

УДК 517.958, 532.5, 536.252

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В УЗКОМ КАНАЛЕ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ

Д.Ю. Богомолов, А.В. Онанко, В.В. Порошин, В.Ю. Радыгин

Рассмотрена двумерная математическая модель течения и теплообмена в узком канале, позволяющая оценить влияние шероховатости поверхностей стенок канала на результирующие объемные утечки жидкой среды и число Нуссельта по сравнению с аналогичным каналом с гладкими стенками. Проанализированы профили реальных поверхностей, полученных после различных технологических методов обработки.

Ключевые слова: узкий канал, шероховатость поверхности, приближение смазочного слоя, теплообмен.

Введение

Изучение течения вязкой жидкости и связанного с ним теплообмена в узких каналах реальных технологических устройств на протяжении многих лет остается одной из основных задач прикладной механики. Ее практическое значение связано с созданием малых и сверхмалых каналов для интенсификации теплообмена в компактных теплообменниках.

Режимы течения и теплообмена в узких каналах отличаются от аналогичных процессов, протекающих в каналах большого диаметра. Среди главных факторов, оказывающих влияние на объемные утечки и показатели теплообмена в таких каналах, можно выделить шероховатость поверхности. Более того, одним из традиционных способов интенсификации теплообмена в каналах и трубах большого диаметра (в особенности для турбулентного режима течения) является нанесение на их стенки искусственно созданных неровностей регулярной формы.

В работах [1, 2] предложен ряд математических моделей, описывающих течение вязкой ньютоновской жидкости в узких каналах с учетом шероховатости их стенок в приближении смазочного слоя. Представлен детальный

анализ влияния шероховатости поверхности на герметичность подвижных и неподвижных соединений. Влияние шероховатости поверхности в данных моделях учитывалось с помощью коэффициентов потока.

Целью данной работы явилось дополнение данных математических моделей и проведение анализа влияния шероховатости поверхностей стенок узкого канала не только на процесс течения вязкой жидкости, но и на сопутствующий ему теплообмен.

Математическая модель и расчетные схемы

Математическая модель строится на основе двумерной геометрической модели узкого канала с неровными стенками, представленной на рис. 1. Средний зазор между стенками H берется как расстояние между средними линиями профилей шероховатости поверхности.

Высоты неровностей профилей шероховатости поверхности канала h_1 и h_2 задаются относительно своих средних линий на общей координатной сетке, содержащей узлы x_i , с постоянным шагом $\Delta x = \text{const}$. Описанные таким образом дискретные функции $h_1(x_i)$ и $h_2(x_i)$ пре-

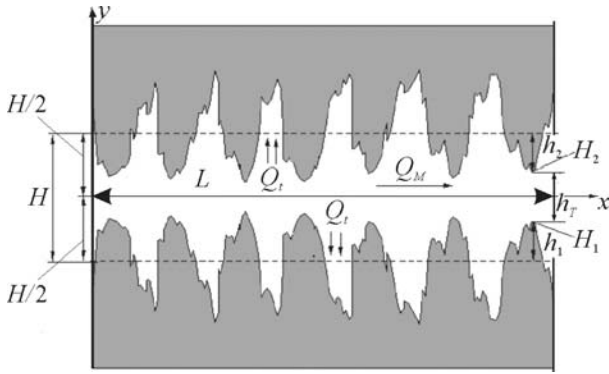


Рис. 1. Двухмерная модель узкого канала с учетом неровности его поверхностей:

Q_M – поток массы, направленный по длине канала L ;
 Q_T – тепловые потоки, направленные перпендикулярно стенкам канала

образуются в непрерывные функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ посредством линейной интерполяции.

Их геометрическое представление может быть получено как при измерении реальных поверхностей, так и с помощью искусственного моделирования. Функции $H_1(x)$ и $H_2(x)$, описывающие высотные координаты точек профилей нижней и верхней стенок канала, имеют вид

$$\begin{aligned} H_1(x) &= -H/2 + h_1(x); \\ H_2(x) &= H/2 + h_2(x), \end{aligned} \quad (1)$$

а дискретная функция $h_T(x)$ текущего зазора задается выражением

$$h_T(x) = H_2(x) - H_1(x) = H - h_2(x) - h_1(x). \quad (2)$$

Шаг δx вычислительной сетки в направлении оси x задается кратно исходному шагу профиля шероховатости поверхности $\Delta x = k\delta x$ (k – целое). Шаг δy в направлении оси y должен быть сопоставим по величине с δx .

В качестве характерной длины канала принималась базовая длина шероховатости поверхности по стандартам ГОСТ 2789-73 и ISO (наиболее часто используемое ее значение составляет 0,8 мм). При этом в одном профиле содержится от 5 до 100 единичных элементов неровностей. Такая длина канала достаточна для оценки влияния конкретного типа шероховатости, определяемого методом обработки поверхности. Амплитуда шероховатости реальных технологических поверхностей лежит в диапазоне от 1 до 10 мкм.

Для моделирования течения в узком канале использовалось приближение смазочного слоя, которое соответствует ламинарному режиму течения вязкой ньютоновской жидкости с

малыми значениями числа Рейнольдса Re . Приближение смазочного слоя определяется системой уравнений, предложенных О. Рейнольдсом [3]. Основными допущениями являются отсутствие течения по оси y и квадратичное распределение остальных компонент скорости вдоль этой оси.

Дифференциальное уравнение для определения давлений в трехмерном канале в приближении смазочного слоя фактически сводится к двумерной задаче. Для двумерного представления геометрии канала задача еще более упрощается и сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, где компоненты скорости находятся прямым дифференцированием:

$$\frac{d}{dx} \left(h_T^3 \frac{dp}{dx} \right) = 0; \quad (3)$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y - h_1)(y - h_2); \quad v_y = 0,$$

здесь p – давление среды; v_x , v_y – компоненты вектора v локальной скорости среды; μ – коэффициент динамической вязкости среды.

Граничные условия для решения данного уравнения имеют вид

$$p(0) = p_{\text{вх}}; \quad p(L) = p_{\text{вых}}, \quad (4)$$

где L – длина канала; $p_{\text{вх}}$ и $p_{\text{вых}}$ – значения давления на входе в канал и выходе.

Дифференциальное уравнение (3) с учетом граничных условий было (4) решено аналитически [2]. В результате получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_{\text{вх}} + \frac{p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}}}{L} \int_0^x \frac{d\xi}{\int_0^L \frac{d\xi}{h_T^3(\xi)}}; \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}}}{h_T^3(x) \int_0^L \frac{d\xi}{h_T^3(\xi)}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ξ – переменная интегрирования.

Для моделирования связанного с течением жидкой среды теплообмена обычно используется уравнение баланса энергии [4]. Процесс диссипации не является определяющим для описанной задачи, поэтому диссипативная функция в предложенной модели не учитывалась. Тогда уравнение баланса энергии будет выглядеть следующим образом:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta(T), \quad (6)$$

где ρ , C_p , T , λ – соответственно плотность, коэффициент теплоемкости, температура и коэффициент теплопроводности среды; t – время; Δ – оператор Лапласа.

Так как процесс стационарен, полная производная функции температуры имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = v_x \frac{dT}{dx} + v_y \frac{dT}{dy} = v_x \frac{dT}{dx}, \quad (7)$$

поскольку принято, что $v_y = 0$.

Тепло в двухмерном узком канале главным образом распространяется вдоль оси y от стенок канала к его центральной части. Тогда можно пренебречь компонентой d^2T/dx^2 в операторе Лапласа и с учетом соотношения (7) уравнение баланса энергии представить как

$$\rho C_p v_x \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{d^2T}{dy^2}. \quad (8)$$

При решении дифференциального уравнения (8) использовались граничные условия для заданной постоянной температуры на стенках канала T_w и заданной постоянной температуры среды на входе в канал $T_{вх}$:

$$T|_{y=H_1(x)} = T_w;$$

$$T|_{y=H_2(x)} = T_w;$$

$$T|_{x=0} = T_{вх}.$$

Такой способ задания граничных условий позволяет применить для решения уравнения (8) неявную конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x}; \\ \frac{d^2T}{dy^2} &= \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j+1}}{\delta y^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $T_{i,j}$ – значение температуры в узле решетки (i, j) .

Шаблон данной конечно-разностной схемы представлен на рис. 2.

После подстановки соотношений (9) в уравнение (8) оно заменяется следующим конечно-разностным соотношением:

$$\rho C_p [v_x]_{i,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x} = \lambda \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j+1}}{\delta y^2}, \quad (10)$$

где $[v_x]_{i,j}$ – локальная скорость сплошной среды по направлению x в узле решетки (i, j) .

Численное решение конечно-разностного уравнения (10) получено методом прогонки. Для заданной неявной схемы метод прогонки абсолютно устойчив и сходится [5]. Погреш-

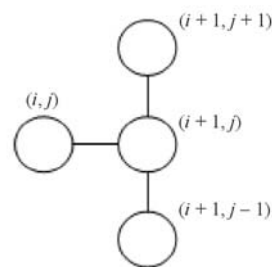


Рис. 2. Шаблон неявной конечно-разностной схемы для уравнения баланса энергии

ность данной расчетной модели линейна относительно шага по оси x и квадратична относительно шага по оси y .

Для оценки эксплуатационных характеристик узкого канала с шероховатыми стенками использовались два основных физических параметра: коэффициент потока ϕ и число Нуссельта Nu .

Безразмерный коэффициент потока ϕ характеризует уменьшение объемных утечек жидкой среды через канал с шероховатыми стенками по сравнению с объемными утечками жидкой среды через аналогичный канал с гладкими стенками [6].

Величина утечек Q жидкой среды через канал с шероховатыми стенками в двухмерном представлении определяется следующим образом [6]:

$$Q = \frac{B(p_{вх} - p_{вых})}{12\mu \int_0^L \frac{dx}{h_T^3(x)}}, \quad (11)$$

где B – ширина канала (размер канала в горизонтальном направлении, перпендикулярно заданному градиенту давлений); L – длина канала (размер канала в направлении заданного градиента давлений).

Чтобы найти величину объемных утечек Q^* жидкой среды через аналогичный канал с гладкими стенками, используют известное аналитическое соотношение [7]

$$Q^* = \frac{BH^3(p_{вх} - p_{вых})}{12\mu L}, \quad (12)$$

где H – зазор в канале с гладкими стенками.

Используя выражения (11) и (12), можно найти значение коэффициента потока [6]:

$$\phi = Q/Q^*. \quad (13)$$

Число Нуссельта является отношением интенсивности теплообмена за счет конвекции к интенсивности теплообмена за счет теплопроводности по нормали к границе. Интенсивность теплообмена за счет теплопроводности

определяется так же, как и интенсивность конвективной составляющей, но в установившемся тепловом потоке.

В рамках рассмотренной задачи безразмерное число Нуссельта использовалось для выявления закономерностей, позволяющих управлять процессом теплообмена путем варьирования гидродинамическим давлением потока массы жидкой среды [3].

В случае полностью устоявшегося ламинарного течения число Нуссельта вычисляется отдельно для каждого поперечного сечения ($x = \text{const}$):

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D_h}{\lambda}, \quad (14)$$

где α – коэффициент теплоотдачи; D_h – гидравлический диаметр поперечного сечения.

В свою очередь, гидравлический диаметр канала для каждого сечения определяется как

$$D_h = \frac{4A_c}{P}; \quad A_c = 2h_T(x); \quad P = 2(L + h_T(x)), \quad (15)$$

где A_c – площадь поперечного сечения; P – «смоченный» периметр поперечного сечения.

Коэффициент теплоотдачи в канале

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_m}, \quad (16)$$

где q – нормальный, по отношению к средней линии канала, тепловой поток возле стенки; T_m – характерная температура жидкой среды в сечении.

При вычислении нормального, по отношению к средней линии канала, теплового потока возле его стенок влияние шероховатости можно не учитывать:

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (17)$$

Характерная температура жидкой среды в сечении определяется путем усреднения температуры среды по отношению к скорости потока массы вязкой жидкости в направлении оси x :

$$T_m(x) = \frac{\int_{H_1(x)}^{H_2(x)} v_x(y) T(y) dy}{\int_{H_1(x)}^{H_2(x)} v_x(y) dy}. \quad (18)$$

Как показано в работе [8], на начальном участке канала развиваются пограничные слои: гидродинамический и термальный. Причем развитие гидродинамического пограничного слоя завершается раньше. Значения $\text{Nu}(x)$ как в области гидродинамического пограничного слоя, так и в примыкающей к нему области

термального вхождения неустойчивы.

В связи с этим для определения характерного значения числа Нуссельта в канале учитываются значения $\text{Nu}(x)$ только в области установившегося термально развитого течения. Границы области этого течения определяются по началу линейного участка графика $\text{Nu}(x)$. Характерное значение числа Нуссельта вычисляется путем усреднения $\text{Nu}(x)$ по всей длине области термально развитого течения.

Анализ результатов численных экспериментов

На основе разработанной математической модели была проведена серия численных экспериментов по моделированию течения и теплообмена в каналах с гладкими и шероховатыми стенками. Результаты моделирования в канале с гладкими стенками сопоставлялись с результатами известных аналитических исследований [8].

При указанных ранее предположениях поток массы вязкой жидкости является гидродинамически развитым, а профиль локальной скорости потока в поперечных сечениях имеет параболическую форму. Тепловой поток в области термального вхождения представляет собой термально развивающийся процесс. Для термально развитого процесса профиль температуры в поперечных сечениях канала принимает вид сглаженной параболы, а для термально развивающегося – сплюснутой параболы.

Развитие теплового потока в канале с гладкими стенками показано на рис. 3. Результаты, полученные в ходе численных экспериментов для каналов с гладкими стенками, полностью согласуются с известными аналитическими зависимостями.

В последующих численных экспериментах рассматривались каналы, поверхность стенок которых получена в результате различных способов технологической обработки: после полирования, расточки, токарной и фрезерной обработки. Профили шероховатости поверхностей, использованных для численных экспериментов, показаны на рис. 4. Нижняя стенка канала принималась гладкой.

Численные эксперименты проводились при следующих эквивалентных размерах каналов и физических параметрах потока сплошной среды: $L = 0,8$ мм; $H = 10$ мкм, $p_{\text{вх}} = 10$ кПа; $p_{\text{вых}} = 0$ кПа; $T_{\text{вх}} = 300$ К; $T_w = 320$ К. Характерные поля температур для каналов с различны-

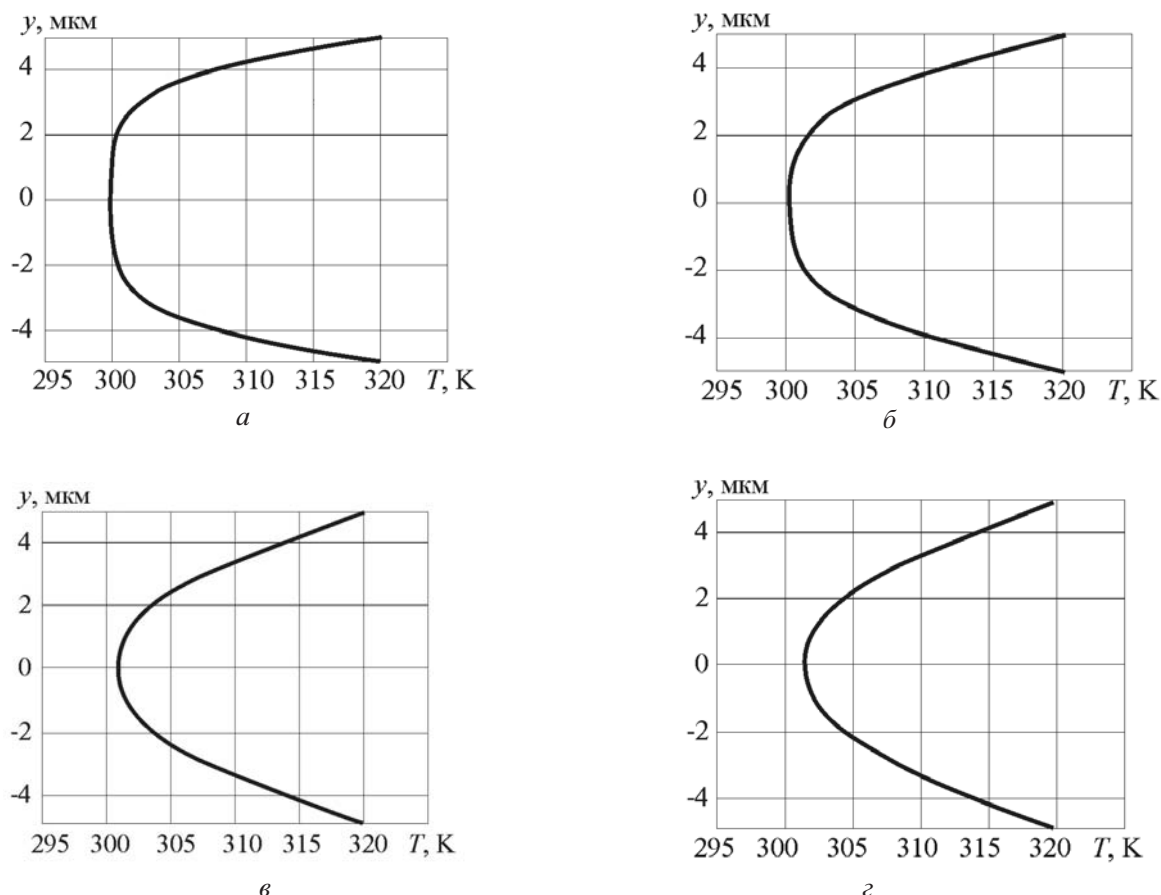


Рис. 3. Развитие теплового потока в канале с гладкими стенками:

а – термально неразвитый поток ($x = \delta x$); б – начальная стадия термального развития потока ($x = 5\delta x$); в – термально развивающийся поток ($x = 10\delta x$); г – термально развитый поток ($x = 15\delta x$)

ми типами шероховатости стенок представлены на рис. 5.

Профили поперечного сечения полей температур имеют квазипараболическую форму, так же как и в случае гладкого канала. Конвективный теплообмен более интенсивен в каналах, микротопография стенок которых характеризуется большей высотой выступов. Число Нуссельта заметно больше для шероховатостей с большей амплитудой (рис. 6).

В то же время в более узких каналах диапазон изменения числа Нуссельта заметно меньше. Это связано с существенным уменьшением интенсивности потока сплошной среды для каналов с поверхностью, имеющей шероховатость большой амплитуды (рис. 7).

Два взаимно обратных процесса оказывают влияние на интенсивность теплообмена в канале с неровными стенками. С одной стороны, чем больше амплитуда шероховатости, тем больше площадь поверхности, и теплообмен происходит более интенсивно, с другой стороны, большая по амплитуде шероховатость по-

верхности значительно замедляет поток для очень тонких каналов, что, в свою очередь, уменьшает конвективную составляющую теплообмена.

Таким образом, для интенсификации теплообмена в каналах относительно большой толщины могут быть рекомендованы методы обработки стенок, обеспечивающие большую по амплитуде шероховатость. Для сверхтонких каналов более эффективными с точки зрения теплообмена можно считать методы обработки стенок, обеспечивающие малую шероховатость.

Заключение

Предложенная математическая модель может быть использована для прогнозирования течения жидкой среды и сопутствующего ему теплообмена в узких двухмерных каналах с шероховатыми стенками. Модель позволяет подобрать рациональные способы и режимы обработки поверхностей стенок каналов еще на этапе проектирования.

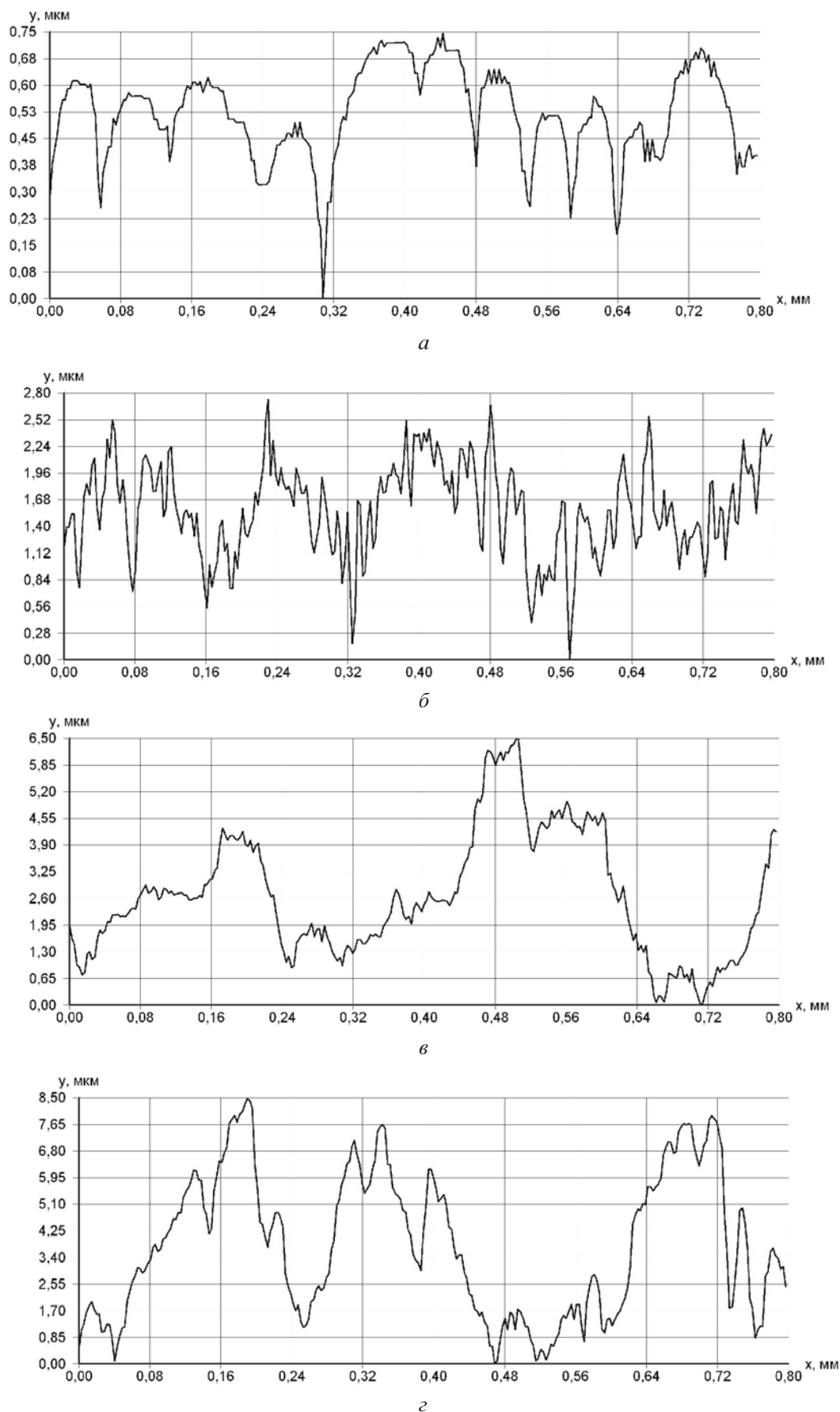


Рис. 4. Профили шероховатости поверхностей, полученных в результате различных способов обработки:
a – полирования; *б* – шлифования; *в* – фрезерования; *г* – токарной обработки

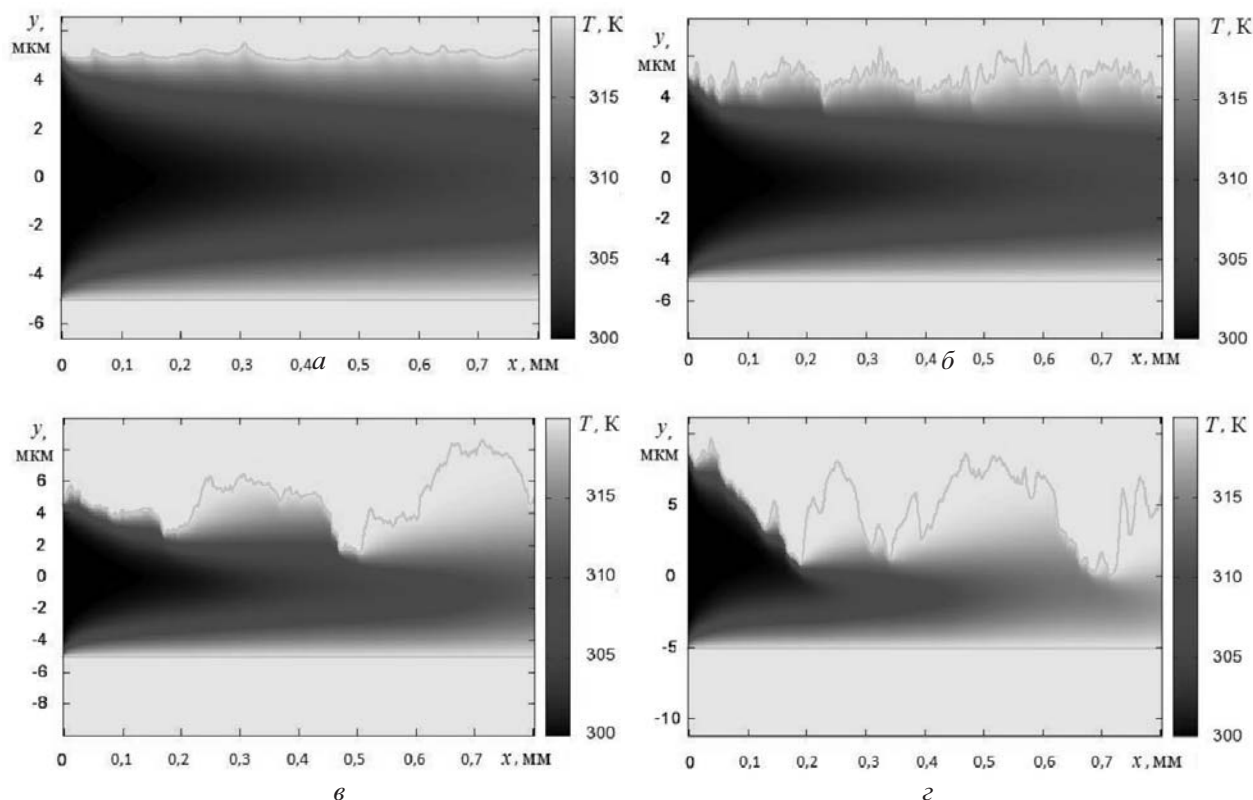


Рис. 5. Поля температур в каналах с шероховатостью стенок, полученной в результате различных способов обработки:

а – полирования; б – шлифования; в – фрезерования; г – токарной обработки

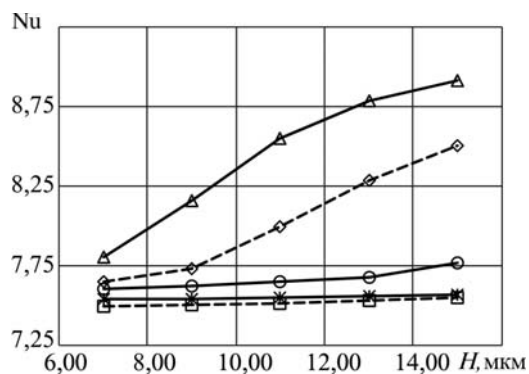


Рис. 6. Изменение числа Нуссельта при увеличении среднего зазора H для различных способов обработки стенок канала:

—♦— — фрезерования; —■— — полирования;
—●— — шлифования; —▲— — токарной обработки;
—■— — гладкие стенки

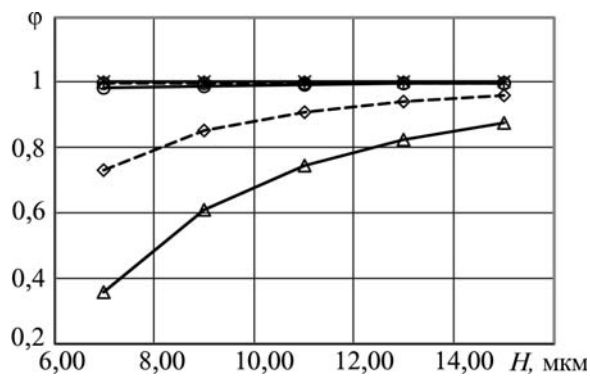


Рис. 7. Изменение коэффициента потока ϕ при увеличении среднего зазора:

—♦— — фрезерование; —■— — полирование;
—●— — шлифование; —▲— — токарная обработка;
—■— — гладкие стенки

Список литературы

1. Миносцев В.Б., Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Радыгин В.Ю. Математическое моделирование течения рабочей среды в осесимметричных торцевых уплотнениях с учетом топографии поверхности // Машиностроение и инженерное образование. 2007. № 1. С. 48–52.
2. Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Сыромятникова А.А. Численные исследования течения жидкости в герметизируемых соединениях с заданной микротопографией поверхности // Машиностроение и инженерное образование. 2010. № 1. С. 54–62.
3. Лойцянский Г.Л. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

4. Лыков А.В. Тепломассообмен. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
 5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
 6. Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Сыромятникова А.А. Математическая модель течения рабочей среды в подвижных металл-металлических соединениях с учетом трехмерной топографии рабочих поверхностей // Вестник Брянского государственного технического университета. 2008. № 2. С. 97–102.
 7. Кондаков Л.А. Уплотнения гидравлических систем. – М.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
 8. Mills A.F. Heat Transfer. – Prentice Hall, 1998. – 954 p.
- Материал поступил в редакцию 15.04.13.*

БОГОМОЛОВ
Дмитрий Юрьевич
E-mail: bogom-ov@mail.ru
Тел.: (495) 620-39-68

Кандидат технических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики ФГБОУ ВПО МГИУ. Область научных интересов – математическое моделирование гидродинамических процессов, исследование микротопографии поверхности. Автор более 75 научных трудов.

ОНАНКО
Антон Викторович
E-mail: chuvaver@mail.ru
Тел.: (909) 936-11-15

Инженер управления научных исследований ФГБОУ ВПО МГИУ. Область научных интересов – математическое моделирование процессов теплопереноса. Автор двух научных публикаций.

ПОРОШИН
Валерий
Владимирович
E-mail: vpорошин@mail.ru
Тел.: (495) 620-39-68

Доктор технических наук, профессор кафедры технологий и металлорежущих систем автомобилестроения ФГБОУ ВПО МГИУ, почетный работник высшего образования РФ, лауреат премии правительства РФ. Область научных интересов – трибология, контроль качества поверхности, математическое моделирование гидродинамических процессов. Автор более 150 научных трудов.

РАДЫГИН
Виктор Юрьевич
E-mail: radigin@msiu.ru
Тел.: (495) 620-39-39

Кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий ФГБОУ ВПО МГИУ. Область научных интересов – математическое моделирование гидродинамических процессов, исследование микротопографии поверхности. Автор более 25 научных трудов.