

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СИСТЕМ АМОРТИЗАЦИИ С ДИСКРЕТНОЙ КОММУТАЦИЕЙ ЧАСТЕЙ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Б. А. Калашников, В. В. Бохан



**КАЛАШНИКОВ
Борис
Александрович**

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиа- и ракетостроение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ). Область научных интересов – динамика нелинейных механических систем. Автор монографии, учебного пособия, более 50 научных трудов, 7 изобретений.



**БОХАН
Владимир
Викторович**

Младший научный сотрудник лаборатории механики резинокордных оболочек ФГУП «Научно-производственное предприятие «Прогресс» (г. Омск). Область научных интересов – динамика нелинейных механических систем, акустика. Автор одной научной статьи.

Введение

Гиперболический тип частотной зависимости коэффициента относительного затухания в системах амортизации (СА) может быть достигнут путем дискретной коммутации (ДК) частей упругих элементов, в моменты которой создается периодическое смещение состояния равновесия [1]. Скачкообразное изменение этого параметра обеспечивает интенсификацию внутренних необратимых процессов, благодаря чему в резонансе достигается значительно большее значение этого коэффициента, чем в случае обычного механизма внутреннего трения.

Постановка задачи

Уравнение поверхности связи параметров

$$M_{F,1}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu) = 0 \quad (1)$$

позволяет рассчитать безразмерные среднее ΔL_1^{av} и амплитудное ΔL_1^a значения этого смещения, рассеянную за период энергию ΔW . Выражения для них не зависят от типа рабочего тела и имеют вид

$$\Delta L_1^{av} = \mu \frac{(M_{q,r} - 1)(\mu + M_{q,r}) - A_{q,r}^2}{(\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2}, \quad (2a)$$

$$\Delta L_1^a = \frac{\mu(\mu + 1)A_{q,r}}{(\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2}, \quad (2б)$$

$$\Delta W = \Delta L_1^a f(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu). \quad (2в)$$

* Статья является продолжением публикации материалов исследования динамики систем амортизации с дискретной коммутацией частей упругих элементов. См. «Машиностроение и инженерное образование», 2009. № 1.

В формулах (1), (2) и далее в статье используются безразмерные параметры – амплитуда, смещение центра относительных колебаний и отношение масс $A_{q,r} = a_{q,r}/l_{1,0}$, $M_{q,r} = 1 + m_{q,r}/l_{1,0}$, $\mu = M_2/M_{1,0}$, где $a_{q,r}$, $m_{q,r}$ – амплитуда и смещение центра относительных колебаний; M_2 , $M_{1,0}$ – массы аккумулирующей и деформируемой частей упругого элемента в состоянии статического равновесия соответственно; $l_{1,0}$ – длина деформируемой части элемента в этом же состоянии.

В случае СА, использующих в качестве упругих элементов твердые деформируемые тела, уравнение (1) и входящая в выражение (2в) функция параметров f конкретизируются в виде [1]

$$M_{F,1}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu) = M_{q,r} - 1 + \frac{\mu A_{q,r}^2}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2} = 0, \quad (3)$$

$$f_{hb}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu) = 4M_{q,r}A_{q,r}c_1^{l,uml}, \quad (4)$$

где $c_1^{l,uml} = \frac{1}{\mu + 1} \left(1 + \frac{\mu}{M_{q,r} + \eta A_{q,r}} \right)$ – жесткость деформируемой части при нагружении и разгрузке элемента, η – функция Хевисайда.

Для эквивалентных коэффициентов жесткости и относительного затухания в [1] получены выражения

$$c_{eq}(A_{q,r}) = \frac{1}{\mu + 1} \left(1 + \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2} \right), \quad (5a)$$

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{2}{\pi \eta} \cdot \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 + \mu M_{q,r} - A_{q,r}^2}, \quad (5б)$$

где $\eta = \omega / \left(\omega_{nat} \sqrt{c_{eq}(A_{q,r})} \right)$ – безразмерная частота возмущения; ω – частота возмущения; ω_{nat} – собственная частота только одной деформируемой части.

В зоне низкочастотного резонанса коэффициент относительного затухания (5, б) достигает значения $\psi = 0,4 - 0,6$ с монотонным уменьшением его в зарезонансной зоне.

Неоднозначная устойчивая часть поверхности связи параметров решения и отношения масс частей СА с ДК частей из твердых деформируемых тел содержит кривую экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu)$, на которой производная от смещения по амплитуде меняет знак. Амплитудные и частотные характеристики параметров смещения состояния равновесия, рассеянная за период энергия, эквивалентные коэффициенты, резонансная частота относи-

тельных колебаний и др. зависят от положения изображающей точки на поверхности связи. Параметры движения $A_{q,r}$ и $M_{q,r}$ независимо от отношения масс μ не должны превосходить значений $A_{q,r}^{extr}$, $M_{q,r}^{extr}$, соответствующих кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}$, так как в противном случае произойдет «срыв» изображающей точки на неустойчивую часть поверхности связи. Это означает, что безразмерная амплитуда кинематического возмущения $X_0^{lim} = x_0/l_{1,0}$, при которой происходит резонанс относительных колебаний, должна ограничиваться этими значениями $A_{q,r}^{extr}$, $M_{q,r}^{extr}$, в свою очередь зависящими от отношения масс частей μ (рис. 1).

В статье рассматривается задача получения параметрического представления кривой экстремальных амплитуд на поверхности связи параметров СА с ДК частей из твердых деформируемых тел с целью объяснения особенностей амплитудных, частотных и других характеристик как на этой кривой, так и на обеих устойчивых частях поверхности связи периодическим скачкообразным изменением смещения состояния статического равновесия.

Анализ геометрических особенностей поверхности связи параметров

Устойчивую часть поверхности связи параметров S_{st} (3) представим в повернутом виде (см. рис. 1, а).

Сечение устойчивой части повернутой поверхности связи S_{st} вертикальной плоскостью $4\mu = \text{const}$ (см. рис. 1, а) показывает однозначную зависимость амплитуды от смещения, которая имеет максимум при любом отношении масс μ (точки h_i). Через них и предельные точки a и f (на рис. 1, а точка f совпадает с h , так как при $\mu \rightarrow \infty$ точки $h \rightarrow f$) проходит кривая $3\mathfrak{M}$, на которой производная от смещения по амплитуде меняет знак. Эта особенность поверхности связи параметров обнаруживает себя во всех динамических характеристиках, включая частотные.

Разрешая уравнение поверхности связи (3) на отрезке $M_{q,r} \in [0, 1]$ (см. рис. 1, а) относительно амплитуды, получим для нее выражение, зависящее от отношения масс μ как от параметра

$$A_{q,r} = \frac{M_{q,r} \sqrt{(M_{q,r} - 1)(M_{q,r} - 1 - \mu)}}{\mu - (M_{q,r} - 1)}. \quad (6)$$

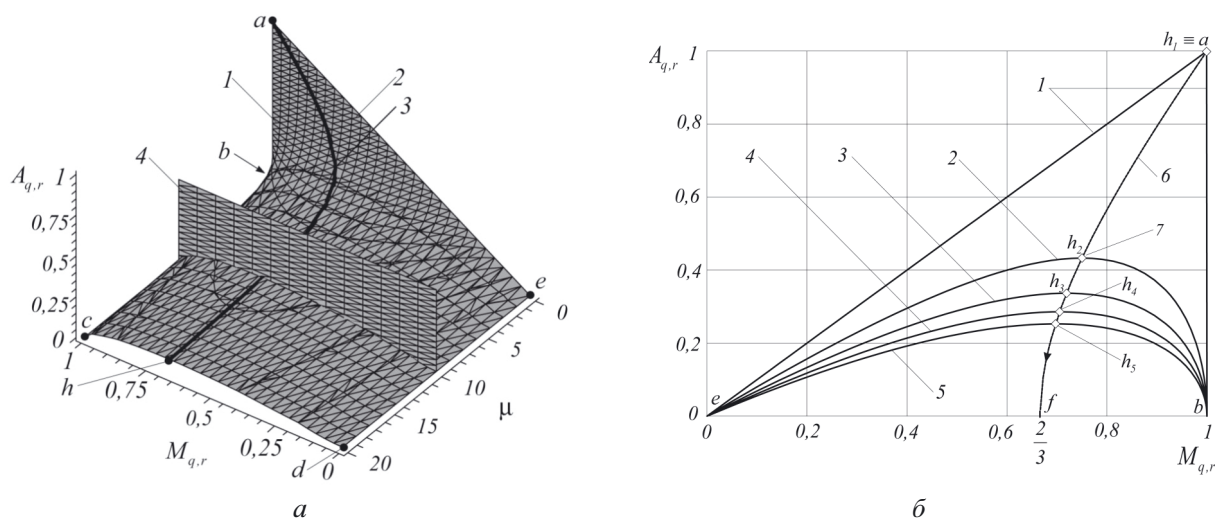


Рис. 1. Устойчивая часть поверхности связи параметров S_{st} :

a – в повернутом виде: 1 – верхняя часть S_{st}^t ; 2 – нижняя часть S_{st}^b ; 3 – кривая экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu)$; 4 – вертикальная плоскость $\mu = \text{const}$;

b – проекции ее сечений плоскостями $\mu = \text{const}$ на плоскость $A_{q,r} - M_{q,r}$:

1 – $\mu = 0$; 2 – $\mu = 0,5$; 3 – $\mu = 1$; 4 – $\mu = 1,5$; 5 – $\mu = 2$

Исследуя эту функцию на экстремум, найдем точки максимумов h_i ; линия b на рис. 1, б, проходящая через них, – это проекция пространственной кривой 3 (см. рис. 1, а) на плоскость $\mu = 0$.

Для нахождения параметрического представления этой кривой продифференцируем уравнение поверхности связи (3) по смещению $M_{q,r}$. Получим не зависящее от отношения масс μ уравнение

$$A_{q,r}^2 = M_{q,r} (3M_{q,r} - 2), \quad (7)$$

представляющее собой две нормальные поверхности: верхнюю S_n^t [1] и нижнюю S_n^b , кривизна которых в направлении оси μ $k = 0$. Положительный корень уравнения (7)

$$A_{q,r} = \sqrt{\frac{(3M_{q,r} - 1)^2 - 1}{3}}, \quad \text{при } M_{q,r} \in [0, 1] \quad (8)$$

есть выражение для кривой b на рис. 1, б. При $M_{q,r} < 0$ амплитуда $A_{q,r}$ также будет положительной, но начинаться соответствующая кривая будет из любой точки прямой ed (см. рис. 1, а).

Разрешив (7) относительно смещения, найдем два корня

$$M_{q,r}^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{1 + 3A_{q,r}^2}}{3} \quad \text{и} \quad M_{q,r}^{(2)} = \frac{1 - \sqrt{1 + 3A_{q,r}^2}}{3}. \quad (9)$$

Из первого выражения (9) следует (см. рис. 1, б), что при амплитуде $A_{q,r} = 0$ смещение $M_{q,r} = 2/3$, а при $A_{q,r} = 1$ $M_{q,r} = 1$ (точки f и a на рис. 1, б). Пересечение поверхностей S_{st} и S_n^t дает пространственную кривую $\mathfrak{M}$ (линия 3 на рис. 1, а).

Подставляя в уравнение поверхности связи (3) соотношения (9), получим уравнения двух касательных поверхностей: внутренней S_t^i [1] и внешней S_t^e

$$S_t^{i,e} = \left(\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{1 + 3A_{q,r}^2}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{1 + 3A_{q,r}^2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{1 + 3A_{q,r}^2}}{2} \right) A_{q,r}^2 + A_{q,r}^2 (\mu + 1) = 0. \quad (10)$$

Внутренняя поверхность S_t^i (знак плюс в (10)) удовлетворяет одновременно уравнениям (3) и (7) и поэтому будет касаться положительной части поверхности связи S_{st} , на которой смещение $M_{q,r} \in [0, 1]$. Внешняя касательная поверхность S_t^e (знак минус в (10)) есть вертикальная плоскость $A_{q,r} = 0$.

Параметризуя вначале уравнение нормальных поверхностей (7) [2], получим

$$M_{q,r}(t) = \frac{2}{3 - t^2} \quad \text{и} \quad A_{q,r}(t) = \frac{2t}{3 - t^2}, \quad (11)$$

где параметр $t \in [0, 1]$.

Далее, исключая при помощи (7) квадрат амплитуды из уравнения поверхности связи (3), найдем зависимость между смещением центра колебаний $M_{q,r}$ и отношением масс μ на кривой $\mathfrak{M}$

$$M_{q,r} \left[M_{q,r} (2M_{q,r} - 4 - 3\mu) + 2(\mu + 1) \right] = 0. \quad (12)$$

Разрешая это уравнение относительно смещения $M_{q,r}$, получим три корня

$$M_{q,r}^{(1)} = 0; \quad M_{q,r}^{(2)} = 1 + \frac{3}{4}\mu + \frac{\sqrt{8\mu + 9\mu^2}}{4};$$

$$M_{q,r}^{(3)} = 1 + \frac{3}{4}\mu - \frac{\sqrt{8\mu + 9\mu^2}}{4}, \quad (13)$$

из которых кривой $\mathfrak{M}$ на отрезке $M_{q,r} \in [0,1]$ удовлетворяет только третий корень (рис. 2).

Если смещение $M_{q,r}^{(3)} = 1$, то отношение $\mu = 0$ и обратно. При этом амплитуда из (8) $A_{q,r} = 1$. При $\mu \rightarrow \infty$ предельное значение смещения на кривой $\mathfrak{M}$ находится как

$$M_{q,r}^{\lim} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{4}\mu - \frac{\sqrt{8\mu + 9\mu^2}}{4} \right) = \frac{2}{3}, \quad (14)$$

а амплитуда из (8) $A_{q,r}^{\lim} = 0$.

Исключая из (12) при помощи первого выражения (11) смещение $M_{q,r}$, найдем зависимость $\mu(t)$. Объединив ее с (11), получим параметрическое представление кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu)$ (см. рис. 1–3)

$$A_{q,r}(t) = \frac{2t}{3-t^2}; \quad (15a)$$

$$M_{q,r}(t) = \frac{2}{3-t^2}; \quad (15b)$$

$$\mu(t) = \frac{(t^2 - 1)^2}{t^2(3 - t^2)}. \quad (15b)$$

Любой из трех параметров (15) может считаться варьируемым, а два других, зависящих от него – экстремальными.

Найдем предельные значения параметра t при изменении отношения масс μ от нуля до бесконечности. Если $\mu = 0$, параметр $t = 1$, амплитуда $A_{q,r} = 1$, смещение $M_{q,r} = 1$ (точки a на рис. 1, 2, 3). При $\mu = \infty$ смещение $M_{q,r}^{\text{extr}}|_{\mu=\infty} = 2/3$ и тогда из второго выражения (15) $t = 0$ (точки f на рис. 1, б и рис. 3). Находя предел для выражения (15б) при $\mu \rightarrow \infty$, также получим, что $t|_{\mu=\infty} = 0$ (см. рис. 3).

Кривая экстремальных амплитуд (15) на устойчивой части поверхности связи S_{st} раз-

граничивает режимы движения СА с ДК частей упругих элементов с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой в зависимости от начальных условий $Q_0, \dot{Q}_0$ (безразмерных смещения и скорости), от амплитуды кинематического возмущения X_0 [1].

Некоторые динамические особенности систем амортизации с дискретной коммутацией частей упругих элементов

Параметрическое представление кривой экстремальных амплитуд (15) позволяет постро-

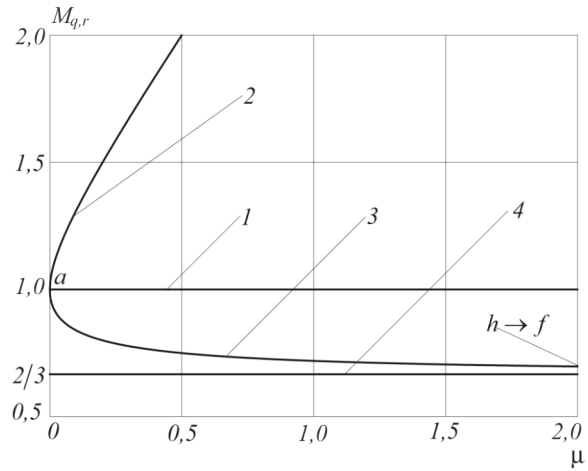


Рис. 2. Проекция кривой $\mathfrak{M}$ на плоскость $A_{q,r} = 0$: прямая 1 соответствует линейной системе; кривые 2 и 3 – второму и третьему корням (13); асимптота 4 – предельному значению смещения $M_{q,r}$ при отношении масс $\mu = \infty$

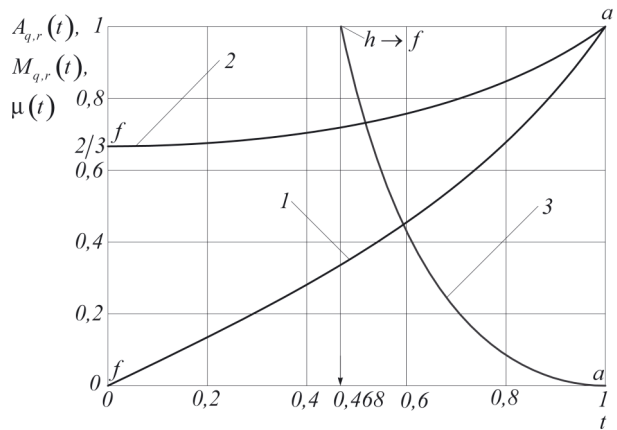


Рис. 3. Зависимость параметров решения от t : 1 – амплитуда $A_{q,r}$, 2 – смещение центра колебаний $M_{q,r}$, 3 – отношение масс частей μ от параметра t на кривой $\mathfrak{M}$; $\mu(t)|_{t=0} = \infty$; $t|_{\mu=1} \approx 0,468$ *

* Обозначения точек соответствуют рис. 1 и рисункам в [1]

ить 3D-поверхности зависимостей (2а), (2б), (4) и др., соответствующие 3D-поверхности связи параметров на рис. 1, а и сечения этих поверхностей плоскостями $\mu = \text{const}$ и $A_{q,r} = \text{const}$.

Смещение состояния статического равновесия и функция параметров. Для построения поверхностей (2а), (2б), уравнение (3) аналитически разрешалось относительно смещения $M_{q,r}$, и из полученных выражений выбирались два положительных корня $M_{q,r}^t$ и $M_{q,r}^b$, соответствующих частям S_{st}^t и S_{st}^b устойчивой поверхности связи параметров S_{st} . Для каждого значения μ по (15в) находился параметр $t \in [0,1]$

$$t = \frac{\sqrt{2(\mu+1)(3\mu+2-\sqrt{\mu(9\mu+8)})}}{2(\mu+1)}, \quad (16)$$

а по (15а) – соответствующая ему предельная амплитуда $A_{q,r}^{\text{extr}}$:

$$A_{q,r}^{\text{extr}}(\mu) = \frac{\sqrt{8(\mu+1)(3\mu+2-\sqrt{\mu(9\mu+8)})}}{3\mu+4+\sqrt{\mu(9\mu+8)}}. \quad (17)$$

Текущие значения отношения μ , амплитуды $A_{q,r}$ и корни $M_{q,r}^t$, $M_{q,r}^b$ подставлялись в выражения для среднего ΔL_1^{av} (2а) и ам-

плитудного значений ΔL_1^a (2б) смещения состояния статического равновесия (рис. 4, а и рис. 5 соответственно).

Поверхности 1, 2 и кривая амплитуды этого смещения 3 соответствуют поверхностям 1, 2 и кривой 3 на рис. 1, а; 4 и 5 – вертикальные плоскости $\mu = 1$ и $A_{q,r}^{\text{extr}}|_{\mu=4} \cong 0,185$.

Кривые в сечениях поверхностей на рис. 4, а и 5 плоскостями $A_{q,r} = \text{const}$ (рис. 4, б; 6, а), а также графики на рис. 7, а; 8, а; 8, б построены для отношений масс μ , приведенных в табл. 1.

Кривые 2–7, на рис. 4, в; 6, б и 7, б построены для амплитуд 2–7 из табл. 1, а кривые 8–10, 12, 13 – для амплитуд $A_{q,r}$: 8 – 0,153, 9 – 0,133, 10 – 0,120, 12 – 0,098, 13 – 0,085. Всем этим амплитудам соответствуют экстремальные значения отношения масс μ^{extr} , указанные на рис. 4, в, 6, б и 7, б. Амплитудам 12 и 13 соответствуют $\mu^{\text{extr}} = 15$ и $\mu^{\text{extr}} = 20$.

Значения, отмеченные на всех 2D-рисунках ромбами, соответствуют кривой 11 экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}$ (см. рис. 1, а); на рис. 4, б и 6, а им соответствуют экстремальные амплитуды $A_{q,r}^{\text{extr}}$ (см. табл. 1), а на рис. 4, в и 6, б – экстремальные отношения масс μ^{extr} , указанные

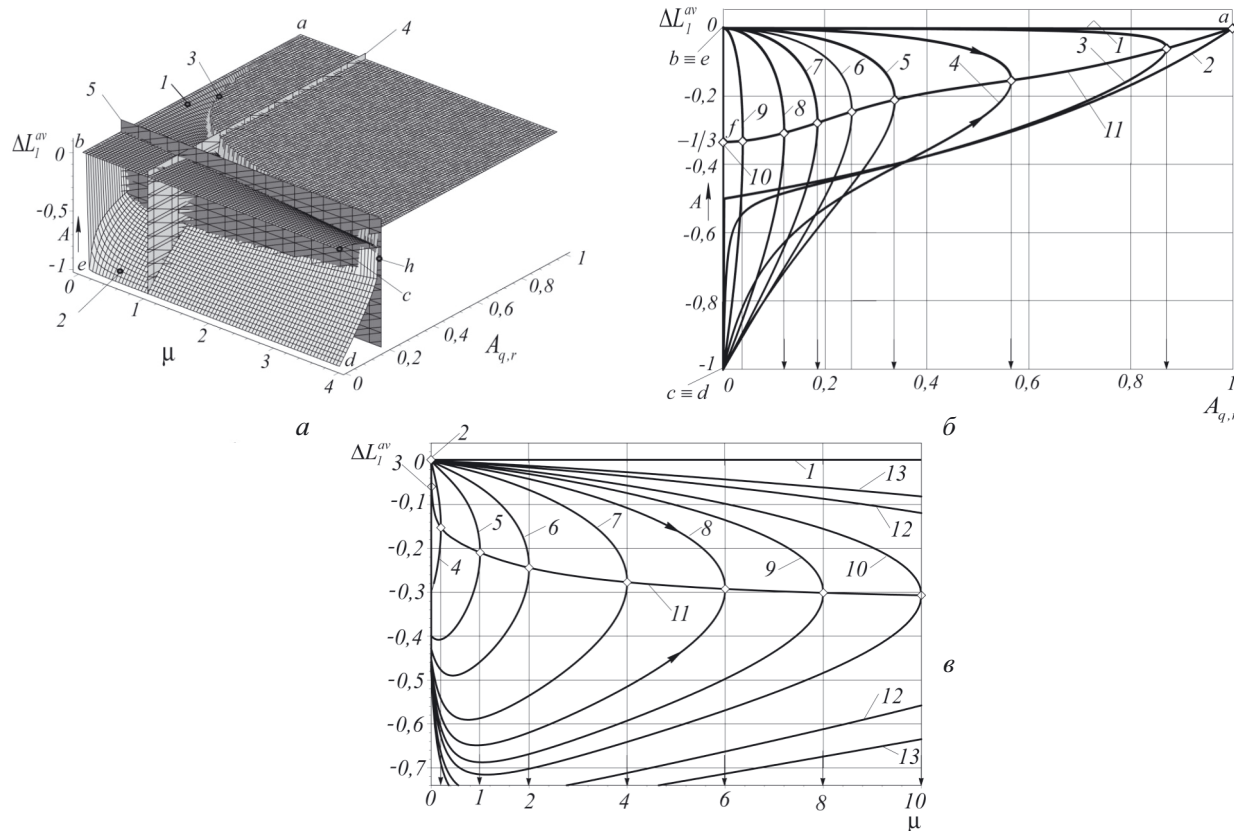


Рис. 4. Зависимость среднего смещения состояния статического равновесия от амплитуды $A_{q,r}$ и отношения масс μ (а); сечения этой поверхности вертикальными плоскостями $\mu = \text{const}$ (б) и $A_{q,r} = \text{const}$ (в)

Таблица 1

Некоторые значения отношений масс частей упругих элементов
и соответствующие им экстремальные амплитуды

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	10^{-10}	0,01	0,2	1	2	4	10	100	10^{+10}
$A_{q,r}^{extr} \cong$	0,999	0,870	0,566	0,337	0,253	0,185	0,120	0,038	$0,38 \cdot 10^{-5}$

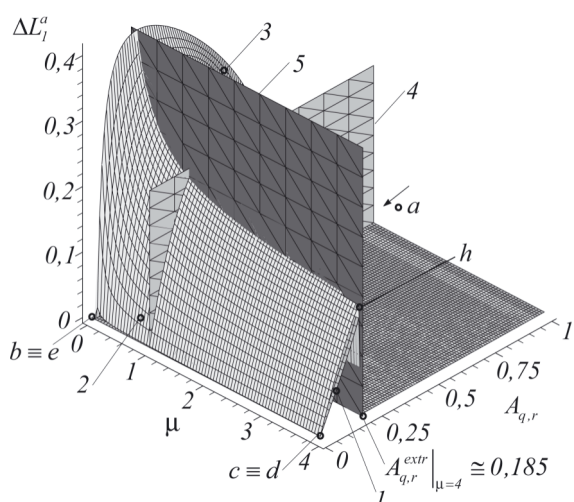


Рис. 5. Зависимость амплитуды смещения состояния статического равновесия от амплитуды $A_{q,r}$ и отношения масс μ

стрелками. Кривые, расположенные на рис. 4, б и 4, в выше ромбов, соответствуют поверхности S_{st}^t , ниже – S_{st}^b ; на рис. 6, а также 7, 8, 11 – наоборот; прямые 1 на рис. 4, б; 4, в; 6, а также 7, 8, 10 соответствуют линейной системе.

Подставляя (15) в (2а), (2б), (4) получим параметрические представления среднего и амплитудного значений смещения состояния ста-

тического равновесия и функции параметров, соответствующие кривой $\mathfrak{M}$:

$$\Delta L_1^{av}(t) = -\frac{(t^6 - 5t^4 + t^2 - 1)(t^2 - 1)}{(t^3 - t^2 - t - 1)(t^3 + t^2 - t + 1)(3 - t^2)}; \quad (18)$$

$$\Delta L_1^a(t) = -\frac{2t(t^4 - 1)}{(t^3 - t^2 - t - 1)(t^3 + t^2 - t + 1)(3 - t^2)}; \quad (19)$$

$$f_{hb}(t) = -4t \frac{(t^3 + t^2 - t + 1)(t^3 - t^2 - t + 1)}{(t^2 + 1)^2}. \quad (20)$$

Подставляя в (18), (19), (20) значения параметра $t \in [0, 1]$, найденные из (15в) или (15а) и соответствующие выбранным отношениям масс μ или амплитудам $A_{q,r}$, найдем координаты точек, отмеченных на рис. 4, б; 4, в; 6 и 7 ромбами.

Выражения для кривых 11 на рис. 4, б; 6, а и 4, в; 6, б, а также на рис. 7, а и 7, б получены путем нахождения из (15а) и (15в) корней $t = f(A_{q,r})$ и $t = f(\mu)$, $t \in [0, 1]$ и подстановки их в (18), (19), (20).

Общий характер изменения рассеянной энергии (2в) определяется амплитудой смещения

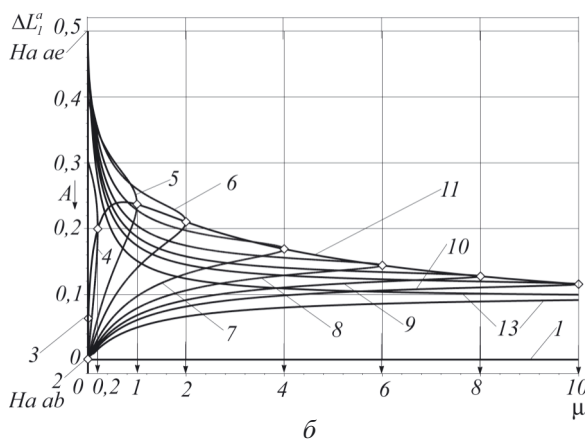
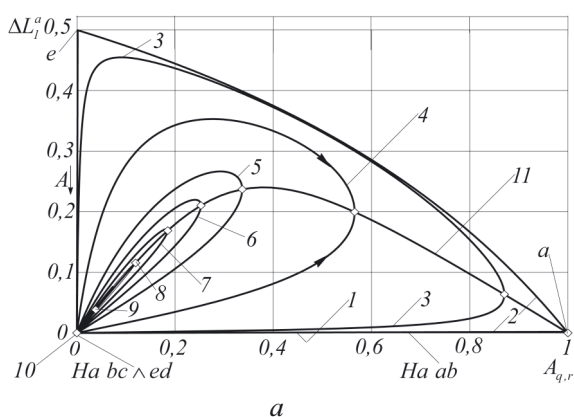


Рис. 6. Зависимость амплитуды смещения состояния статического равновесия от амплитуды $A_{q,r}$ и отношения масс μ – сечения поверхности на рис. 5, б вертикальными плоскостями (табл. 1):
 $a - \mu = \text{const}$; $b - A_{q,r} = \text{const}$; при $\mu \rightarrow \infty \Delta L_1^a \rightarrow 0$

состояния статического равновесия ΔL_1^a (см. рис. 5 и 6). Вместе с тем на изменение энергии ΔW существенное влияние оказывает функция параметров (4) (см. рис. 7).

Численные расчеты показывают, что при $M_{q,r} = 10^{-1000}$ $A_{q,r} \cong 0,3 \cdot 10^{-1000}$ и любом μ предел (4) не равен нулю; он конечен (см. рис. 7, а) и «срыва» по стрелке A не происходит. «Срыв» имеет место при обращении отношения μ в нуль (см. рис. 7, б).

Прямая $1 \ f_{hb}^{lin} = 4A_{q,r}$ на рис. 7, а есть зависимость этой функции для линейной консервативной системы с упругим элементом в виде одной деформируемой части. На рисунке 7, б для этой системы имеем семейство горизонтальных прямых $f_{hb}^{lin} = 4A_{q,r}$ (например, прямая 1 соответствует $\mu^{extr} = 10^{-10}$).

С увеличением амплитуды $A_{q,r}$ (см. рис. 7, б) отношение μ^{extr} уменьшается, значения f_{hb} на обеих поверхностях, соответствующие $\mu = 0$, сближаются, а их разность стремится к нулю по стрелке A .

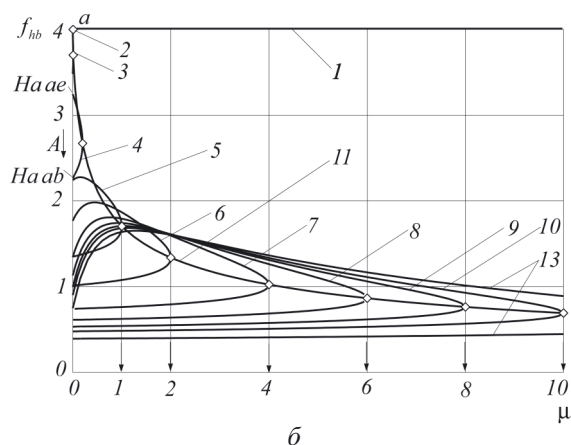
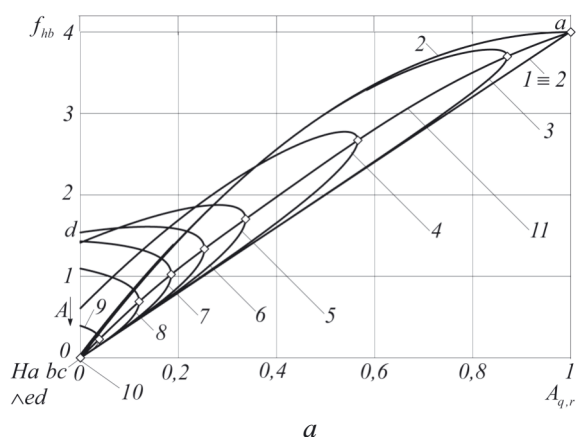


Рис. 7. Зависимость функции параметров (4) от амплитуды $A_{q,r}$ (а) и от отношения масс μ (б)

Эквивалентный коэффициент относительного затухания. Практически гиперболический тип частотной характеристики коэффициента относительного затухания $\psi(A_{q,r})$ (5б) [1] обусловлен независимостью количества рассеянной за период энергии (2в) от частоты возмущения. Одинаковый характер зависимости эквивалентных коэффициентов сопротивления $\beta_{eq}(A_{q,r})$ и жесткости $c_{eq}(A_{q,r})$ (5а) (рис. 8, а) определяет слабую зависимость коэффициента

$$\psi(A_{q,r}) = \beta_{eq}(A_{q,r}) / \left[2\sqrt{c_{eq}(A_{q,r})} \right]$$

согласно [1] от амплитуды на поверхности S_{st}^t и почти его линейный спад на поверхности S_{st}^b (рис. 8, б).

Выражения для кривых 11 на рис. 8, а и 8, б находятся аналогично выражениям для кривых 11 на рис. 4, б; 6, а и 7, а – путем подстановки в соотношения для динамической жесткости и коэффициента относительного затухания на кривой $\mathcal{M}$

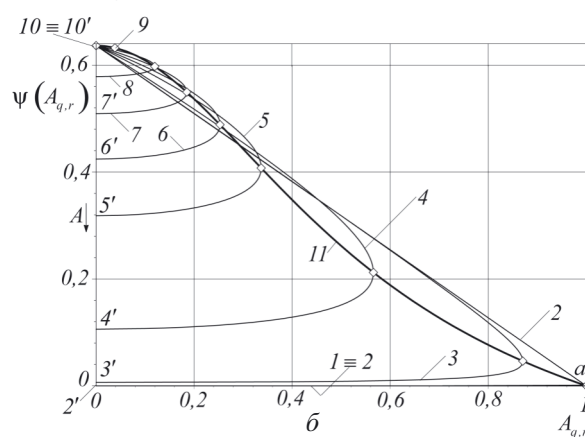
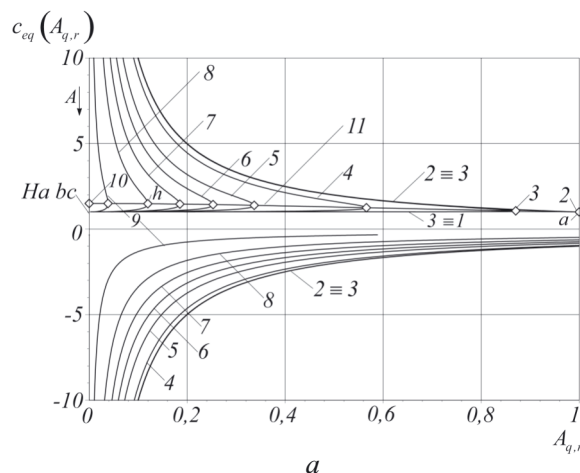


Рис. 8. Зависимость эквивалентной жесткости (а) и коэффициента относительного затухания (б) от амплитуды относительных колебаний

$$c_{eq}^{extr}(t) = \frac{3-t^2}{2}, \quad \psi^{extr}(t) = \frac{2}{\pi\eta} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

корня $t = f(A_{q,r})$, $t \in [0,1]$ Все кривые на рис. 8, б построены для частоты возмущения $\eta = \eta_a^{res} = 1$ – частоте резонанса абсолютных колебаний, которую при некоторых условиях можно считать не зависящей ни от отношения масс μ , ни от амплитуды возмущения X_0 .

В результате получим

$$c_{eq}^{extr}(A_{q,r}) = \frac{\sqrt{1+A_{q,r}^2}-1}{A_{q,r}^2},$$

$$\psi^{extr}(A_{q,r}) = \frac{2}{\pi\eta} \cdot \frac{\sqrt{1+3A_{q,r}^2}-A_{q,r}^2-1}{1-\sqrt{1+3A_{q,r}^2}+2A_{q,r}^2}.$$

Воспользовавшись соотношениями (5, б) и (15), получим зависимость коэффициента относительного затухания на кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}$

$$\psi^{extr}(\mu) = \frac{2}{\pi\eta_{rel}^{res|extr}} \cdot \frac{\mu \left[3\mu + 4 + \sqrt{\mu(9\mu+8)} \right]}{\left[2\mu + 3\mu^2 + (\mu+2)\sqrt{\mu(9\mu+8)} \right]}, \quad (21)$$

в которой $\eta_r^{res|extr}$ – частота, на которой происходит резонанс относительных колебаний. При этом считается, что амплитуда возмущения X_0^{lim} такова, что $A_{q,r}^{res} = A_{q,r}^{extr}$, т.е. резонанс относительных колебаний происходит на кривой $\mathfrak{M}$ поверхности связи. В этом случае частота этого резонанса определяется отношением масс μ , и для построения характеристики (21) необходима зависимость $\eta_r^{res|extr}(\mu)$.

Предельные значения резонансной частоты

Дифференцируя частотную характеристику (ЧХ) относительных перемещений линеаризованной СА с ДК частей упругих элементов

$$|W_{q,r-x}(i\eta)| = \frac{A_{q,r}}{X_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 - 4\psi^2(A_{q,r})\eta^2}} \quad (22)$$

по переменной η ($i = \sqrt{-1}$) и учитывая зависимость коэффициента апериодичности от частоты возмущения $\psi = \psi(\eta)$, найдем

$$\frac{\partial |W_{q,r-x}(i\eta)|}{\partial \eta} = \frac{2\eta \left[1 - \eta^2 (1 - 2\psi^2 + 2\psi\eta\psi') \right]}{\left[(1-\eta^2)^2 + 4\psi^2\eta^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (23)$$

Приравнявая к нулю числитель (23), получим уравнение

$$2\psi\psi'\eta^3 + (1-2\psi^2)\eta^2 - 1 = 0, \quad (24)$$

из которого можно найти безразмерную частоту возмущения η_r^{res} , на которой происходит резонанс относительных колебаний.

Выражая из тангенса угла механических потерь $\alpha(\eta) = 2\psi(A_{q,r})\eta$ [3], можно получить выражение для коэффициента относительного затухания ψ , дифференцируя его и подставляя α , ψ и ψ' в (24)

$$\eta_r^{res} = \frac{\omega_r^{res}}{\omega_{fr,r}^{res}} = \sqrt{1 + \alpha(\eta)^2}, \quad (25)$$

где $\omega_{fr,r}^{res}$ – размерная частота свободных колебаний, соответствующая резонансной амплитуде $A_{q,r}$.

Подставляя в (25) выражение для тангенса угла потерь $\alpha(\eta)$ с учетом формулы для коэффициента относительного затухания (5, б), получим

$$\eta_r^{res} = \sqrt{1 + \left[\frac{4\mu M_{q,r}}{\pi(M_{q,r}^2 + \mu M_{q,r} - A_{q,r}^2)} \right]^2}. \quad (26)$$

Если отношение масс частей упругого элемента в (26) $\mu \rightarrow 0$, то $\eta_r^{res} \rightarrow 1$; если $\mu \rightarrow \infty$, то $\eta_r^{res} \rightarrow 1,619$. При этом независимо от положения изображающей точки на поверхностях S_{st}^i или S_{st}^b амплитуда $A_{q,r}$ и смещение $M_{q,r}$ стремятся к своим предельным значениям. В свою очередь, эти параметры будут определяться начальными условиями, амплитудой X_0 и частотой возмущения η .

При произвольном отношении масс $\mu \in (0, \infty)$ и устремлении амплитуды и смещения в (26) к своим предельным значениям на верхней части поверхности связи S_{st}^i ($A_{q,r} = 0$, $M_{q,r} = 1$) и на нижней ее части S_{st}^b ($A_{q,r} = 0$, $M_{q,r} = 0$) предельные значения безразмерной частоты возмущения, на которой происходит резонанс относительных колебаний, находятся соответственно по формулам

$$\eta_r^{res|lim} = \lim_{\substack{A_{q,r} \rightarrow 0 \\ M_{q,r} \rightarrow 1}} \eta_r^{res} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\pi} \frac{\mu}{\mu+1} \right)^2};$$

$$\eta_r^{res|lim} = \lim_{\substack{A_{q,r} \rightarrow 0 \\ M_{q,r} \rightarrow 0}} \eta_r^{res} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\pi} \right)^2} \cong 1,619. \quad (27)$$

Исключим из (26) смещение $M_{q,r}$. Разрешив аналитически уравнение поверхности связи (3) относительно этого смещения, подставим его

положительные корни $M_{q,r}^t, M_{q,r}^b \in [0,1]$ в (26). Получим зависимость резонансной частоты от относительных колебаний η_r^{res} от амплитуды $A_{q,r}$ и отношения масс частей μ (рис. 9).

Подставляя представление (15) в формулу (26), получим параметрическое выражение для кривой значений резонансной частоты относительных колебаний, соответствующей кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}$

$$\eta_r^{res} \Big|^{extr} = \frac{\sqrt{(\pi^2 + 16)(t^4 + 1) + 2(\pi^2 - 16)t^2}}{\pi(t^2 + 1)}. \quad (28)$$

Первое и третье соотношения (15) и (28) позволяют построить кривую резонансной частоты 3 на рис. 9, соответствующую кривой $\mathfrak{M}$.

Плоскость $S^{lim}(A_{q,r}, \mu)$, проходящая через прямую ed (см. рис. 9), соответствует предельному значению резонансной частоты, равному $\eta_r^{res} \cong 1,619$, достигаемому на нижней части поверхности связи S_{st}^b при амплитуде $A_{q,r} = 0$. Однако точное достижение этого значения частоты физически невозможно, потому что при $A_{q,r} \rightarrow 0$, размерная резонансная частота возмущения $\omega_r^{res} = \omega_{nat} \eta_r^{res} \sqrt{c_{eq}(A_{q,r})} \rightarrow \infty$ [1] (см. рис. 8, а). При нахождении изображающей точки на S_{st}^b под действием достаточного возмущения произойдет ее «срыв» на S_{st}^t . Резонансную частоту в этом случае следует определять по (27а). Достижение предельного значения резонансной частоты $\eta_r^{res} \Big|_{lim}^t \cong 1,619$ возможно также и на поверхности S_{st}^t при $\mu \rightarrow \infty$.

При амплитуде возмущения $X_0 < X_0^{lim}$ для данного отношения масс частей μ в системе в зависимости от начальных условий возможно установление двух устойчивых режимов движения и соответственно двух резонансных значений частот абсолютных и относительных колебаний (см. рис. 9). Если амплитуда возмущения X_0 равна предельной для данного отношения масс частей μ амплитуде X_0^{lim} , то эти частоты будут единственными (точки h на рис. 9).

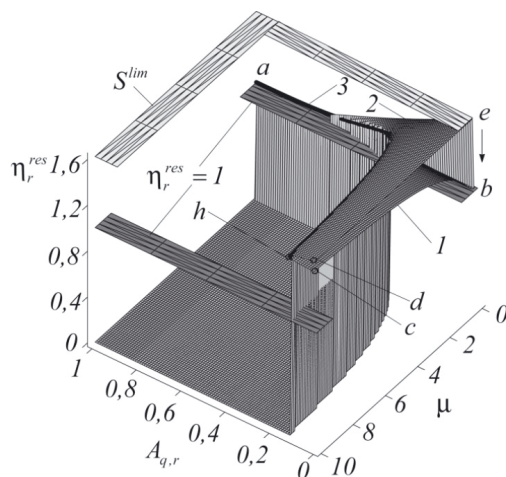


Рис. 9. Зависимость резонансной частоты относительных колебаний η_r^{res} от амплитуды $A_{q,r}$ и отношения масс μ ; S^{lim} – предельная плоскость $\eta_r^{res} \cong 1,619$; 1, 2 – поверхности и кривая резонансных частот 3, соответствующие поверхностям 1, 2 и кривой 3 на рис. 1, а

Подставляя (16) в параметрическое выражение (28), получим зависимость частоты $\eta_r^{res} \Big|^{extr}$ от отношения масс на кривой $\mathfrak{M}$ (рис. 10)

$$\eta_r^{res} \Big|^{extr} = \sqrt{1 + \frac{256\mu^2(\mu+1)^2}{\pi^2 \times}} \times \left[\frac{16(\mu+1)^2 - 8(\mu+1)(3\mu+2 - \sqrt{\mu(9\mu+8)})}{(3\mu+4 + \sqrt{\mu(9\mu+8)})} + 4\mu(\mu+1) \right]^2. \quad (29)$$

С увеличением отношения масс μ и при поддержании предельного уровня амплитуды возмущения X_0^{lim} проекция кривой резонансных частот $\eta_r^{res} \Big|^{extr}$ (линия 2 на рис. 10) стремится к своей асимптоте 4 $\eta_r^{res} \Big|_{lim}^t \cong 1,619$.

Подставив (29) в (21), получим зависимость коэффициента относительного затухания

Таблица 2

Некоторые значения резонансных частот относительных колебаний на кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}$

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13
m	10^{-10}	0,01	0,2	1	2	4	6	8	10	20
$\eta_r^{res} \Big ^{extr}$	1	1,004	1,086	1,290	1,398	1,486	1,524	1,545	1,558	1,587

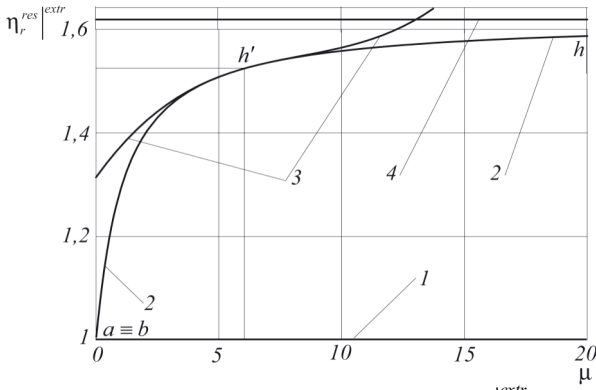


Рис. 10. Зависимость частоты $\eta_r^{res|extr}$ от отношения масс μ на кривой $\mathcal{M}$

$\psi^{extr}(\mu)$ на кривой $\mathcal{M}$ (линия $11'$ на рис. 11) в предположении, что резонанс относительных колебаний происходит на этой кривой. В отличие от них резонанс абсолютных колебаний при гиперболическом типе ЧХ $y(h)$ всегда происходит на частоте $\eta_a^{res} = 1$. Если принять, что этот резонанс также происходит на кривой $\mathcal{M}$, то выражение для $\psi^{extr}(\mu)$ будет совпадать с (21), в котором следует положить $\eta_r^{res|extr} = 1$ (кривая 11 на рис. 11). Экстремальным отношениям масс 2–10, 13 на кривой $11'$ соответствуют резонансные частоты в табл. 2.

Предельная амплитуда возмущения. Под действием некоторой единственной амплитуды возмущения X_0^{lim} (для каждого значения μ) система будет совершать колебания с предельной амплитудой относительных колебаний, если при этом частота возмущения будет в точности равна своему резонансному значению η_r^{res} (кривая 3 на рис. 9).

Для нахождения зависимости этой предельной амплитуды кинематического возмущения от отношения масс частей подставим выражение для резонансной частоты (25) в АЧХ относительных перемещений (22). Получим

$$\frac{A_{q,r}^{res}}{X_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{[\alpha^{res}(\eta)]^2}}. \quad (30)$$

Теперь, считая, что резонансная амплитуда относительных колебаний $A_{q,r}^{res}$ достигается на кривой экстремальных амплитуд $\mathcal{M}$ и равна значению $A_{q,r}^{extr}$, подставим в (30), записанном в виде уравнения

$$\frac{A_{q,r}^{extr}}{X_0^{lim}} - \sqrt{1 + \frac{\pi \left[(M_{q,r}^{extr})^2 + \mu M_{q,r}^{extr} - (A_{q,r}^{extr})^2 \right]}{4\mu M_{q,r}^{extr}}} = 0,$$

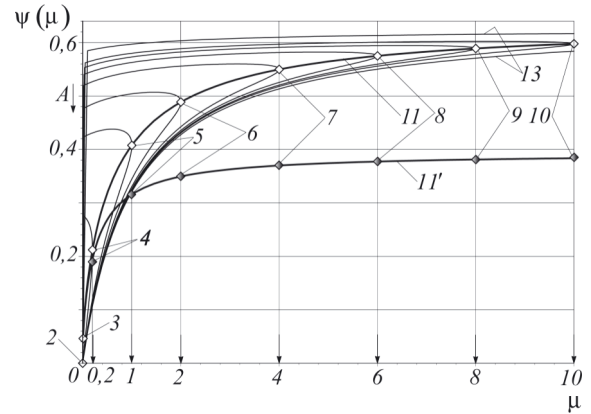


Рис. 11. Зависимость коэффициента относительного затухания на поверхностях 1, 2 и кривой 3 (рис. 1, а) от отношения масс μ : кривые 2–11, 13 – для случая резонанса абсолютных колебаний на кривой $\mathcal{M}$; кривая $11'$ – для случая резонанса относительных колебаний на кривой $\mathcal{M}$

выражения для амплитуды $A_{q,r}^{extr}(\mu)$ (17) и смещения $M_{q,r}^{extr}(\mu)$ из (15б) с учетом (16). Решая это трансцендентное уравнение относительно амплитуды кинематического возмущения, получим зависимость ее предельного значения от отношения масс частей упругого элемента $X_0^{lim} = f(\mu)$ (рис. 12).

Можно поставить обратную задачу: каково должно быть минимальное отношение масс μ для заданной амплитуды возмущения X_0 ?

Некоторые выводы

1. С учетом выражений для среднего (2а) и амплитудного (2б) значений смещения состояния статического равновесия выражения для эквивалентных коэффициентов (5) переписываются в виде

$$c_{eq}(A_{q,r}) = \frac{1 + \Delta L_1^{av}}{(1 + \Delta L_1^{av})^2 - (\Delta L_1^a)^2},$$

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{2}{\pi\eta} \cdot \frac{\mu}{\mu + 1} \left\{ 1 - \frac{1}{\mu} \left[\Delta L_1^{av} + \frac{(\Delta L_1^a)^2}{1 + \Delta L_1^{av}} \right] \right\}. \quad (31)$$

Анализ графиков на рис. 4, б; 4, в; 6, а и 6, б показывает, что слагаемым ΔL_1^a в (31) можно пренебречь (это не означает приравнивания ΔL_1^a в (2в) к нулю). В этом случае эквивалентные коэффициенты (см. рис. 8) определяются изменением среднего смещения состояния равновесия. Если при этом $\Delta L_1^{av} = 0$ (на S_{st}^t), то $\psi^{lim} = \psi|_{A_{q,r}=0} = 2\mu / [\pi\eta(\mu + 1)]$

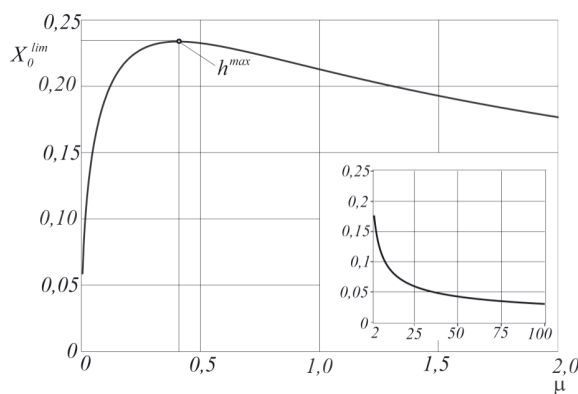


Рис. 12. Зависимость предельной амплитуды возмущения $X_0^{\lim}$ от отношения масс μ . Точка $h^{\max}$ имеет координаты (0,41; 0,235)

(точки 1'–12' на рис. 8, б), а если $\Delta L_1^{av} = -1$ (на S_{st}^b), то $\psi^{\lim} = \psi|_{A_{q,r}=0} = 2/(\pi\eta)$. Условие $\Delta L_1^a = 0$ эквивалентно тому, что амплитуда $A_{q,r} = 0$, а равенство $\Delta L_1^{av} = 0$ или $\Delta L_1^{av} = -1$ дополнително еще и тому, что смещение $M_{q,r} = 1$ или $M_{q,r} = 0$ соответственно [1].

После некоторых преобразований выражения (31) приводятся к виду

$$c_{eq}(M_{q,r}) = 1/M_{q,r}; \quad (32a)$$

$$\psi(M_{q,r}) = \frac{2}{\pi\eta} \left(1 - \frac{M_{q,r}}{\mu + 1} \right), \quad (32b)$$

в которых всякая зависимость этих коэффициентов от особенностей поверхности (см. рис. 1, а) вообще исчезает.

Поскольку отрезок изменения амплитуды и смещения на устойчивой части поверхности связи одинаков $[0, 1]$, то кривая (32a) совпадает с гиперболой 2 на рис. 8, а. Динамическая жесткость на части этой гиперболы в полуинтервале $M_{q,r} \in [0, 2/3)$ соответствует поверхности S_{st}^b , а на отрезке $M_{q,r} \in [2/3, 1]$ – поверхности S_{st}^t и кривой $\mathfrak{M}$ (см. рис. 1, а).

Зависимость (32б) представляет собой семейство прямых, зависящее от отношения масс μ как от параметра.

Графики на рис. 1, б позволяют установить взаимно-однозначное соответствие между гиперболой (32a), семейством прямых (32б) и рис. 8, а и 8, б соответственно. Возможность пренебрежения амплитудой ΔL_1^a в (31) подтверждается близостью частотных характеристик смещения центра колебаний $M_{q,r}(\eta)$ и среднего смещения состояния равновесия $\Delta L_1^{av}(\eta)$.

2. Гиперболический тип частотной характеристики коэффициента относительного затухания обусловлен практически линейной зависимостью как амплитуды ΔL_1^a (см. рис. 6, а), так и функции f_{hb} (см. рис. 7, а) от амплитуды $A_{q,r}$ и независимостью количества рассеянной энергии ΔW от частоты возмущения. Существенные отклонения амплитудной зависимости энергии ΔW от квадратичной, имеющие место на поверхности S_{st}^b при малых отношениях масс μ вблизи кривой $\mathfrak{M}$, в значительной мере компенсируются резким спадом динамической жесткости.

3. Положительный характер амплитуды $\Delta L_1^a = (\Delta L_1^l - \Delta L_1^{unl})/2$ (см. рис. 5) обеспечивается тем, что отрицательная величина смещения состояния равновесия при разгрузке упругого элемента ΔL_1^{unl} всегда больше абсолютной величины смещения ΔL_1^l при его нагружении. Эта особенность обеспечивает эквивалентную диссипативность СА с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой.

Заключение

Гиперболический тип частотной характеристики коэффициента относительного затухания обусловлен особенностями амплитудных характеристик смещения состояния статического равновесия, функции параметров и их независимостью от частоты возмущения. Эти особенности позволяют считать коэффициент относительного затухания практически не зависящим от амплитуды. Почти линейная зависимость или независимость этого коэффициента от отношения масс частей на отрезке $\mu \in [4, 10]$ и обратно пропорциональная частоте возмущения позволяют получить его значение в зоне низкочастотного резонанса на уровне 0,4–0,6 с монотонным спадом в зарезонансной зоне.

Список литературы

1. Калашников Б.А.. Об одном способе амортизации, основанном на дискретной коммутации частей упругих элементов // Машиностроение и инженерное образование. 2009. № 1. С. 42–52.
2. M. van Hoeij. Rational Parametrization of Algebraic Curves using a Canonical Divisor // JSC. 1997. V. 23. P. 209–227.
3. Беляковский Н.Г. Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах. – Л.: Судостроение, 1965. – 523 с.