

УДК 621-88, 62-112.8, 517.958:532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ПРЕЦИЗИОННЫХ СОЕДИНЕНИЯХ С УЧЕТОМ МИКРОТОПОГРАФИИ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

В.В. Порошин, А.А. Аносова, Д.Ю. Богомолов

В статье представлена математическая модель расчета течения сплошной среды в прецизионных соединениях с учетом трехмерной топографии их рабочих поверхностей. Влияние топографии поверхности на утечки характеризуется с помощью коэффициентов потока. Приведены результаты расчетов коэффициентов потока для поверхностей с искусственно созданной регулярной шероховатостью в виде простых геометрических элементов.

Ключевые слова: прецизионные соединения, микротопография поверхности, математическая модель течения, коэффициенты потока

Введение

Прецизионные металл-металлические соединения являются одними из наиболее широко используемых в промышленности герметизируемых соединений. Они входят в конструкции двигателей внутреннего сгорания, плунжерных насосов различных типов, компрессоров холодильных установок и т.д. От герметичности такого рода соединений во многом зависит эффективность работы вышеперечисленных машин и устройств.

Комплексной физико-математической модели для прогнозирования утечек рабочих сред в герметизируемых соединениях, достаточно полно учитывающей трехмерную топографию их поверхностей, не существует. Из-за отсутствия математического аппарата и программного обеспечения возникает необходимость проведения длительного и трудоемкого экспериментального подбора технологических методов изготовления и сборки герметизируемых соединений, что приводит к существенному удорожанию этапа проектирования.

Целью настоящей работы являлась разработка математической модели течения сплошной среды в прецизионных соединениях с учетом трехмерной микротопографии поверхностей.

Модель течения сплошной среды в прецизионных соединениях

При построении математической модели течения сплошной среды в прецизионных соединениях использована геометрическая модель зазора в канале участка соединения, учитывающая трехмерную шероховатость поверхности.

Высоты неровностей поверхностей $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ задаются на общей прямоугольной координатной сетке. Шаги сетки в направлениях x и y являются постоянными. Средний зазор H между поверхностями берется как расстояние между их средними плоскостями. Текущий зазор задается как $h_t(x, y) = H + h_1(x, y) + h_2(x, y)$.

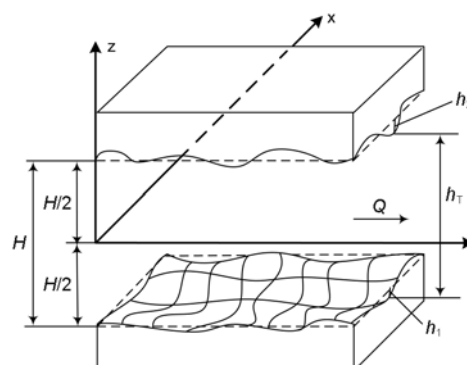


Рис. 1. Модель участка соединения:
 h_t – текущий зазор; Q – утечки

* Исследование выполнено в рамках государственного контракта № 16.740.11.0305 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

В качестве исходных данных о топографии канала могут быть использованы результаты измерения реальных технологических поверхностей или искусственно созданные топографические карты поверхностей.

Для расчета течения в щелевых каналах соединений используется уравнение Рейнольдса в давлениях:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_t^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_t^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu \left(U_x \frac{\partial h_t}{\partial x} + U_y \frac{\partial h_t}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где p – давление; μ – динамическая вязкость; U_x , U_y – скорости относительного движения поверхностей вдоль осей Ox и Oy соответственно. В качестве граничных условий, необходимых для решения уравнения (1), как правило, задается перепад давлений $p_A - p_B$. Все приведенные зависимости справедливы для вязкой несжимаемой среды с плотностью $\rho = \text{const}$.

Скорости течения среды v_x и v_y с учетом условий прилипания на твердых стенках определяются по формулам:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(x,y)} z(z - h_t(x, y)) + \\ &+ U_x \left(1 - \frac{z}{h_t(x, y)} \right); \\ v_y(x, y, z) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{(x,y)} z(z - h_t(x, y)) + \\ &+ U_y \left(1 - \frac{z}{h_t(x, y)} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Объемный расход сплошной среды в канале в направлении оси Ox определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{V_x} &= \int_0^{L_y} \int_0^{h_t(L_x, y)} v_x(L_x, y, z) dz dy = \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^{h_t(L_x, y)} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(L_x, y)} z(z - h_t(L_x, y)) + \right. \\ &\quad \left. + U_x \left(1 - \frac{z}{h_t(L_x, y)} \right) \right] dz dy = \\ &= \int_0^{L_y} \left[-\frac{h_t^3(L_x, y)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(L_x, y)} + \frac{U_x h_t(L_x, y)}{2} \right] dy, \end{aligned} \quad (3)$$

где L_x – размер канала.

Выражение для нахождения объемного расхода в направлении оси Oy аналогично выражению (3):

$$Q_{V_y} = \int_0^{L_y} \left[-\frac{h_t^3(x, L_y)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{(x, L_y)} + \frac{U_y h_t(x, L_y)}{2} \right] dx, \quad (4)$$

где L_y – размер канала.

Расчет утечек сплошной среды в прецизионных соединениях с помощью коэффициентов потока

Теоретически уравнение Рейнольдса позволяет моделировать течение среды во всем реальном соединении путем подстановки результатов измерения его поверхности в качестве функции h_t . Однако на практике размеры соединений значительно превышают величину шага шероховатости поверхности. В связи с этим возникает необходимость задания чрезвычайно большого количества узлов сетки. За счет этого сеточная модель становится настолько объемной, что решение уравнения Рейнольдса на современном этапе развития вычислительной техники не представляется возможным.

В связи с этим в данной работе влияние шероховатости учитывалось посредством коэффициентов потока [1–4], ориентированного вдоль оси Oy . Коэффициенты статической ϕ_y и динамической θ_y составляющих потока вычисляются как соотношение расходов рабочей среды в зазорах с шероховатыми Q_{ys} и гладкими $\bar{Q}_{ys}$ стенками [5]:

$$\begin{aligned} \phi_y &= Q_{ys} / \bar{Q}_{ys}; \\ Q_{ys} &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{((h_t)_i^m)^3}{12\mu} \frac{(p_i^m - p_i^{m-1})}{\Delta y} \right) \Delta x; \\ \bar{Q}_{ys} &= -L_x \frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}; \\ \theta_y &= Q_{yd} / \bar{Q}_{yd}; \\ Q_{yd} &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{((h_t)_i^m)^3}{12\mu} \frac{(p_i^m - p_i^{m-1})}{\Delta y} + \frac{U_y (h_t)_i^m}{2} \right) \Delta x; \end{aligned}$$

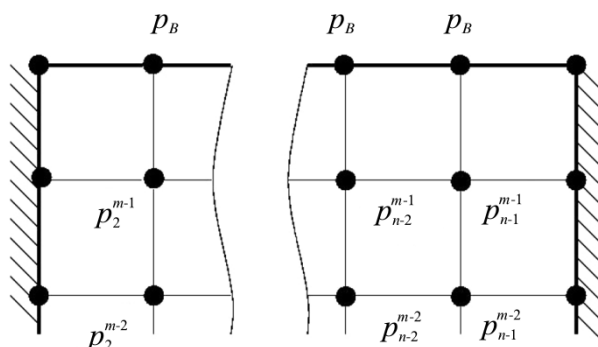


Рис. 1. Карта давлений рабочей среды

$$\bar{Q}_{yd} = L_x \left(-\frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{U_y H}{2} \right).$$

где n , m – количество разбиений сетки по осям Ox и Oy соответственно. Расчет $\bar{Q}_{ys}$ производится по известной аналитической зависимости [6].

Коэффициенты ϕ_y , θ_y рассчитываются на небольшом характерном участке соединения и далее могут быть использованы для расчета герметичности соединения в целом.

Для участка соединения, в котором течение среды происходит за счет напорного движения вдоль оси Oy и движения одной из стенок вдоль той же оси, уравнение Рейнольдса (1) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_t^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_t^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu U_y \frac{\partial h_t}{\partial y} \quad (5)$$

при следующих граничных условиях:

- 1) $p = p_A$ при $y = 0$;
- 2) $p = p_B$ при $y = L_y$;
- 3) $\partial p / \partial x = 0$ при $x = 0$, $x = L_x$.

Для решения уравнения (5) была разработана расчетная схема с использованием метода конечных элементов. Полученная в результате расчетов карта давлений (рис. 1) используется для нахождения утечек на данном участке соединения.

При наличии относительного движения стенки канала коэффициенты потока вычисляются отдельно для статической и динамической составляющих потока.

Для рассмотренного выше случая коэффициент статического потока ϕ_y вычисляется при условиях:

- 1) $p = p_A$ при $y = 0$;
- 2) $p = p_B$ при $y = L_y$;
- 3) $U_x = 0$, $U_y = 0$.

Коэффициент динамического потока θ_y рассчитывается при условиях:

- 1) $p = 0$ при $y = 0$, $y = L_y$;
- 2) $U_x = 0$, $U_y = \text{const} \neq 0$.

Оба коэффициента потока безразмерны и не зависят от конкретных значений давления, вязкости и скорости относительного перемещения стенок. Если исследуемый канал не имеет других видов неровностей поверхности стенок кроме шероховатости (или другими видами неровностей можно пренебречь), то полученные коэффициенты потока могут быть подставлены в аналитическое выражение для определения

утечек. Так, для канала, составленного из двух параллельно расположенных прямоугольных шероховатых пластин длиной L и шириной N , утечка будет определяться по формуле

$$Q_{vy} = N \left(\phi_y \frac{H^3}{12\mu} \frac{p_A - p_B}{L} + \theta_y \frac{U_y H}{2} \right). \quad (9)$$

Модельные эксперименты по расчету коэффициентов потока в каналах прецизионных соединений

Как показал проведенный анализ, некоторые виды регулярной шероховатости поверхности могут существенно улучшить выходные параметры технических устройств. В связи с этим важными являются разработка и исследование трехмерных моделей искусственно созданной регулярной шероховатости поверхности, что обеспечит заданные эксплуатационные показатели исследуемых технических систем.

Для исследования влияния регулярной трехмерной топографии поверхности на характер течения и значения коэффициентов потока была проведена серия модельных экспериментов. В первой группе экспериментов рассчитывались значения статического коэффициента потока, а во второй – динамического, которые характеризуют напорную и динамическую составляющие соответственно. Для второй группы экспериментов скорость движения стенки канала U_y задавалась равной 1 м/с.

Расчеты проводились для каналов с искусственной шероховатостью поверхности стенок с регулярным микрорельефом, построенным из простых геометрических элементов. Использовались поверхности, состоящие из параллельных борозд прямоугольного сечения (параллелепипедов), пирамид квадратного сечения,

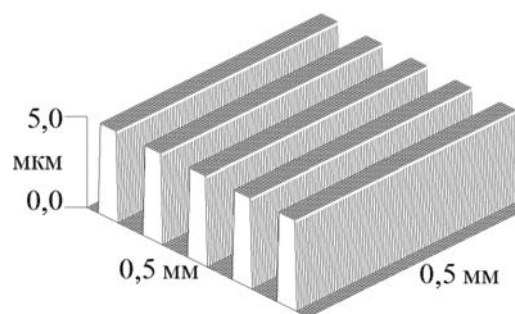
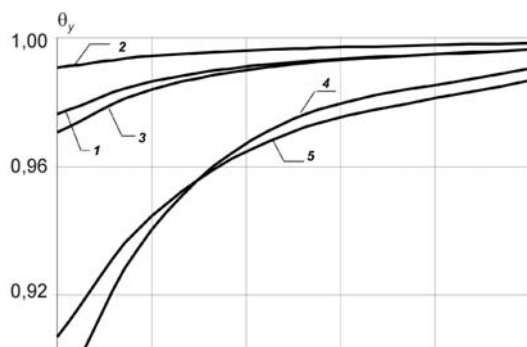
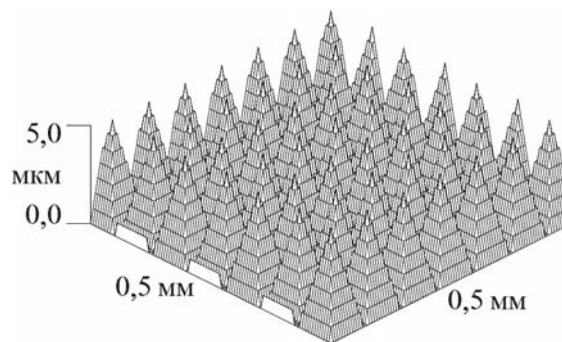


Рис. 2. Поверхность с пятью выступами в виде параллелепипедов, чередующимися впадинами такой же ширины ($R_{\max} = 5$ мкм, $S_m = 0,1$ мм)



а



б

Рис. 3. Поверхности с регулярными неровностями в виде половинок эллипсоидов вращения (а) и пирамид квадратного сечения (б) ($R_{\max} = 5 \text{ мкм}$, $S_m = 0,1 \text{ мм}$)

сглаженных пирамид и половинок эллипсоидов вращения (рис. 2, 3).

При моделировании поверхностей размер участка поверхности — $0,5 \times 0,5 \text{ мм}$, максимальная высота неровностей $R_{\max} = 5 \text{ мкм}$, шаг по вершинам S_m оставался неизменным, равным $0,1 \text{ мм}$. Рассматривались сочетания размеров ширины впадин и борозд ($S_1 + S_2$) для поверхности из прямоугольных элементов $0,04 + 0,06 \text{ мм}$ и $0,02 + 0,08 \text{ мм}$, неровности ориентированы перпендикулярно к потоку. Во всех экспериментах зазор варьировался от 5 до 15 мкм.

Результаты экспериментов по расчету коэффициентов потока

Полученные результаты экспериментов (см. таблицу и рис. 4) подтверждают представление об определяющем значении коэффициента анизотропии поверхности, характеризующем направленность неровностей поверхности. Изотропные поверхности, составленные из обычных и сглаженных пирамид, оказывают малое влияние микротопографии на статический коэффициент потока (см. рис. 4, а и таблицу). Незначительно отличается от них поверхность, составленная из эллипсоидов. Наибольшее влияние на напорную составляющую утечек наблюдается для канала с поверхностью с ярко выраженной анизотропией, состоящей из параллелепипедов, ориентированных перпендикулярно направлению потока и движению стенки. Увеличение ширины борозд относительно впадин оказывает слабое влияние при больших зазорах. При малых зазорах это влияние усиливается.

Результаты исследования влияния микротопографии поверхности на значение динами-

ческого коэффициента потока (см. таблицу и рис. 4, б) могут применяться для анализа герметичности подвижных соединений, для которых характерно функционирование с небольшим гарантированным зазором.

Исследования, проведенные для модельных поверхностей, показали более слабое влияние топографии на динамическую составляющую утечек, чем на их напорную составляющую.

Эксперименты с изотропными поверхностями, составленными из пирамид и эллипсоидов, свидетельствуют о малом влиянии микротопографии на динамический коэффициент потока. В то же время анизотропные поверхности дают более существенное влияние на величину утечек. Увеличение ширины борозд относительно впадин оказывает на динамический коэффициент потока влияние, аналогичное влиянию на напорную составляющую.

Заключение

Разработана математическая модель расчета течения сплошной среды в прецизионных соединениях с учетом трехмерной топографии их рабочих поверхностей. Влияние микротопографии поверхности оценивается коэффициентами потока.

Проведенные модельные эксперименты для поверхностей с искусственно созданной регулярной шероховатостью в виде простых геометрических элементов свидетельствуют, что показатель анизотропии шероховатости поверхностей канала является определяющим параметром при расчете утечек.

Предложенная математическая модель может быть использована при проектировании прецизионных соединений для предварительной оценки их герметичности.

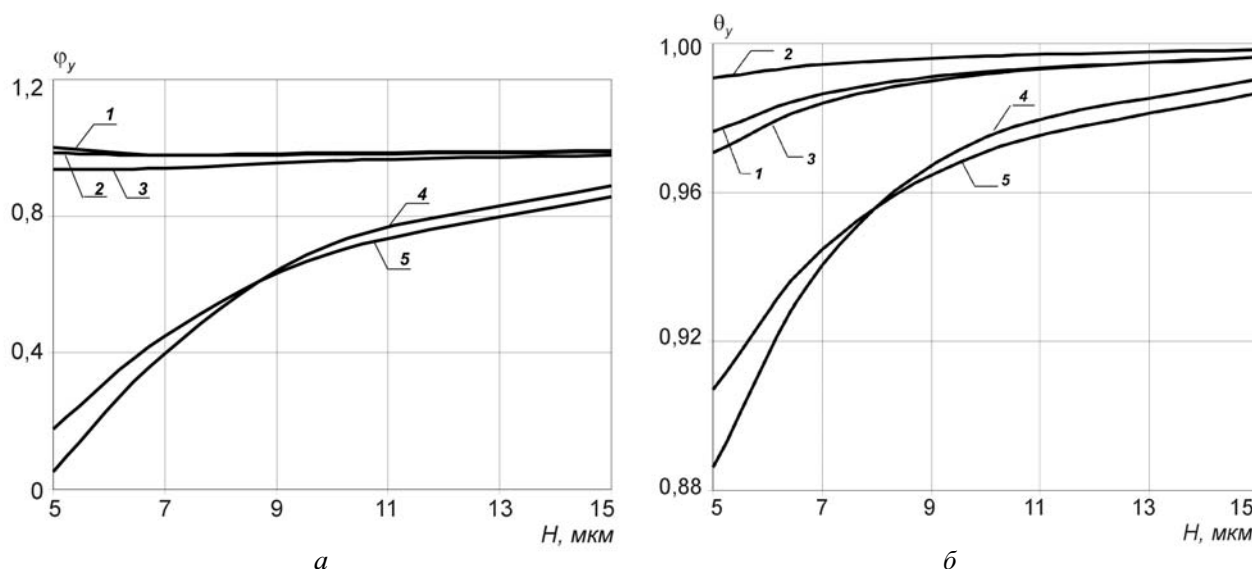


Рис. 4. Зависимости статического (а) и динамического (б) коэффициентов потока от среднего зазора для каналов с различными топографиями поверхности:

1 – эллипсоид; 2 – пирамиды; 3 – сглаженные пирамиды;
4 – параллелепипеды ($S_m=0,02+0,08$ мм); 5 – параллелепипеды ($S_m=0,04+0,06$ мм)

Коэффициенты потока для каналов с поверхностями, состоящими из простых геометрических элементов различных типов

H , мкм	Параллелепипеды		Эллипсоиды	Сглаженные пирамиды	Пирамиды
	при $S_m=0,04+0,06$ мм	при $S_m=0,02+0,08$ мм			
5	$\frac{0,1752}{0,9071}$	$\frac{0,05283}{0,8861}$	$\frac{1,0003}{0,9762}$	$\frac{0,9354}{0,9706}$	$\frac{0,9843}{0,9906}$
7	$\frac{0,4502}{0,9448}$	$\frac{0,3965}{0,9403}$	$\frac{0,9784}{0,9864}$	$\frac{0,9408}{0,9840}$	$\frac{0,9798}{0,9944}$
10	$\frac{0,6941}{0,9709}$	$\frac{0,7184}{0,9749}$	$\frac{0,9803}{0,9925}$	$\frac{0,9616}{0,9918}$	$\frac{0,9849}{0,9967}$
15	$\frac{0,8566}{0,9866}$	$\frac{0,8880}{0,9905}$	$\frac{0,9875}{0,9962}$	$\frac{0,9798}{0,9962}$	$\frac{0,9909}{0,9982}$

Примечание. Над чертой – статический коэффициент потока φ_y , под чертой – динамический коэффициент θ_y .

Список литературы

1. Patir N., Cheng H.S. An average flow model of determining effects of three dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication // ASME Journal of Lubrication Technology. 1978. Vol. 100. No. 1. P. 12–17.
2. Patir N., Cheng H.S. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces // ASME Journal of Lubrication Technology. 1979. Vol. 101. No. 1. P. 220–229.
3. Lunde L., Tonder K. Numerical simulation of the effects of three dimensional roughness on hydrodynamic lubrication: effects of boundary conditions / Proc. of 4th Int. Trib. Conference Austrib'94: Australia, 1994. P. 113–118.
4. Lunde L., Tonder K. Pressure and shear flow in a rough hydrodynamical bearing, flow factor calculation // ASME Journal of Tribology. 1997. Vol. 119. No. 3. P. 549–555.
5. Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Сыромятникова А.А. Численные исследования течения жидкости в герметизируемых соединениях с заданной микротопографией поверхности // Машиностроение и инженерное образование. 2010. № 1. С. 54–62.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

Материал поступил в редакцию 15.05.2011

ПОРОШИН

Валерий

Владимирович

E-mail: vporoshin@mail.ru
Тел.: +7 (495) 620-39-68

Доктор технических наук, профессор кафедры технологий и металлорежущих систем автомобилестроения ФГБОУ ВПО «МГИУ», почетный работник высшего образования РФ, лауреат премии правительства РФ. Область научных интересов – трибология, контроль качества поверхности, математическое моделирование гидродинамических процессов. Автор более 100 научных трудов и патентов.

АНОСОВА

Анна Алексеевна

E-mail: ann_lik@mail.ru
Тел.: +7 (495) 677-96-70

Кандидат технических наук. Ведущий инженер Центра испытаний и сертификаций ФГБОУ ВПО «МГИУ». Область научных интересов – математическое моделирование герметичности и теплоизоляции подвижных соединений. Автор более 20 научных публикаций.

БОГОМОЛОВ

Дмитрий Юрьевич

E-mail: bogom-ov@mail.ru
Тел.: +7 (495) 620-39-68

Кандидат технических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики ФГБОУ ВПО «МГИУ». Область научных интересов – математическое моделирование гидродинамических процессов, анализ микротопографии поверхности. Автор более 50 научных трудов и патентов.