УДК 519.711.3

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БУФЕРНЫХ ЗАПАСОВ ПРЕДПРИЯТИЙ

**Л.А. Широков, О.Л. Широкова**

*Рассмотрено вероятностное моделирование для оптимизации матриц буферных запасов предприятий. На основании проведенной формализации задачи представлены ее компоненты в виде матрицы, которые зависят от плановых объемов поставок и плановых дат поставок. На основании анализа двумерного пространства событий выделены подмножества, определяющие состояние поставок, и обоснован выбор законов распределения величин вариаций дат поставок и объемов поставок. В качестве критерия степени неопределенности принята энтропия. Задача отыскания неизвестного закона распределения вероятностей рассмотрена как вариационная с ограничениями.*

**Ключевые слова:** *моделирование, буферные запасы, матрица, вероятность, закон распределения, поставка.*

### *Введение*

Важным условием успешной работы машиностроительных предприятий является наличие необходимых производственных запасов, отсутствие или некомплектность которых нарушает ритмичность производства, ухудшает экономические показатели работы предприятия. В связи с этим эффективная организация управления производственными запасами на предприятии имеет большое значение.

В условиях современных рыночных отношений, характеризующихся большим количеством различных внешних случайных факторов, осложняющих многие базовые аспекты реализации процессов поставок, необходимо исходя из экономической целесообразности искать адекватные подходы к решению задачи формирования буферных запасов предприятий.

В современных условиях, когда количество информации постоянно увеличивается, сократить объем работы по управлению запасами предприятий можно только с помощью ЭВМ, установив жесткий контроль уровней запасов заданной номенклатуры, на которые приходится основная часть стоимости материальных ресурсов, потребляемых в течение определенного периода, например года. В соответствии с этим контроль за уровнем производственных запасов на складах осуществляется следующим образом. Сначала устанавливаются нормативные уровни этих запасов на соответствующие периоды или даты. Затем они сравниваются с фактическими запасами на складах (по данным оперативного учета), после чего устраняется несоответствие между нормативными и фактическими запасами. Эффективное решение указанной задачи осложняется стохастическим характером дат поставок и объемов поставок, поэтому необходимо применение вероятностных методов для ее решения. Одновременно задача усложняется и тем, что законы распределения вероятностей априорно неизвестны. В данной работе предлагается решение сформулированной задачи и определяются условия оптимизации объемов запасов, т.е. буферных запасов машиностроительных предприятий.

### *Буферные запасы средств обеспечения производства*

Для детерминированного варианта оптимальную матрицу буферных запасов $Z^*$ средств обеспечения производства на $n$-й период отчетности ($n = 1, 2, \dots$) можно описать моделью

$$Z^*[nD_I] = Z_{\min}[nD_I] + R[nD_I] - W[nD_I], \quad (1)$$

где $D_I$ – длительность периода времени отчетности; $Z_{\min} = (z^k_{j\,\min})_{(n\times m)}$ – матрица минимально допустимых буферных запасов элементов поставок $k$-го вида ($k = 1, 2, ..., m$) на $j$-м предприятии-потребителе ($j = 1, 2, ..., n_r$), определяющая нижнюю границу для матрицы буферных запасов $Z^*$; $R = (r^k_j)_{(n\times m)}$ – матрица, определяющая значения элементов поставки $r^k_j$, т.е. значения элементов поставки каждого $k$-го вида, необходимых $j$-му предприятию-потребителю для выпуска продукции в $n$-й период отчетности; $W = (w^k_j)_{(n\times m)}$ – матрица, определяющая значения элементов поставки $w^k_j$, т.е. значения элементов поставки каждого $k$-го вида, которые должны поступить на $j$-е предприятие-потребитель в виде поставок от предприятий-поставщиков в $n$-й период отчетности.

Компоненты матрицы $W$, зависящие от плановых объемов поставок $R$ и плановых дат поставок, могут быть представлены векторной функциональной зависимостью

$$\vec{w}^{\,k}_j[nD_I] = \vec{F}(\overline{V}^k_j, \overline{D}^k_j)\ (j = 1, 2, ..., n_r), \quad (2)$$

где $\overline{V}^k_j$ – $n_p$-мерный вектор, каждый элемент которого $V^k_{ij}[nD_I]$ представляет собой плановый объем поставки $k$-го вида от $i$-го предприятия-поставщика $j$-му предприятию-потребителю в $n$-й период отчетности; $\overline{D}^k_j$ – $n_p$-мерный вектор, каждый элемент которого $D^k_{ij}[kD_I]$ представляет собой плановую дату поставки элементов $k$-го вида от $i$-го предприятия-поставщика $j$-му предприятию-потребителю в $n$-й период отчетности.

Вид функции $\vec{F}$ определяется априорно, на основе опыта предыдущих лет и экспертных оценок. Дальнейшее изложение без ограничения общности проведем для элементов поставки матрицы $W$:

$$w^k_{ij}[nD_I] = f(V^k_{ij}[nD_I], D^k_{ij}[nD_I]).$$

## Вероятностное представление нарушений плановых поставок по объемам и датам

Отклонения в работе предприятий-поставщиков возникают случайным образом и приводят к нарушению плановых поставок. В связи с этим объемы $V^k_{ij}[nD_I]$ и даты $D^k_{ij}[nD_I]$ ($i = \overline{1, n_p}$; $j = \overline{1, n_r}$, $k = \overline{1, m}$) поставок можно рассматривать как неотрицательные случайные величины, т.е. $V^k_{ij}[nD_I] \in [0, \infty]$ и $D^k_{ij}[nD_I] \in [0, \infty]$ с априорно неизвестными законами распределения. В случае наличия этих законов можно было бы с заданной вероятностью гарантировать, что значение $z^k_j[nD_I]$ будет, например не более или не менее некоторой величины $z^k_{0j}[nD_I]$. Это позволило бы оперативно регулировать взаимопоставки на предприятиях в условиях стохастической неопределенности [1].

В исследуемой ситуации необходимо, прежде всего, выявить фактические законы распределения для случайных величин $V^k_{ij}[nD_I]$ и $D^k_{ij}[nD_I]$. С этой целью будем рассматривать плановые объемы $V_{ij}$ и даты $D_{ij}$ поставок как независимые непрерывные случайные величины. В качестве математического ожидания объемов и дат поставок примем их плановые значения:

$$M(V^k_{ij}[nD_I]) = V^k_{Pij}[nD_I]; \qquad (3)$$
$$M(D^k_{ij}[nD_I]) = D^k_{Pij}[nD_I].$$

Представим определяемое случайными величинами $V^k_{ij}[nD_I]$ и $D^k_{ij}[nD_I]$ множество элементарных событий

$$\Omega \in \{V^k_{ij}[nD_I],\ D^k_{ij}[nD_I]\}$$

двумерным пространством, изображенным на рис. 1.С учетом выражений (3) пространство событий можно разбить на четыре множества, т.е. на четыре квадранта: $\Omega \subseteq \{I, II, III, IV\}$.

Квадранты I и IV (область $\Omega_z$) для дат поставок соответствуют случаям задержанных поставок, когда фактическая дата поставки $D^k_{Oij}$ больше плановой. Квадранты II и III соответствуют случаям поставок, выполненных раньше срока. По объемам поставок квадранты I и II соответствуют случаям, когда фактические объемы поставок $V^k_{Uij}$ превышают плановые, а квадранты III и IV (область $\Omega_N$) – случаям недопоставок.

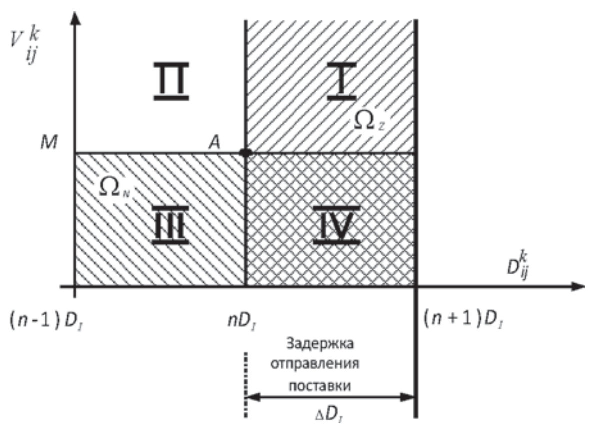



**Рис. 1. Пространство событий**

Введем диапазоны объемов и дат поставок, при этом для объемов поставок зададим нижнее ограничение $V_{Uij}^k$, а для дат поставок – верхнее ограничение $D_{Oij}^k$. Тогда все события из подмножества $\Omega_A = \{I, III, IV\}$, отражающие нарушения плановых поставок, можно представить в виде пространства, изображенного на рис. 2. Горизонтальная заштрихованная полоса, ограниченная снизу значением $V_{Uij}^k$, отображает ситуации в системе материально-технического снабжения, соответствующие недопоставкам. Вертикальная заштрихованная полоса, ограниченная справа значением $D_{Oij}^k$, отображает ситуации в системе материально-технического снабжения, соответствующие задержкам поставок.

Особое место на рис. 2 занимает область *ABCD*, формируемая как пересечение заштрихованных горизонтальной и вертикальной полос, которую обозначим $\Omega_k$. Исключая из области $\Omega_k$ точку *A*, получим подобласть критических значений объемов поставок и дат поставок $\Omega_F = \Omega_k - A$, которая обладает следующим свойством:

$$\Omega_F \in \{W_S(S - \text{continuum}):$$

$$V_{ij}^k \in (V_{Pij}^k\ ;\ V_{Uij}^k\,]\ \&\ D_{ij}^k \in (D_{Pij}^k\ ;\ D_{Oij}^k\,]\,\}.$$

Это означает, что область $\Omega_F$ включает в себя ситуации поставок, которые характеризуются одновременно и задержками по срокам и недопоставками по объемам элементов поставок. Следовательно, область $\Omega_F$ представляет собой область наихудших ситуаций по материально-техническому снабжению для предприятия- потребителя.

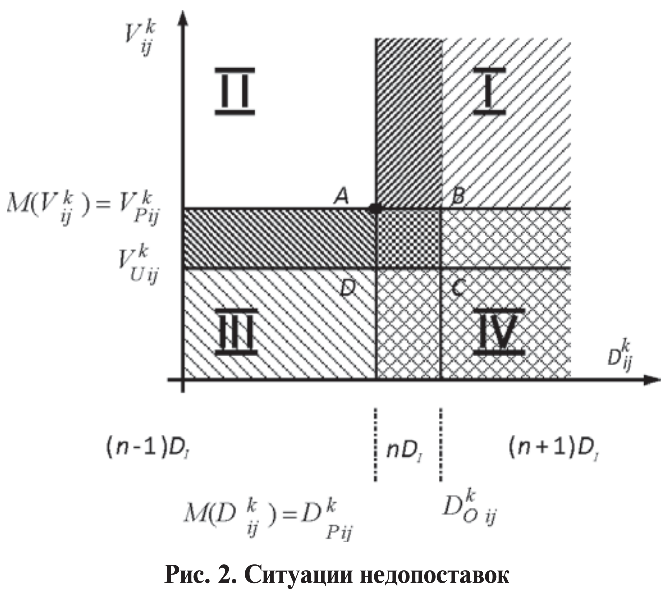



**Рис. 2. Ситуации недопоставок в пространстве событий**

### *Обоснование выбора законов распределения объемов и дат поставок*

Рассмотрим вопрос об обоснованном выборе законов распределения величин $V_{ij}^k$ и $D_{ij}^k$. Выполненный ранее анализ источников возмущений позволяет сделать вывод о том, что для дат поставок $D_{ij}^k$ в структурном отношении эти источники принадлежат двум областям. К первой области относятся возмущения, генерируемые нестандартными ситуациями, возникающими в производственной сфере предприятия-поставщика, а ко второй – возмущения, генерируемые нестандартными ситуациями на канале реализации поставки, т.е. на транспортном канале.

Поскольку закон распределения действующих возмущений, влияющих на величину $D_{ij}^k$, неизвестен, то, учитывая возможность его специфики в условиях различных поставщиков, целесообразно в качестве оценки величины степени неопределенности для вариаций дат поставок $D_{ij}^k$ с учетом выражений (3) в соответствии с теорией информации Шеннона [2] принять энтропию *H* и сформировать критерий:

$$H = -\int_0^\infty \varphi(D_{ij}^k) \ln \varphi(D_{ij}^k)\, dD_{ij}^k \xrightarrow[\varphi]{} \max, \quad (4)$$

где $\varphi(D_{ij}^k)$ – плотность вероятности дат поставок.

Ограничения, наложенные на функцию плотности вероятности, можно записать в виде соотношений:

$$\varphi(D_{ij}^k) \ge 0\,; \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \varphi(D_{ij}^k)\, dD_{ij}^k = 1\,; \quad (6)$$

$$\int_0^\infty D_{ij}^k \varphi(D_{ij}^k)\, dD_{ij}^k = M(D_{ij}^k)\,. \quad (7)$$

Следовательно, задача отыскания неизвестного закона распределения $\varphi(D_{ij}^k)$ представляет собой вариационную задачу [3] с ограничениями (5) – (7).

Для отыскания неизвестного закона распределения $\varphi(D_{ij}^k)$ составим функцию Лагранжа:

$$F = \int_0^\infty \{-\varphi(D_{ij}^k) \ln \varphi(D_{ij}^k) - \lambda_1 \varphi(D_{ij}^k) - \\ - \lambda_2 D_{ij}^k \varphi(D_{ij}^k)\}\, dD_{ij}^k + \lambda_1 + \lambda_2 M(D_{ij}^k),$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$ – неопределенные множители Лагранжа [4].

Из условия максимума энтропии (4) можно записать

$$\varphi(D_{ij}^k) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 D_{ij}^k). \qquad (8)$$

Как видно из выражения (8), условие (5) выполняется автоматически. Подставляя выражение (8) в выражение (6) и выполняя стандартные преобразования, получим:

$$\lambda_1 = -\ln\lambda_2 - 1;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{M(D_{ij}^k)} = \frac{1}{D_{Pij}^k} = \lambda. \qquad (9)$$

С учетом выражений (9) получаем искомый закон распределения вероятностей $\varphi(D_{ij}^k) = \lambda e^{-\lambda D_{ij}^k}$. Таким образом, величина $D_{ij}^k$ наиболее неопределенна при показательном законе распределения вероятностей. В этом случае можно гарантировать, что дата поставки $D_{ij}^k$ с конкретной вероятностью $p_0$ будет не более $D_{Oij}^k$:

$$\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-p_0} = \ln(1-p_0)^{-\frac{1}{\lambda}} = \ln(1-p_0)^{-D_{Pij}^k}. \quad (10)$$

Анализ источников возмущений для объемов поставок $V_{ij}^k$ позволяет заключить, что в структурном отношении они принадлежат одной и той же области возмущений, порождаемых нестандартными ситуациями, возникающими в производственной сфере предприятия-поставщика.

Для вариаций объемов поставок $V_{ij}^k$ в качестве критерия степени неопределенности также примем энтропию

$$H = -\int_0^\infty \varphi(V_{ij}^k)\ln\varphi(V_{ij}^k)\,dV_{ij}^k \xrightarrow[\varphi]{} \max, \qquad (11)$$

где $\varphi(V_{ij}^k)$ – плотность вероятности значений объемов поставок.

Ограничения, наложенные на функцию плотности вероятности можно записать в виде соотношений:

$$\varphi(V_{ij}^k) \ge 0; \qquad (12)$$

$$\int_0^\infty \varphi(V_{ij}^k)\,dV_{ij}^k = 1; \qquad (13)$$

$$\int_0^\infty V_{ij}^k \varphi(V_{ij}^k)\,dV_{ij}^k = M(V_{ij}^k). \qquad (14)$$

Следовательно, как и в случае дат поставок, задача отыскания неизвестного закона распределения вероятностей $\varphi(V_{ij}^k)$ представляет собой вариационную задачу [3] с ограничениями (12) – (14). Для ее решения составим соответствующую функцию Лагранжа:

$$F = \int_0^\infty \{-\varphi(V_{ij}^k)\ln\varphi(V_{ij}^k) - \lambda_1\varphi(V_{ij}^k) - \\ -\lambda_2 V_{ij}^k\varphi(V_{ij}^k)\}\,dV_{ij}^k + \lambda_1 + \lambda_2 M(V_{ij}^k).$$

Из условия максимума энтропии (11) получим

$$\varphi(V_{ij}^k) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 V_{ij}^k). \qquad (15)$$

Как видно из выражения (14), условие (12) выполняется автоматически. Подставляя выражение (14) в выражение (13) и выполняя стандартные преобразования, получим:

$$\lambda_1 = -\ln\lambda_2 - 1;$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{M(V_{ij}^k)} = \frac{1}{V_{Pij}^k} = \lambda. \qquad (16)$$

С учетом выражения (14) получим, что искомый закон распределения вероятностей является показательным, т.е.

$$\varphi(V_{ij}^k) = \lambda e^{-\lambda V_{ij}^k};$$

$$\lambda = \frac{1}{M(V_{ij}^k)} = \frac{1}{V_{Pij}^k}.$$

Таким образом, величина $V_{ij}^k$ наиболее неопределенна при показательном законе распределения вероятностей. В соответствии с этим можно утверждать, что с заданной вероятностью $q_0$ величина $V_{ij}^k$ будет не менее величины $V_{Uij}^k$:

$$\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{q_0} = \ln q_0^{-\frac{1}{\lambda}} = \ln q_0^{-V_{Pij}^k}. \qquad (17)$$

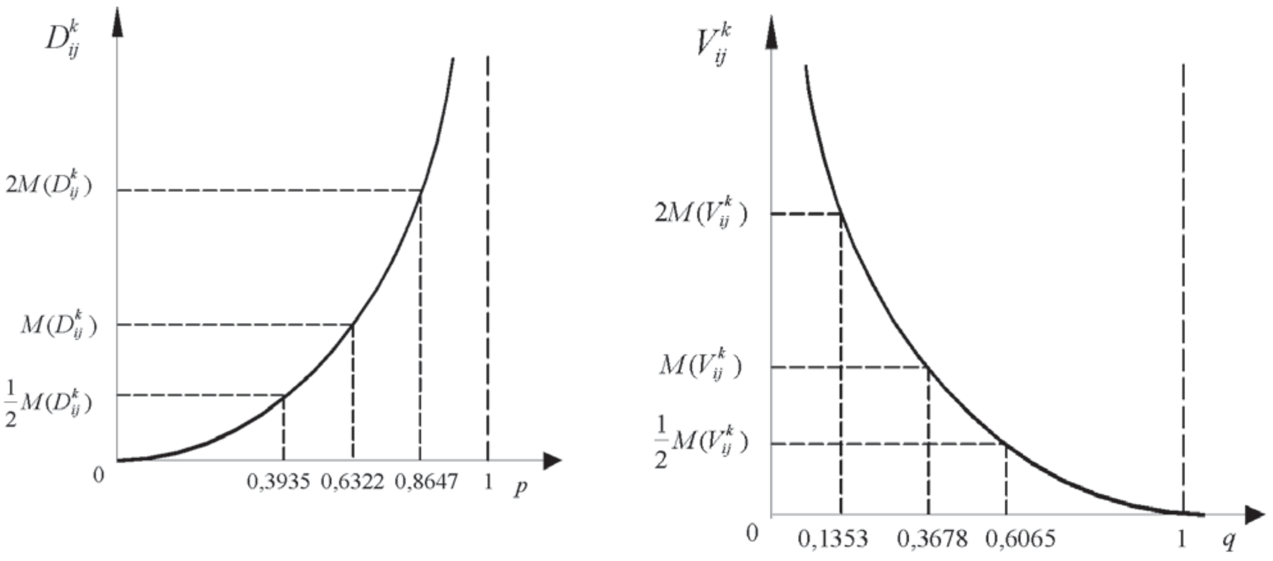
Следовательно, с учетом выражений (10) и (16) с заданными вероятностями $p$ и $q$ можно гарантированно определить наиболее неблагоприятный случай, который может произойти с ожидаемой поставкой. На рис. 2 этому случаю соответствует точка $C(D_{Oij}^k, V_{Uij}^k)$.

Используя эти значения, можно рассчитать оптимальное значение буферного запаса, представленного моделью (1) для случая стохастической неопределенности. На рис. 3 приведены зависимости соответственно дат поставок и объемов поставок. Как видно из рис. 3, при стремлении вероятностей $p$ и $q$ к единице

$$\lim_{p\to 1} D_{ij}^k(p) = \infty$$

и

$$\lim_{q\to 1} V_{ij}^k \to 0.$$




*а* *б*

**Рис. 3. График вероятностей реализации дат поставок (*а*) и объемов поставок (*б*)**

Соответственно в рассматриваемом случае поставка не будет выполнена. Отсюда можно заключить, что для предприятия-потребителя самым безопасным случаем будет случай при $d_{ij}^k = 0$, а оптимальное значение буферного запаса будет максимальным. Однако чем больше величина оптимального буферного запаса, тем больше следует предусматривать ресурсов для размещения запасов элементов поставки на предприятии-потребителе, а это ведет к дополнительным затратам.

Из рис. 3 видно, что с вероятностью $p_0 = 0{,}8647$ для дат поставок можно гарантировать

$$D_{ij}^k \le 2M(D_{ij}^k) = 2D_{Pij}^k,$$

а с вероятностью $q_0 = 0{,}6065$ для объемов поставок – гарантировать

$$V_{ij}^k \ge M(V_{ij}^k)\frac{1}{2} = V_{Pij}^k.$$

### Заключение

Предложена модель детерминированного варианта оптимальной матрицы для буферных запасов средств обеспечения производства. Однако отклонения в работе предприятий-поставщиков происходят случайным образом, что приводит к нарушению плановых поставок, и ставит под угрозу ритмичную работу предприятий-контрагентов. Изложенная на основании вероятностного подхода методология рассмотрения плановых объемов и дат поставок как независимых непрерывных случайных величин позволила сформулировать вариационную задачу с ограничениями, для решения которой составлена соответствующая функция Лагранжа. Далее с использованием условия максимума энтропии получен искомый закон распределения вероятностей. Это дает возможность рассчитать для случая стохастической неопределенности оптимальное значение буферного запаса предприятия.

### Список литературы

1. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
2. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 248 с.
3. *Гельфанд И.Д., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1961. – 228 с.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

*Материал поступил в редакцию 24.09.2012*

**ШИРОКОВ**
**Лев Алексеевич**

E-mail: **eduarlev@gmail.com**
Тел.: **(499) 184-11-79**

Доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и систем в экономике и управлении ФГБОУ ВПО «МГИУ», академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, изобретатель СССР. Сфера научных интересов – оптимальное управление, САПР, информационные технологии. Автор трех монографий, более 140 научных работ, изобретений, двух учебников.

**ШИРОКОВА**
**Ольга Львовна**

E-mail: **ol.shirokova@gmail.com**
Тел.: **(499) 476-41-32**

Кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и управления производством ФГБОУ ВПО «МГИУ». Сфера научных интересов – математические методы в экономике, оптимальное управление, автоматика, информационные технологии. Автор 30 научных работ.