УДК 539.376

ИЗГИБ БАЛКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ И РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА*

А.М. Локощенко, К.А. Агахи, Л.В. Фомин

Решена задача определения всех характерных параметров чистого изгиба балки прямоугольного поперечного сечения в процессе ползучести с учетом различных пределов прочности материала при растяжении и сжатии, а также с учетом увеличения поврежденности. В качестве определяющего соотношения ползучести и кинетического уравнения для поврежденности использована гипотеза о нелинейной вязкости с сингулярной составляющей. Проведены расчеты всех характеристик вплоть до времени разрушения балки, характеризуемого достижением осевыми напряжениями предельных значений, включая движение фронта разрушения.

Ключевые слова: *балка, изгиб, ползучесть, разносопротивляемость, пределы прочности при растяжении и сжатии, поврежденность материала, дробно-степенная модель, фронт разрушения.*

Введение

В настоящее время опубликовано довольно много работ, посвященных изучению чистого изгиба балок в процессе ползучести. При этом основное внимание уделяется исследованию изгиба балок при установившейся ползучести [1–4]. Вместе с тем существуют работы, в которых наряду с описанием установившейся ползучести исследуется процесс ползучести с учетом поврежденности материала [5–10]. Под поврежденностью понимается нарушение сплошности материала, а именно, рост микропор и микротрещин под действием растягивающего напряжения. Процесс накопления повреждений учитывается с помощью параметра сплошности ψ или параметра поврежденности $\omega = 1 - \psi$, впервые введенных соответственно Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым и описанных в их монографиях [1, 3].

Задачи определения характерных параметров чистого изгиба балок при ползучести с учетом поврежденности материала, имеющих одинаковые свойства при растяжении и сжатии, рассмотрены, в частности, в работах [5–7]. В работах [8–10] рассматривается та же задача с дополнительным учетом разносопротивляемости материала растяжению и сжатию. При этом в определяющих и кинетических уравнениях используются степенные или экспоненциальные зависимости скорости ползучести и скорости увеличения поврежденности от напряжения. Это обстоятельство позволяет исследовать решения задач при произвольных, в том числе достаточно больших, напряжениях, которые в принципе могут превосходить естественные пределы кратковременной прочности материала.

В отличие от всех известных решений в данной работе исследуется изгиб стержней, в которых осевые напряжения автоматически ограничены пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11-08-01015, 11-08-00007.

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается чистый изгиб при ползучести вплоть до разрушения балки прямоугольного поперечного сечения, изготовленной из материала с различными пределами прочности при растяжении и сжатии. При этом ползучесть балки при растяжении сопровождается увеличением поврежденности. Задача решается с учетом гипотезы плоских сечений. Разрушение балки наступает в связи с достижением осевыми напряжениями предельных значений.

Методы решения

Система уравнений, содержащаяся в задаче, решается численным методом с помощью итерационных алгоритмов. Используется система координат, оси которой Ox и Oy являются осями симметрии прямоугольного сечения. Изгибающий момент M действует в плоскости yOz. Высота сечения балки H по оси y, ширина b и длина l удовлетворяют неравенствам $l >> H$, $l >> b$.

Исследуя процесс ползучести изгибаемой балки, пренебрегаем упругопластическими деформациями вследствие их малости по сравнению с деформациями ползучести. В соответствии с гипотезой плоских сечений имеем:

$$\dot{p}_z = \dot{p} = \dot{\chi}\left(y - y_0\right), \tag{1}$$

где $\dot{p} = \dot{p}(y, t)$ — скорость ползучести; $\dot{\chi} = \dot{\chi}(t)$ — скорость изменения кривизны балки; $y_0 = y_0(t)$ — координата нейтральной линии напряжения, на которой $\sigma_z = \sigma(y_0, t) \equiv 0$.

Смещение нейтральной линии изогнутой балки при ползучести происходит вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию, а также изменения параметра сплошности ψ только в растягиваемой области.

Зависимости скорости ползучести и скорости изменения параметра сплошности от напряжения принимаются в виде дробно-степенных функций [11, 12]:

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} A\left[\dfrac{\sigma}{\sqrt{\left(\sigma_{b1} - \sigma\right)\,\left(\sigma - \sigma_{b2}\right)\psi}}\right]^n & \text{при } \sigma > 0; \\ A\left[\dfrac{\sigma}{\sqrt{\left(\sigma_{b1} - \sigma\right)\,\left(\sigma - \sigma_{b2}\right)}}\right]^n & \text{при } \sigma \le 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \begin{cases} -B\left[\dfrac{\sigma}{\sqrt{\left(\sigma_{b1} - \sigma\right)\,\left(\sigma - \sigma_{b2}\right)\psi}}\right]^m & \text{при } \sigma > 0; \\ 0 & \text{при } \sigma \le 0, \end{cases} \tag{3}$$

где A, B, n, m — материальные константы; σ_{b1} — предел прочности при растяжении; σ_{b2} — сжимающее напряжение, равное по абсолютной величине пределу прочности при сжатии.

Напряженно-деформированное состояние изгибаемой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями $\sigma = \sigma(y, t)$ и осевыми деформациями ползучести $p = p(y, t)$. Связь между скоростями деформаций $\dot{p} = \dot{p}(y, t)$ и напряжениями $\sigma = \sigma(y, t)$ подчиняется уравнениям (2), а параметр сплошности $\psi = \psi(y, t)$ — уравнениям (3).

Введем безразмерные переменные:

$$\alpha = -\sigma_{b2} / \sigma_{b1}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{b1}}; \quad \bar{y} = \frac{2y}{H}; \quad \bar{t} = At;$$
$$\bar{M} = \frac{4}{bH^2\sigma_{b1}}M; \quad \bar{N} = \frac{2}{bH\sigma_{b1}}N; \quad \bar{\chi} = \frac{H}{2}\chi;$$
$$\dot{\bar{\chi}} = \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} = \frac{H}{2A}\frac{d\chi}{dt}; \qquad \bar{B} = \frac{B}{A}, \tag{4}$$

где N – осевая сила.

Уравнения равновесия балки в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \bar{N} = \displaystyle\int_{-1}^{\bar{y}_0} \bar{\sigma}_- d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^{1} \bar{\sigma}_+ d\bar{y} = 0\,; & (5) \\ \bar{M} = \displaystyle\int_{-1}^{\bar{y}_0} \bar{\sigma}_- \bar{y} d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^{1} \bar{\sigma}_+ \bar{y} d\bar{y}\,. & (6) \end{cases}$$

В уравнениях (5), (6) под $\bar{\sigma}_-$ и $\bar{\sigma}_+$ понимаются безразмерные сжимающие и растягивающие напряжения.

С учетом введенных безразмерных переменных (4) соотношения (2) и (3) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{dp}{d\bar{t}} = \begin{cases} \left[\dfrac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\left(1 - \bar{\sigma}\right)\,\left(\alpha + \bar{\sigma}\right)\psi}}\right]^n & \text{при } \bar{\sigma} > 0; \\ \left[\dfrac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\left(1 - \bar{\sigma}\right)\,\left(\alpha + \bar{\sigma}\right)}}\right]^n & \text{при } \bar{\sigma} \le 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{d\psi}{d\bar{t}} = \begin{cases} -\bar{B}\left[\dfrac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\left(1 - \bar{\sigma}\right)\cdot\left(\bar{\sigma} + \alpha\right)\psi}}\right]^m & \text{при } \bar{\sigma} > 0; \\ 0 & \text{при } \bar{\sigma} \le 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из первого соотношения (7) при $\bar{\sigma} > 0$ с учетом гипотезы плоских сечений в безразмерных переменных получим:

$$\left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})\;(\alpha+\bar{\sigma})\psi^2}\right]^{n/2} = C(\bar{y},\bar{t}) \text{ при } \bar{\sigma} > 0, \tag{9}$$

где

$$C(\bar{y},\bar{t}) = \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}}(\bar{y}-\bar{y}_0)\right]^{2/n}. \tag{10}$$

Тогда из уравнения (9) получим квадратное уравнение относительно $\bar{\sigma}$ вида:

$$\left(1+C\psi^2\right)\bar{\sigma}^2 + C\psi^2(\alpha-1)\bar{\sigma} - \alpha C\psi^2 = 0\,. \tag{11}$$

Отсюда безразмерные напряжения $\bar{\sigma}$ определяются по формуле

$$\bar{\sigma}_{+,-} = \frac{-C\psi^2(\alpha-1) \pm \sqrt{C^2\psi^4(\alpha-1)^2 + 4\left(1+C\psi^2\right)\alpha C\psi^2}}{2\left(1+C\psi^2\right)},$$

$$\psi = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_- < 0. \tag{12}$$

Преобразуем формулу (8) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\psi^{m+1}\right)}{d\bar{t}} = -\bar{B}(m+1)\left[\dfrac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})\;(\bar{\sigma}+\alpha)}\right]^{m/2} & \text{при } \bar{\sigma} > 0; \\ \dfrac{d\psi}{d\bar{t}} = 0 & \text{при } \bar{\sigma} \le 0. \end{cases} \tag{13}$$

Выпишем полную систему уравнений в безразмерных переменных:

Таким образом, решение задачи об изгибе балки сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (14) относительно неизвестных функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\psi(\bar{y},\bar{t})$ с начальными условиями $\bar{\chi}(0) = 0$ и $\psi(\bar{y},0) = 1$. Начальное значение $\bar{y}_0(0)$ совпадает со значением, полученным в аналогичной задаче при установившейся ползучести без учета поврежденности [13].

При численном решении задачи используем то обстоятельство, что в систему уравнений (14) входят производные по одной переменной, а интегралы берутся по другой. Разбивая сечение балки по высоте на отрезки с шагом $\Delta\bar{y}$, будем искать значения неизвестных функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\psi(\bar{y},\bar{t})$ в точках разбиения интервала по времени t с шагом $\Delta\bar{t}$: $\bar{t}_1 = \Delta\bar{t}$, $\bar{t}_2 = \bar{t}_1 + \Delta\bar{t}$ и т.д.

Зададим шаг по времени $\Delta\bar{t}$ и методом конечных разностей будем искать значения $\bar{\chi}, \psi, \bar{y}_0$ на каждом шаге, используя значения, полученные на предыдущем шаге.

Расчеты по уравнениям системы (14) проводятся до тех пор, пока на поверхностном растянутом, самом ослабленном слое параметр сплошности не достигнет нулевого значения: $\psi(\bar{y}=1,\bar{t}^*) = 0$ (параметр поврежденности $\omega(\bar{y}=1,\bar{t}^*) = 1$). В этот момент времени $\bar{t} = \bar{t}^*$ появляется фронт разрушения, который с течением времени начинает продвигаться вглубь балки. Движение фронта разрушения описывается координатой $\xi(\bar{t})$. Интегрирование уравнений равновесия в растянутой зоне

$$\begin{cases} \bar{N} = \displaystyle\int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{-C(\alpha-1) - \sqrt{C^2(\alpha-1)^2 + 4(1+C)\alpha C}}{2(1+C)}d\bar{y} + \\ \quad + \displaystyle\int_{\bar{y}_0}^{1} \frac{-C\psi^2(\alpha-1) + \sqrt{C^2\psi^4(\alpha-1)^2 + 4\left(1+C\psi^2\right)\alpha C\psi^2}}{2\left(1+C\psi^2\right)}d\bar{y} = 0; \\ \bar{M} = \displaystyle\int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{-C(\alpha-1) - \sqrt{C^2(\alpha-1)^2 + 4(1+C)\alpha C}}{2(1+C)}\bar{y}d\bar{y} + \\ \quad + \displaystyle\int_{\bar{y}_0}^{1} \frac{-C\psi^2(\alpha-1) + \sqrt{C^2\psi^4(\alpha-1)^2 + 4\left(1+C\psi^2\right)\alpha C\psi^2}}{2\left(1+C\psi^2\right)}\bar{y}d\bar{y}; \\ \dfrac{d\psi^{m+1}}{d\bar{t}} = -(m+1)\bar{B}\left[\dfrac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})(\bar{\sigma}+\alpha)}\right]^{m/2}. \end{cases} \tag{14}$$

балки проводится до этой координаты. Напряжения в балке начинают перераспределяться таким образом, что в неразрушенной части балки сохраняется равновесие по внутренним усилиям (напряжениям). Расчет проводится до тех пор, пока напряжения на внешних сторонах растянутой и сжатой зон не достигнут соответствующих значений пределов прочности. Этот момент времени $\bar{t} = \bar{t}^{**}$, соответствующий предельному напряженному состоянию, является моментом разделения балки на две части, т.е. разрушения балки.

Результаты расчетов

В расчетах примем следующие значения параметров, входящих в систему уравнений (14): $\alpha = 1{,}5$ (например, для магниевых сплавов МЛ4, МЛ8 [14]), m=n=3, $\bar{B}$=20. Безразмерный изгибающий момент был принят $\bar{M}$=0,5.

В соответствии с принятыми прочностными характеристиками материала и изгибающим моментом в аналогичной задаче изгиба балки без учета поврежденности было получено следующее значение безразмерной координаты нейтральной линии $\bar{y}_0 = -\,0{,}061$ [13].

Найденные значения неизвестных функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$, $\xi(\bar{t})$ при увеличении параметра поврежденности и при движении фронта разрушения приведены в табл. 1 и 2.

На рис. 1 представлены графики зависимостей $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$.

На основе полученного решения системы уравнений (14) и формул (12) построены график зависимости параметра поврежденности от координаты $\bar{y}$ и эпюры распределения напряжений по поперечному сечению балки в точках разбиения интервала по времени $\bar{t}$ (рис. 2).

На основе полученных данных, приведенных в табл. 2, построен график движения фронта разрушения во времени (рис. 3).

Условие продвижения фронта разрушения с поверхности вглубь балки: $\omega(\bar{y}=\xi, \bar{t}) = 1$. Расчет показал, что интервал времени продвижения фронта вплоть до разрушения (момента достижения напряжений внутри балки σ_{b1}, σ_{b2}): $\bar{t}^* \le \bar{t} \le \bar{t}^{**}$, $\bar{t}^* = 0{,}2221$, $\bar{t}^{**} = 0{,}2221118$. Глу-

Таблица 1

Значения функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$ при увеличении параметра поврежденности

$\bar{t}$	$\bar{y}_0(\bar{t})$	$\bar{\chi}(\bar{t})$	$\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$
$\bar{t}_0 = 0$	–0,061	0	0
$\bar{t}_1 = 0{,}1$	–0,1295	0,021	0,275
$\bar{t}_2 = 0{,}2$	–0,264	0,074	0,636
$\bar{t}_3 = 0{,}21$	–0,297	0,082	0,748
$\bar{t}_4 = 0{,}215$	–0,329	0,088	0,831
$\bar{t}_5 = 0{,}22$	–0,391	0,105	0,925
$\bar{t}_6 = 0{,}222$	–0,491	0,149	0,982
$\bar{t}_7 = \bar{t}^* = 0{,}2221$	–0,491012	0,161	1,000

Таблица 2

Значения функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$ при движении фронта разрушения

ξ	$\bar{t}$	$\bar{y}_0(\bar{t})$	$\bar{\chi}(\bar{t})$	$\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$
1	$\bar{t}_7 = \bar{t}^* = 0{,}2221$	–0,491012	0,161	1,000
0,95	$\bar{t}_8 = 0{,}222111$	–0,491015	0,171	1,000
0,9	$\bar{t}_9 = \bar{t}^{**} = 0{,}2221118$	–0,4910153	0,1734	1,000

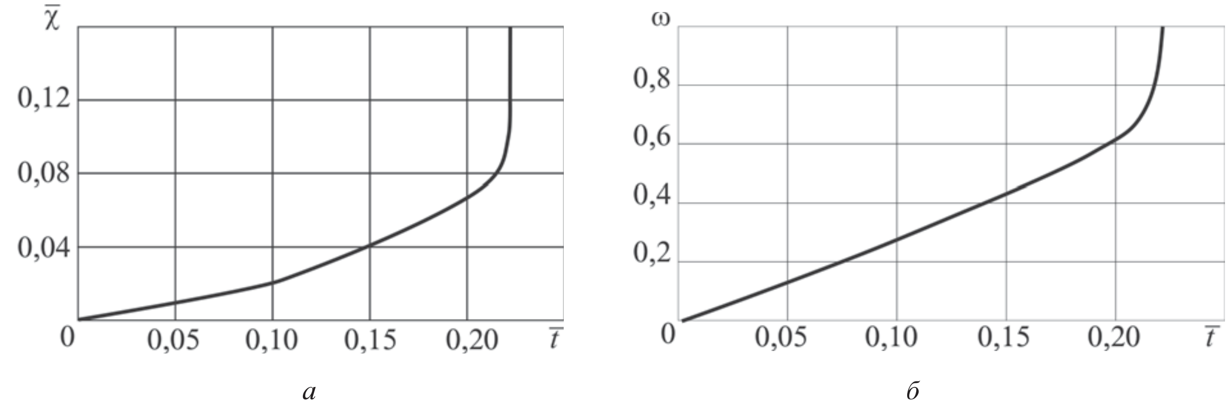

Рис. 1. Графики зависимостей $\overline{\chi}(\overline{t})$ (*а*) и $\omega(\overline{y}=1, \overline{t})$ (*б*)

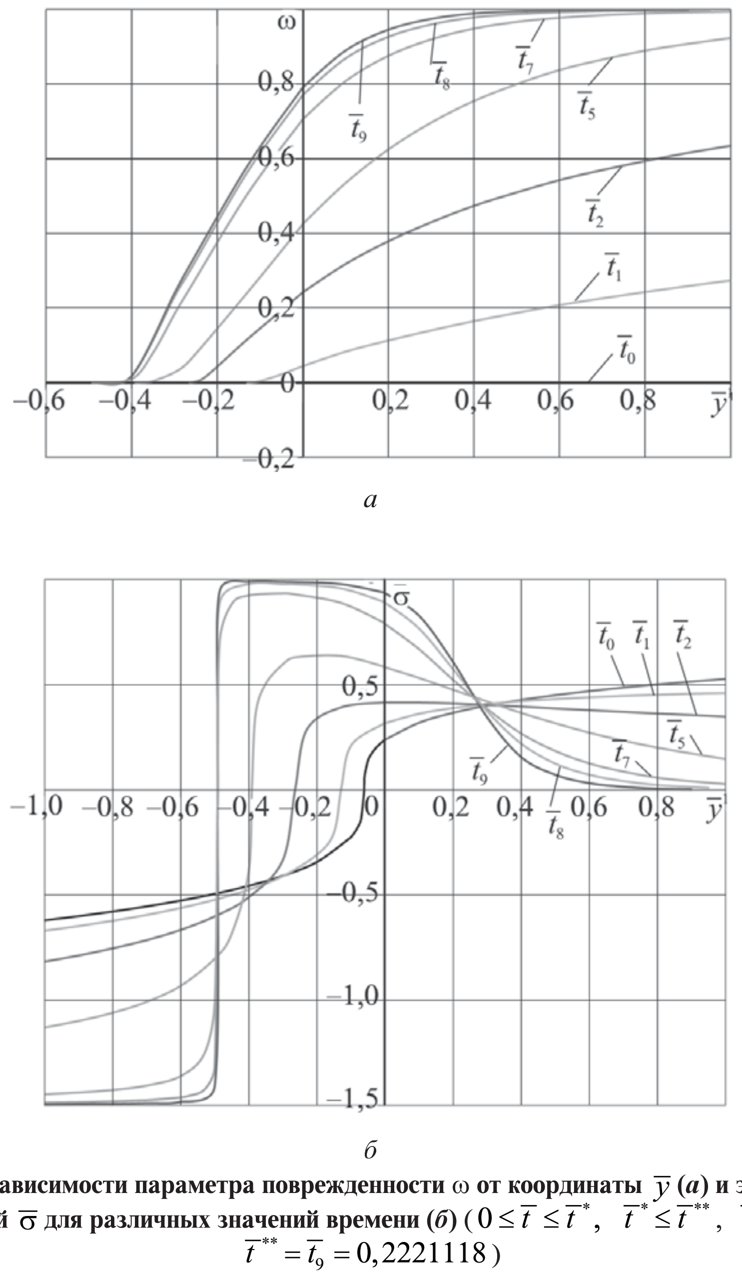

Рис. 2. График зависимости параметра поврежденности ω от координаты $\overline{y}$ (*а*) и эпюры распределения напряжений $\overline{\sigma}$ для различных значений времени (*б*) ($0 \le \overline{t} \le \overline{t}^*$, $\overline{t}^* \le \overline{t}^{**}$, $\overline{t}^* = \overline{t}_7 = 0,2221$, $\overline{t}^{**} = \overline{t}_9 = 0,2221118$)

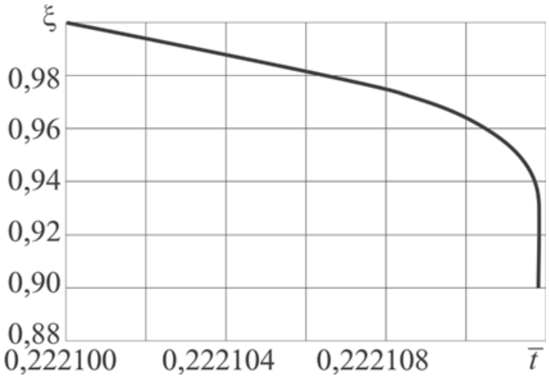

Рис. 3. График движения фронта разрушения во времени

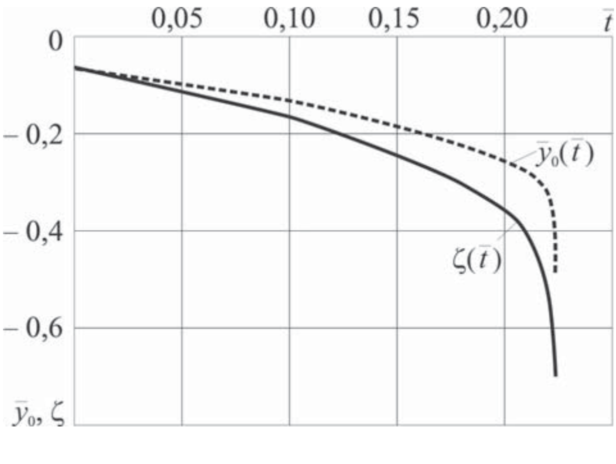

Рис. 4. Графики зависимостей $\zeta(\bar{t})$, $\bar{y}_0(\bar{t})$

бина проникновения фронта: $1 \le \xi(\bar{t}) \le 0{,}9$, что составляет 5 % от высоты балки.

Рассмотрим смещение нейтральной линии деформации $y = \zeta$, вдоль которой $p(\zeta, t) = 0$. Пренебрегая мгновенными упругопластическими деформациями, согласно гипотезе плоских сечений имеем:

$$p = \chi(t)(y - \zeta(t)). \qquad (15)$$

Вычислим деформацию ползучести p, интегрируя соотношение (1) по времени t:

$$p = \chi(y - y_0) + \int_0^t \chi \dot{y}_0 dt. \qquad (16)$$

Сравнивая выражения (15) и (16), получим:

$$\zeta(t) = y_0(t) - \frac{1}{\chi(t)} \int_0^{y_0} \chi dy_0. \qquad (17)$$

На основе данных, приведенных в табл. 1, и соотношения (17) построены графики нейтральных линий напряжения и деформации (рис. 4).

Обсуждение результатов

На основе анализа процесса увеличения поврежденности в изгибаемой балке в процессе ползучести при дополнительном учете разносопротивляемости материала показано, что внутри балки происходит перераспределение напряжений во времени и, как следствие, смещение нейтральных линий, которые характеризуются нулевыми напряжениями и деформациями соответственно.

Увеличение параметра поврежденности на растянутой поверхности балки продолжается до момента достижения на ней предельного значения $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t}) = 1$. Далее происходит продвижение фронта разрушения вглубь балки с одновременным увеличением напряжений внутри до предельных значений σ_{b1}, σ_{b2}, что является условием разрушения балки.

Необходимо отметить, что используемые сингулярные дробно-степенные определяющие и кинетические соотношения позволяют более корректно по сравнению со стандартными степенными соотношениями описывать процесс ползучести, так как они ограничивают уровень допустимых напряжений пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

Заключение

Решена задача определения характерных параметров чистого изгиба балки при ползучести вплоть до разрушения с учетом увеличения параметра поврежденности материала и различия механических характеристик материала при растяжении и сжатии. Определяющие и кинетические соотношения приняты в виде сингулярных дробно-степенных функций. Показаны зависимости характерных параметров задачи (эпюры напряжений, кривизна, параметр поврежденности материала и др.) от времени.

Список литературы

1. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 360 с.

5. *Лепин Г.Ф., Бондаренко Ю.Д.* Ползучесть прямого бруса при изгибе с учетом поврежденности материала // Проблемы прочности. 1970. № 7. С. 68–70.
6. *Никитенко А.Ф, Заев В.А.* К расчету элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Проблемы прочности. 1979. № 4. С. 20–25.
7. *Локощенко А.М., Печенина Н.Е., Шестериков С.А.* Долговечность цилиндрического бруса при чистом изгибе // Известия вузов. Сер. Машиностроение. 1988. № 9. С. 9–13.
8. *Горев Б.В., Клопотов И.Д.* Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок и кручении валов уравнениями со скалярным параметром поврежденности // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 6. С. 157–162.
9. *Захарова Т.Э.* Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок // Вестник Сибирского гос. ун-та телекоммуникации и информатики. 2008. № 2. С. 41–44.
10. *Venkateswaran Anaduradha Hasselman D.P.H.* Creep analysis of bend specimens subject to tensile cracing // J. Amer. Ceram. Soc. 1984. Vol. 67. No. 7. P. 144–145.
11. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–92.
12. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Вариант уравнения состояния при ползучести и его приложения // Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования: Труды Центрального котлотурбинного института. 1988. № 246. С. 74–79.
13. *Локощенко А.М., Агахи К.А., Л.В. Фомин.* Чистый изгиб балки в условиях ползучести из разносопротивляющегося материала // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1(26). С. 66–73.
14. Магниевые сплавы: справочник; ч. 1. Металловедение магния и его сплавов. Область применения. – М.: Металлургия, 1978. – 232 с.

Материал поступил в редакцию 18.04.2012

ЛОКОЩЕНКО Александр Михайлович

E-mail: **loko@imec.msu.ru**
Тел.: **(495) 939-53-08**

Доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела. Автор более 200 научных публикаций.

АГАХИ Камилла Абдул Гусейн-кызы

E-mail: **kamilla@imec.msu.ru**
Тел.: **(495) 939-20-77**

Кандидат физико-математических наук, доцент, исполняющая обязанности заведующего лабораторией прочности и ползучести при высоких температурах НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела (пластичность, реология; биомеханика). Автор 68 научных публикаций, 4 патентов и 12 авторских свидетельств на изобретения.

ФОМИН Леонид Викторович

E-mail: **lef1975@rambler.ru**
Тел.: **(495) 939-20-77**

Ведущий инженер лаборатории прочности и ползучести при высоких температурах НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела, реология; биомеханика, эксперимент. Автор 17 научных публикаций, патента на изобретение.