission quality for spatial linkages // Mechanism and Machine Theory. 2007. V. 42. P. 1225–1237.
11. Hubert J., Merlet J.-P. Static of parallel manipulators and closeness to singularity // Transactions of the ASME. Journal of Mechanisms and Robotics. 2009. V. 1. P. 1–6.
12. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure // Mechanism and Machine Theory. 2008. V. 43. P. 1129–1140.

Материал поступил в редакцию 30.05.2010

**БРИО
Себастиан**

E-mail: vaglznv@mail.ru
Тел. +7 (495) 924-00-28

Доктор наук, научный сотрудник Исследовательского института коммуникаций и кибернетики (г. Нант, Франция). Сфера научных интересов – пространственные механизмы, робототехника. Автор около 40 публикаций.

**АРАКЕЛЯН
Виген**

E-mail: vaglznv@mail.ru
Тел. +7 (495) 924-00-28

Доктор наук, профессор. Профессор Национального института прикладных наук (г. Ренн, Франция). Сфера научных интересов – пространственные механизмы, робототехника. Автор около 160 публикаций.

**ГЛАЗУНОВ
Виктор
Аркадьевич**

E-mail: vaglznv@mail.ru
Тел. +7 (495) 924-00-28

Доктор технических наук, доктор философских наук, профессор. Заведующий лабораторией теории механизмов и структуры машин института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Сфера научных интересов – пространственные механизмы, робототехника, философия науки. Автор около 160 публикаций, в том числе двух монографий, 22 изобретений.