

МЕЗОСКОПИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В УЗКИХ КАНАЛАХ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

Д.Ю. Богомолов, В.В. Порошин, В.Ю. Радыгин

В статье рассматривается мезоскопическая модель течения вязкой несжимаемой жидкости в узких каналах. Исследованы каналы со сложной микротопографией поверхности стенок. Вычислительная схема построена на основе решеточного уравнения Больцмана с аппроксимацией Бхатнагара – Гросса – Крука оператора столкновения мезоскопических частиц.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, узкий канал, мезоскопическое моделирование течения, решеточное уравнение Больцмана.

Введение

Проектирование новых элементов техники в машиностроении, станкостроении, энергомашиностроении, авиационной и аэрокосмической промышленности зачастую связано с необходимостью решения задач изоляции рабочих сред или управления потоком рабочих сред, вытекающим из узких регулируемых каналов. Решение подобных задач, к примеру, необходимо для разработки эффективных запирающих или регулирующих поток клапанов, различных уплотнительных соединений и других подобных узлов машиностроительного оборудования. Процессы утечки жидкости или газа через узкие каналы, образующиеся между деталями таких устройств, во многом зависят от микротопографии их рабочих поверхностей. Моделирование механики течения жидкости и газа в узких каналах на этапе проектирования позволит избежать необходимости проведения длительных и дорогостоящих натурных экспериментов и повысить эффективность разработки новых изделий в целом.

Целью данной работы являлась разработка эффективной математической модели, позволяющей определять основные физические параметры потока рабочей среды для широкой номенклатуры изолирующих или управляющих потоком узлов машиностроительного оборудо-

вания, работающих в широком спектре физико-технических условий. Модель позволяет учитывать влияние микротопографии рабочих поверхностей узкого канала, начальные и граничные условия, соответствующие реальным процессам.

Методы математического моделирования процессов течения сплошных сред в узких каналах

В общем случае исследуемые узкие каналы можно описать в виде двух параллельных поверхностей, топография каждой из которых содержит ряд микронеровностей, классифицируемых как шероховатость поверхности. В силу того, что среднее расстояние между верхней и нижней поверхностями канала много меньше его длины и ширины, влияние боковых стенок на течение рабочей среды будем считать незначительным. При переходе к двумерной модели рассматривается срез канала, нормаль к плоскости которого перпендикулярна направлению потока рабочей среды. Рассмотрим подробно дискретную геометрическую двумерную модель узкого канала.

Узкий канал с заданной микротопографией поверхности его стенок может быть описан в виде модели, представленной на рис. 1. Средний зазор

* Исследования выполнены в результате проведения поисковой научно-исследовательской работы по контракту № П1232 в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

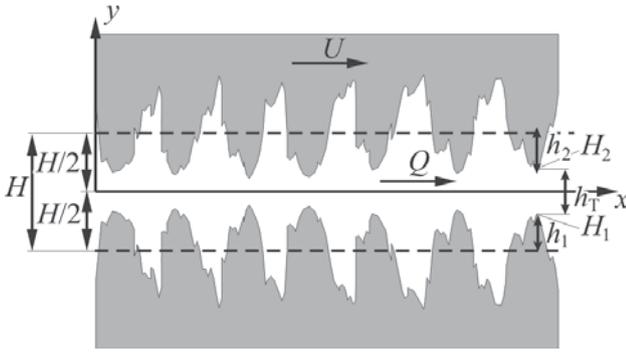


Рис. 1. Двухмерная геометрическая модель узкого канала с заданной микротопографией поверхности стенок

H между профилями берется как расстояние между их средними линиями. Высоты неровностей профилей поверхностей канала $h_1(x)$ и $h_2(x)$ задаются относительно своих средних линий (обычно это линии наименьших квадратов) на общей координатной сетке с постоянным шагом ($\Delta x = \text{const}$), состоящей из узлов (x_i).

Высоты точек профилей нижней и верхней стенок канала H_1 , H_2 и текущий зазор задаются выражениями:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (-H/2) + h_1(x), \\ H_2(x) &= (H/2) - h_2(x), \end{aligned} \quad (1)$$

$$h_1(x) = H_2(x) - H_1(x) = H - h_1(x) - h_2(x). \quad (2)$$

Соответственно в узлах сетки для высот неровностей и текущего зазора получим

$$(h_1)_i = h_1(x_i), (h_2)_i = h_2(x_i), (h_1)_i = h_1(x_i).$$

В настоящее время для решения задач моделирования течения сплошной среды с ньютоновским законом трения в узких каналах чаще всего применяется математическая модель, описываемая системой уравнений Навье – Стокса. Для вязкого газа в переменных «скорость – давление» данные уравнения имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \operatorname{div} u_x)}{\partial x} \right], \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \operatorname{div} u_y)}{\partial y} \right], \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \operatorname{div} u_z)}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho) &+ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где u_x, u_y, u_z – компоненты вектора скорости \mathbf{u} ; p – давление; ρ – плотность среды; μ – динамическая вязкость; F_x, F_y, F_z – компоненты вектора плотности распределения объемных сил \mathbf{F} .

Первые три уравнения в системе (3) носят название уравнений динамики, а последнее – уравнения неразрывности. В векторной форме уравнения Навье – Стокса (3) записываются в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + 2 \operatorname{div} (\mu \dot{\mathbf{S}}),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (4)$$

где $\dot{\mathbf{S}}$ – тензор скоростей деформаций; ∇ – оператор Гамильтона.

Существует немало вариантов численного решения данной системы уравнений. В частности, встречается большое количество работ, базирующихся на применении метода конечных разностей [2], метода конечных элементов [3], метода контрольных объемов [4], вероятностных алгоритмов (например, метода Монте-Карло) и других подходов. Тем не менее, все они обладают существенными недостатками: либо предъявляют высокие требования к вычислительной системе, что не позволяет их использовать на персональных компьютерах, либо рассматривают исходную задачу в очень узких рамках с различными упрощающими предположениями и строгими начальными и граничными условиями. Более того, в ряде численных методов (метод конечных элементов, метод контрольных объемов и т.д.) имеются существенные проблемы сходимости при решении краевой задачи с криволинейными границами.

Указанные недостатки численных методов решения рассматриваемой задачи являются

причиной того, что подавляющее большинство современных работ, посвященных моделированию процессов течения сплошной среды в узких каналах с учетом микротопографии их рабочих поверхностей, используют физико-математические модели, полученные из данной системы путем различных упрощений. Наиболее распространенными из них являются фильтрационная модель Дарси и щелевая модель в условиях приближения Рейнольдса [5, 6]. Обе модели содержат ряд существенных ограничений. Фильтрационная модель не применима при существенных истечениях рабочей среды (подходит только для пористых тел). Модель Рейнольдса не применима для газообразных сред. В связи с этим необходимо использование более эффективных методов моделирования течения сплошных сред в узких каналах.

В последнее время за рубежом широкое распространение получил подход к моделированию течения сплошных сред на основе клеточных автоматов [7], использующий представление сплошной среды в виде совокупности частиц, совершающих перемещения и взаимные столкновения на дискретной сетке. Поскольку методы, базирующиеся на данном подходе, оперируют в терминах микровзаимодействий частиц, они обеспечивают автоматическое выполнение фундаментальных физических законов (сохранения массы, импульса и энергии), лежащих в основе уравнений Навье – Стокса. Дальнейшим развитием методов моделирования на основе взаимодействия частиц является мезоскопическое моделирование с использованием решеточного уравнения Больцмана [8–11].

Мезоскопическое моделирование течения и эквивалентность уравнения Больцмана системе уравнений Навье – Стокса

В основе мезоскопического подхода к моделированию, использующего решеточное уравнение Больцмана, лежит статистическое представление среды в канале в виде плотности распределения $f(\tilde{x}, v, t)$ частиц по скоростям v в каждой точке $\tilde{x}(x, y, z)$ в момент времени t . Приведем основные соотношения и уравнения согласно работе [10].

Если на каждую частицу действует удельная внешняя сила \tilde{F} , то тогда, без учета столкновения частиц используется уравнение вида

$$f(\tilde{x} + v dt, v + \tilde{F} dt, t + dt) d\tilde{x} dv - f(\tilde{x}, v, t) d\tilde{x} dv = 0. \tag{5}$$

Для учета столкновения частиц в правую часть уравнения (5) вводится оператор столкновения $\Omega(f) d\tilde{x} dv dt$:

$$f(\tilde{x} + v dt, v + \tilde{F} dt, t + dt) d\tilde{x} dv - f(\tilde{x}, v, t) d\tilde{x} dv = \Omega(f) d\tilde{x} dv dt. \tag{6}$$

Поделив обе части уравнения (6) на $d\tilde{x} dv dt$, получим уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} + \tilde{F} \frac{\partial f}{\partial v} = \Omega. \tag{7}$$

В двухмерном случае уравнение (7) раскрывается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \left[\tilde{F}_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + \tilde{F}_y \frac{\partial f}{\partial v_y} \right] = \Omega, \tag{8}$$

Для трехмерного случая уравнение (7) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right] + \left[\tilde{F}_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + \tilde{F}_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + \tilde{F}_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right] = \Omega, \tag{9}$$

При известной плотности распределения частиц получим значения локальной плотности ρ , средней скорости u и внутренней энергии e частиц:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{x}, t) &= \int m f(\tilde{x}, v, t) dv, \\ \rho(\tilde{x}, t) u(\tilde{x}, t) &= \int m v f(\tilde{x}, v, t) dv, \\ u(\tilde{x}, t) &= \frac{1}{\rho(\tilde{x}, t)} \int m v f(\tilde{x}, v, t) dv, \\ \rho(\tilde{x}, t) e(\tilde{x}, t) &= \frac{1}{2} \int m \|v - u\|^2 f(\tilde{x}, v, t) dv, \\ e(\tilde{x}, t) &= \frac{1}{2\rho(\tilde{x}, t)} \int m \|v - u\|^2 f(\tilde{x}, v, t) dv, \end{aligned} \tag{10}$$

где m – масса частицы.

Интегрирование в соотношениях (10) осуществляется по скорости по всем направлениям перемещения частиц.

Внутренняя энергия частицы связана с температурой известным из термодинамики соотношением [1]:

$$e = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \theta, \quad (11)$$

где k_B – постоянная Больцмана; T – температура; $\theta = k_B T$ – энергетический параметр.

При изотермическом режиме течения в качестве закона сохранения внутренней энергии принимается условие $\theta = \text{const}$. При адиабатическом режиме течения должен соблюдаться закон сохранения внутренней энергии, получаемый из выражений (10) и (11) [10]:

$$\int m f(\tilde{x}, v, t) v^2 dv = \rho u^2 + 3\rho\theta. \quad (12)$$

На сегодняшний день предложено большое число вариаций оператора столкновений $\Omega(f) d\tilde{x}dvdt$. Для вязкой сплошной среды одно из наилучших приближений оператора столкновений предложили Бхатнагар, Гросс и Крук (БГК) [12]. Они рассмотрели в качестве основной задачи оператора столкновения приведение плотности распределения в равновесное состояние или близкое к нему. Плотность распределения частиц в состоянии равновесия определяется распределением Максвелла – Больцмана [10]:

$$f^0(v) = \frac{n}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-(v-u)^2/2\theta}, \quad (13)$$

где n – количество частиц в узле (амплитуда распределения).

Для равновесной плотности распределения частиц верны следующие соотношения, полученные с использованием интегралов Гаусса [10]:

$$\begin{aligned} \int m f^0(v) dv &= \rho, \quad \int m f^0(v)(v_\alpha - u_\alpha) dv = 0, \\ \int m f^0(v)(v_\alpha - u_\alpha)(v_\beta - u_\beta) &= \rho\theta\delta_{\alpha\beta}, \\ \int m f^0(v)(v_\alpha - u_\alpha)(v_\beta - u_\beta)(v_\gamma - u_\gamma) &= 0, \\ \int m f^0(v)(v_\alpha - u_\alpha)(v_\beta - u_\beta)(v - u)^2 &= 5\rho\theta^2\delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha = \{x, y, z\}$, $\beta = \{x, y, z\}$, $\gamma = \{x, y, z\}$ – характерные независимые направления переноса частиц; $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Простейшим способом аппроксимации оператора столкновений является релаксация по времени:

$$\Omega = -\frac{1}{\tau}(f - f^0), \quad (15)$$

где τ – скорость релаксации, определяемая средой.

С учетом уравнения (15) уравнение Больцмана принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} + \tilde{F} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\tau}(f^0 - f). \quad (16)$$

Из уравнения (16) можно выразить исправленную плотность распределения частиц \tilde{f} , получаемую в результате применения оператора столкновения:

$$\tilde{f} = f^0 - \tau \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} + \tilde{F} \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (17)$$

При аппроксимации оператора столкновения по методу БГК можно показать, что уравнение Больцмана становится эквивалентным системе уравнений (3). Если умножить обе части уравнения (16) на mv_α и проинтегрировать по скорости (по каждому из направлений), получим следующее соотношение [12]:

$$\begin{aligned} \int \left[mv_\alpha \frac{\partial f}{\partial t} + mv_\alpha \sum_\beta \left(v_\beta \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + mv_\alpha \sum_\beta \left(\tilde{F}_\beta \frac{\partial f}{\partial v_\beta} \right) \right] dv_\alpha = \\ = \frac{1}{\tau} \int (mv_\alpha f^0 - mv_\alpha f) dv_\alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

С помощью выражений (10) и (14) последовательно упростим уравнение (18) [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int mv_\alpha f dv_\alpha + \sum_\beta \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \int mv_\alpha v_\beta f dv_\alpha + \right. \\ \left. + \int mv_\alpha \tilde{F}_\beta \frac{\partial f}{\partial v_\beta} dv_\alpha \right] = \frac{1}{\tau} \int mv_\alpha (f^0 - u_\alpha) dv_\alpha, \\ \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \sum_\beta \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \int mv_\alpha v_\beta f dv_\alpha \right] + \\ + \sum_\beta \left[\int mv_\alpha \tilde{F}_\beta \frac{\partial f}{\partial v_\beta} dv_\alpha \right] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Если учесть, что $\frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, то третье слагаемое в уравнении (19) упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_\beta \left[\int m \tilde{F}_\beta \left(v_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\beta} \right) dv_\alpha \right] = \sum_\beta \left[\int m \tilde{F}_\beta \left(\frac{\partial f}{\partial v_\beta} v_\alpha - f \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} \right) dv_\alpha \right] = \\ = \sum_\beta \left[\frac{\partial}{\partial v_\beta} \int m \tilde{F}_\beta f v_\alpha dv_\alpha - \int m \tilde{F}_\beta f \delta_{\alpha\beta} dv_\alpha \right] = \\ = \sum_\beta \left[\frac{\partial (\tilde{F}_\beta \rho u_\alpha)}{\partial v_\beta} \right] - \sum_\beta \left[\int m \tilde{F}_\beta f \delta_{\alpha\beta} dv_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое слагаемое выражения (20) обращается в ноль в силу независимости от v_β . Второе слагаемое отлично от нуля только при $\beta = \alpha$. Таким образом, получаем:

$$\sum_\beta \left[\frac{\partial (\tilde{F}_\beta \rho u_\alpha)}{\partial v_\beta} \right] - \sum_\beta \left[\int m \tilde{F}_\beta f \delta_{\alpha\beta} dv_\alpha \right] = -\rho \tilde{F}_\alpha. \quad (21)$$

Второе слагаемое уравнения (19) может быть преобразовано с помощью выражения (17) БГК аппроксимации. На основе анализа Чепмена и Энскога [9], пренебрегая производными выше первого порядка, можно получить

$$\sum_{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \int m v_{\alpha} v_{\beta} f dv_{\alpha} \right] = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial (\rho u_{\alpha} u_{\beta})}{\partial \beta} \right] + \frac{\partial (\rho \theta)}{\partial \alpha}. \quad (22)$$

С учетом уравнений (21) и (22) уравнение (19) преобразуется к виду, характерному для уравнения Эйлера [12]:

$$\frac{\partial (\rho u_{\alpha})}{\partial t} + \sum_{\beta} \left[\frac{\partial (\rho u_{\alpha} u_{\beta})}{\partial \beta} \right] = \rho \tilde{F}_{\alpha} - \frac{\partial (\rho \theta)}{\partial \alpha}. \quad (23)$$

Учитывая производные не только первого, но и второго порядка, в случае изотермического течения уравнение (23) можно преобразовать к следующему виду [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho u_{\alpha})}{\partial t} + \sum_{\beta} \left[\frac{\partial (\rho u_{\alpha} u_{\beta})}{\partial \beta} \right] &= \rho \tilde{F}_{\alpha} - \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \\ + \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\mu \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \alpha} \right) - \frac{2}{3} \sum_{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mu \frac{\partial (u_{\gamma})}{\partial \gamma} \right) \right], \\ p &= \rho \theta, \quad \mu = \rho \theta \tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Совокупность уравнений (24), взятых для каждого направления: $\alpha = \{x, y, z\}$, $\beta = \{x, y, z\}$ и $\gamma = \{x, y, z\}$, представляет собой закон сохранения импульсов, который совпадает с уравнениями динамики из системы уравнений Навье – Стокса (3).

Уравнение неразрывности может быть получено, если умножить обе части уравнения (19) на m и проинтегрировать по скорости [12]:

$$\int \left[m \frac{\partial f}{\partial t} + m v \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} + m \tilde{F} \frac{\partial f}{\partial v} \right] dv = \frac{1}{\tau} \int (m f^0 - m f) dv. \quad (25)$$

Учитывая, что величины v , \tilde{x} и t являются независимыми переменными, а $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{x}, t)$ и $\rho = \rho(\tilde{x}, t)$ не зависят от v , и при подстановке (10) и (14) в уравнение (25) можно получить уравнение закона сохранения масс, которое совпадает с уравнением неразрывности из системы уравнений Навье – Стокса (3) [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial \tilde{x}} + \tilde{F} \frac{\partial \rho}{\partial v} &= \frac{\rho}{\tau} - \frac{\rho}{\tau}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial \tilde{x}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho u) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Больцмана с БГК аппроксимацией оператора столкновений соответствует системе уравнений Навье – Стокса

для вязкого сжимаемого газа (3). Соответствие справедливо вблизи границы несжимаемости (т.е. при числах Маха $M \ll 1$), что позволяет говорить также о применимости решеточного уравнения Больцмана для моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости.

Расчетная модель

В вычислительной схеме для проведения расчетов на основе решеточного уравнения Больцмана эволюция состояния потока на дискретной сетке (решетке) осуществляется при помощи последовательного чередования двух фаз – фазы переноса и фазы столкновения. Во время фазы переноса частицы перемещаются в соседние ячейки по всем возможным направлениям. Частицы, оказавшиеся в результате переноса в одной и той же ячейке, принимают участие в столкновении. За один шаг частица перемещается в выбранном направлении на один узел. Скорость перемещения в диагональном направлении, параллельном стороне решетки, пропорциональна соответствующим расстояниям. На рис. 2 приведены наиболее распространенные виды решеток с квадратными ячейками для решеточного уравнения Больцмана на основе общепризнанной классификации DmQn [13, 14].

В разработанных двухмерных математических моделях течения сплошной среды в канале на основе решеточного уравнения Больцмана в качестве базового типа решетки принята D2Q9.

При численном моделировании непрерывная плотность распределения частиц $f(\tilde{x}, v, t)$ при дискретизации заменяется набором дискретных функций

$$f(\tilde{x}, v_i, t) = f_i(\tilde{x}, t),$$

где v_i – скорость по направлению i .

В результате дискретизации уравнение Больцмана с БГК аппроксимацией оператора столкновений (15) принимает вид

$$\tilde{f}_i(\tilde{x}, t + \delta_t) = f_i(\tilde{x}, t + \delta_t) + \frac{1}{\tau_{\delta}} [f^0(\rho, u, \theta) - f_i(\tilde{x}, t + \delta_t)],$$

где δ_x – пространственный шаг решетки; δ_t – шаг по времени; $\tau_{\delta} = \tau / \delta_x$ – дискретная скорость релаксации.

Фаза переноса моделируется при помощи следующего выражения:

$$f_i(\tilde{x} + v_i \delta_x, t + \delta_t) = f_i(\tilde{x}, t).$$

Для изотермического течения плотность распределения частиц по скоростям в состоянии равновесия будет [10]:

$$f_i^0 = nw_i \left[1 + \frac{3}{c^2} v_i \cdot u + \frac{9}{2c^4} (v_i \cdot u)^2 - \frac{3}{2c^2} u \cdot u \right],$$

где $c = \delta_x / \delta_t$ – сеточная скорость звука; w_i – весовые коэффициенты.

Локальная плотность ρ и локальная скорость u в дискретном пространстве вычисляются исходя из законов сохранения масс и моментов:

$$\rho = m \sum_i f_i, \quad \rho u = m \sum_i v_i f_i, \quad u = \frac{m \sum_i v_i f_i}{\sum_i v_i f_i}.$$

Для двумерной решетки D2Q9 при прямом перемещении частиц $|v_i| = c$, а при диагональном – $|v_i| = \sqrt{2}c$. Множество возможных скоростей частицы $\{v_i\}$ определяется следующим образом:

$$v_i = \begin{cases} (\cos[(i-1)\pi/4], \sin[(i-1)\pi/4])c, & i = 1, 3, 5, 7; \\ (\cos[(i-1)\pi/4], \sin[(i-1)\pi/4])\sqrt{2}c, & i = 2, 4, 6, 8; \\ (0, 0), & i = 9. \end{cases}$$

Весовые коэффициенты для сетки D2Q9 определяются по формулам:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{9}, & i = 1, 3, 5, 7; \\ \frac{1}{36}, & i = 2, 4, 6, 8; \\ \frac{4}{9}, & i = 9. \end{cases}$$

При задании граничных условий в вычислительной схеме решеточного уравнения Больцмана граничные условия, выраженные в макроскопических терминах, должны быть перенесены на микроуровень в виде функции распределения скоростей на границах.

На твердой границе канала предложено использовать схему *bounce-back* – граница расположена на половине пути между граничным узлом и соседним с ним узлом решетки. Попадающие на границу частицы симметрично отражаются в противоположном направлении [15]:

$$\tilde{f}_{\bar{i}}(\tilde{x}_b, t + \delta_t) = f_i(\tilde{x}_b, t + \delta_t),$$

где индекс \bar{i} соответствует направлению, обратному перемещению частиц с индексом i ; \tilde{x}_b – пространственная координата границы.

При моделировании открытых границ канала на входе в канал предложено задавать фиксированный поток сплошной среды [17]:

$$\tilde{f}_{\bar{i}}(\tilde{x}_A) = \tilde{f}_i(\tilde{x}_A + v_{\bar{i}}\delta t) + 2w_{\bar{i}}\rho(\tilde{x}_A + \Delta\delta_x v_{\bar{i}}\delta_t) \frac{3}{c^2} (v_{\bar{i}} \cdot u),$$

где \tilde{x}_A – пространственная координата входа в канал.

На выходе из канала задается «мягкое» граничное условие, обеспечивающее выполнение закона сохранения импульса:

$$\tilde{f}_i(\tilde{x}_w, t + \delta_t) = \tilde{f}_{\bar{i}}(\tilde{x}_w, t + \delta_t),$$

где \tilde{x}_w – пространственная координата точки выхода из канала.

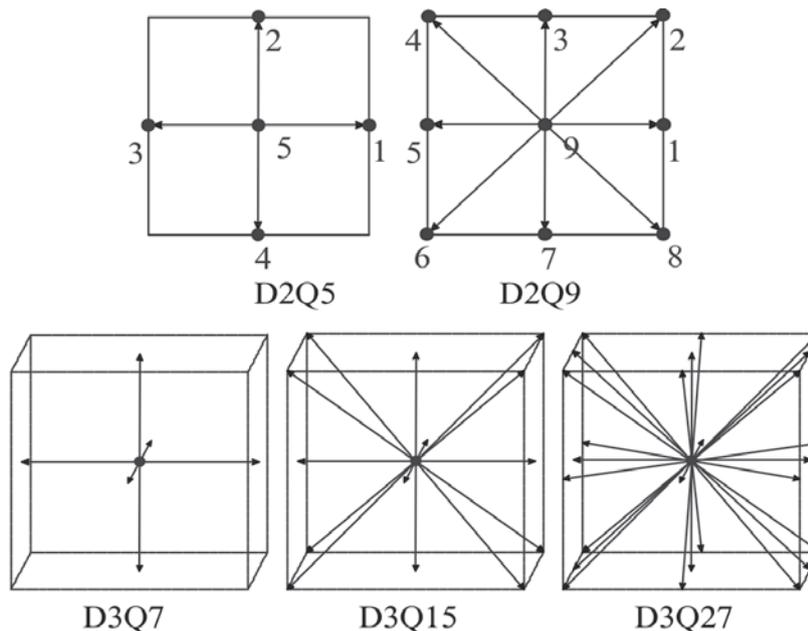


Рис. 2. Наиболее распространенные виды решеток

Численное моделирование течения на основе вычислительной схемы решеточного уравнения Больцмана обеспечивает дискретное представление гидродинамических моментов в узлах решетки. В результате решения определяются значения локальной плотности и локальной скорости рабочей среды. Объемные утечки Q_x в трехмерном канале с неровными стенками определяются путем интегрирования горизонтальной составляющей локальной скорости по выходному сечению канала:

$$Q_x = B \sum_{k=1}^K u_x(L, y_k) \delta_x^2 = \sum_{k=1}^K u_x^{N,k} \delta_x^2,$$

где B – ширина канала; N и K – количество разбиений модельной сетки вдоль осей Ox и Oy соответственно; $u_x^{N,k}$ – горизонтальная компонента скорости в ячейке решетки с координатами (N, k) .

Результаты численных экспериментов

Для предложенной модели авторским коллективом была разработана расчетная программа и проведены численные исследования течения сплошной среды в узких каналах со сложной геометрией неровностей стенок.

Адекватность разработанных моделей и программ была исследована на тестовой задаче о течении в канале между двумя гладкими параллельными пластинами. Для данной задачи известно точное аналитическое решение, описанное в учебной и справочной литературе [1]. Характерной особенностью течения является параболический профиль распределения горизонтальной компоненты скорости u_x по вертикальной координате канала y .

При проведении численного моделирования было получено аналогичное параболическое распределение скорости u_x во внутренних сечениях канала (рис. 3). В рамках допустимых погрешностей экспериментальный параболический профиль полностью совпадает с аналитическим решением. Линейные хвостовые участки на графике распределения u_x соответствуют узлам, расположенным внутри стенок канала. В связи с тем, что на входе в канал задавалось равномерное распределение скоростей, в приграничной зоне наблюдались переходные процессы (рис. 4), которые стабилизировались на небольшом участке, длина которого не превышала 1,5–2 % от общей длины канала. Также в ходе численных экспериментов получены

другие характерные особенности течения в гладком канале [1] – отсутствие вертикального перепада давлений и малая по абсолютной величине вертикальная компонента поля скоростей.

Анализ результатов численного моделирования позволяет сделать вывод об адекватности и достоверности разработанной расчетной модели на основе решеточного уравнения Больцмана.

Некоторые характерные результаты численных исследований течения в канале с неровными стенками представлены на рис. 5. Горизонтальная компонента поля скоростей, как и в канале с гладкими стенками, имеет в вертикальном сечении параболический профиль. Амплитуда профиля возрастает в зонах сужения канала и снижается в зонах расширения.

Кроме того, вертикальная компонента скорости увеличивается вблизи неровной границы канала, что соответствует ее обтеканию потоком. Давление в канале постепенно уменьшается от входа в канал к выходу из него. В местах сильного сужения канала наблюдается дополнительный перепад давлений.

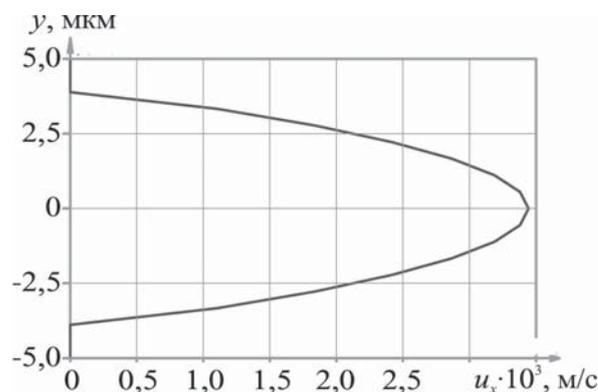


Рис. 3. Параболическое распределение u_x в канале с двумя гладкими стенками

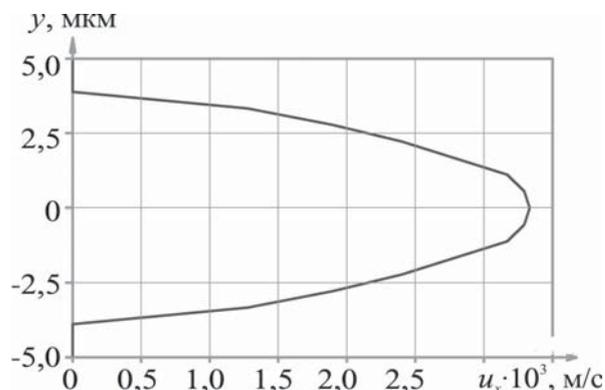


Рис. 4. Отклонение от параболического распределения u_x в приграничной зоне на входе в канал

В целом представленные результаты моделирования по совокупности изменений физических параметров потока согласуются с известными теоретическими представлениями о характере течения в узких каналах и результатами, полученными для приближения Рейнольдса [18].

Заключение

Проведенные численные эксперименты показали возможность применения разработанной математической модели течения сплошной среды для решения задач со сложной микротопографией рабочих поверхностей канала. Сравнение с аналогичными моделями, базирующимися на приближении Рейнольдса, показало, что вычислительная схема на основе решеточного уравнения Больцмана не имеет существенных недостатков. В то же время использование приближения Навье – Стокса позволяет получить более точную оценку величины утечек рабочей среды герметизирующих или управляющих потоком устройств для широкой номенклатуры

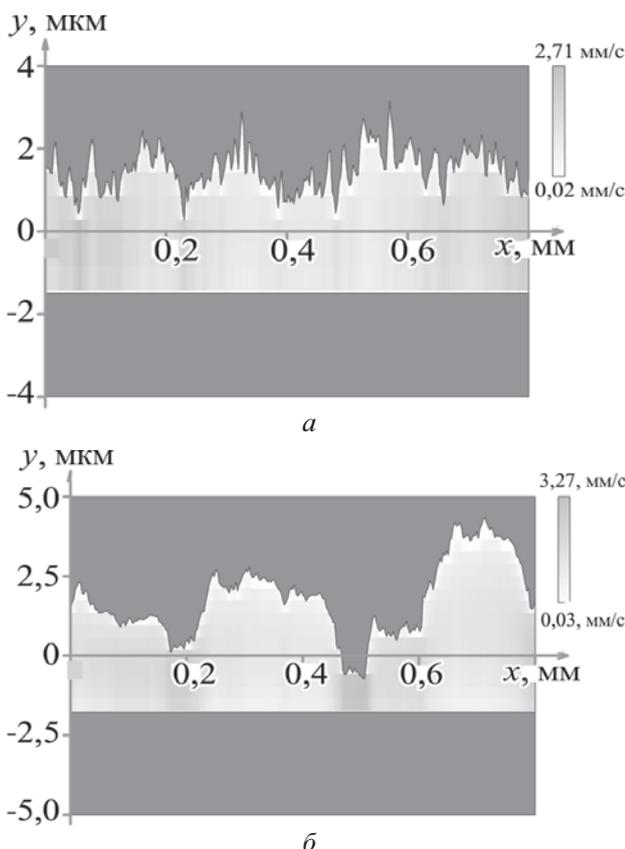


Рис. 5. Изменение горизонтальной компоненты поля скоростей в узком канале с гладкой нижней и шероховатой верхней рабочими поверхностями:
а – после шлифования; б – после фрезерования

гидравлических и газодинамических узлов изделий машиностроения. Таким образом, данная модель может быть рекомендована для разработки соответствующего инженерного программного обеспечения и систем САПР.

Список литературы

1. Лойцянский Г.Л. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
2. Карякин Ю.Е. Численное моделирование течений и теплообмена в областях произвольной формы: дис... д-ра физ.-мат. наук. С.–Петербург, 1992. – 524 с.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. – 428 с.
4. Lazarov R.D., Mishev I.D., Vassilevski P.S. Finite volume methods for convection-diffusion problems // SIAM J. Numer. Anal. 1996. Vol. 33. No. 1. P. 31–55.
5. Математическое моделирование течения жидкости в щелевых каналах с учетом реальной микротопографии поверхности их стенок / Д.Ю. Богомолов, В.В. Порошин, В.Ю. Радыгин, А.А. Сыромятникова, А.А. Шейнак. – М.: МГИУ, 2010. – 160 с.
6. Математическое моделирование течения рабочей среды в осесимметричных торцевых уплотнениях с учетом топографии поверхности / В.Б. Миносцев, В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, В.Ю. Радыгин // Машиностроение и инженерное образование. 2007. № 1(10). С. 48–52.
7. Brian J.N. Wylie. Application of Two-Dimensional Cellular Automaton Lattice-Gas Models to the Simulation of Hydrodynamics. – University of Edinburgh, 1990. – 190 p.
8. Wolf-Gladrow D.A. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice-Boltzmann Models. – Springer, 2000. – 274 p.
9. Maxwell J.B. Lattice Boltzmann Methods in Interfacial Wave Modeling. – University of Edinburgh, 1997. – 238 p.
10. Wagner A.J. A Practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method. – North Dakota State University, 2008. – 46 p.
11. Abe T. Derivation of the Lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // J. Comp. Phys. 1997. Vol. 131. P. 241–246.
12. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev.

1954. Vol. 94. No. 3. P. 511–525.
13. Yu D. Viscous Flow Computations with the Lattice Boltzmann Equation Method: PhD dissertation. – University of Florida, 2002. – 172 p.
14. Grunau D.W. Lattice Methods for Modeling Hydrodynamics: PhD dissertation. – Colorado State University, 1993. – 173 p.
15. Inamoto T., Yoshino M., Ogino F. A non-slip boundary condition for Lattice Boltzmann simulations // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. No. 12. P. 2928–2930.
16. Behrend Q. Solid–fluid boundaries in particle suspension simulation via the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. 1995. Vol. 52. No. 1. P. 1164–1175.
17. Винников В.В., Ревизников Д.Л., Чжо С.Ю. Применение сеточных уравнений Больцмана для решения задач математической физики // Матер. Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях, 25–31 мая 2010 г., Алушта. – М.: МАИ–Принт, 2010. С. 354–357.
18. Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Радыгин В.Ю. Программный модуль для расчета герметичности торцевых осесимметричных уплотнений на основе конечно-элементной модели // Вестник Брянского государственного технического университета. 2008. № 3(19). С. 76–84.

Материал поступил в редакцию 15.04.2011

**БОГОМОЛОВ
Дмитрий Юрьевич**

E-mail: bogom-ov@mail.ru
Тел. +7 (495) 620-39-68

Кандидат технических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики ГОУ МГИУ. Область научных интересов – математическое моделирование гидродинамических процессов, измерение и анализ микротопографии поверхности. Автор более 50 научных трудов и патентов.

**ПОРОШИН
Валерий
Владимирович**

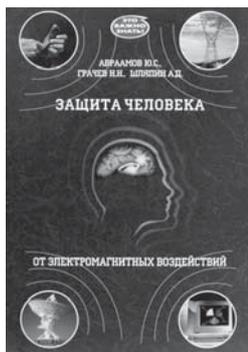
E-mail: vporoshin@mail.ru
Тел. +7 (495) 620-39-68

Доктор технических наук, профессор кафедры технологий и металлорежущих систем автомобилестроения ГОУ МГИУ, почетный работник высшего образования РФ, лауреат премии правительства РФ. Область научных интересов – трибология, контроль качества поверхности, математическое моделирование гидродинамических процессов. Автор более 100 научных трудов и патентов.

**РАДЫГИН
Виктор Юрьевич**

E-mail: radigin@msiu.ru
Тел. +7 (495) 620-39-39

Кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий ГОУ МГИУ. Область научных интересов – математическое моделирование гидродинамических процессов, измерение и анализ микротопографии поверхности. Автор более 25 научных трудов.



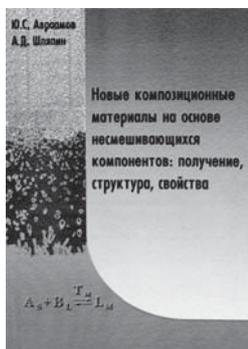
Авраамов Ю.С., Грачев Н.Н., Шляпин А.Д.
Защита человека от электромагнитных воздействий:
монография. – 232 с.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, желающих познакомиться с природой и влиянием различного рода полей, в присутствии которых приходится жить и работать человеку. Так, можно узнать о степени «вредности» влияния сотовых телефонов, микроволновых печей и других бытовых приборов. Если же вы захотите узнать о причинах того или иного воздействия данного прибора или устройства на ваше здоровье и способы защиты, данная книга позволит сделать это благодаря доступной форме изложения.



Иванов Б.С., Резчиков Е.А., Крылов С.П.
Безопасность жизнедеятельности: учебное пособие.
Ч. 1. – 226 с., Ч. 2. – 288 с.
Гриф Минобразования

Изложены вопросы обеспечения комфортных условий труда, безопасности технических систем и технологических процессов, инженерной защиты окружающей среды, защиты населения и территорий в чрезвычайных ситуациях. Рассматриваются материальные затраты на обеспечение безопасности жизнедеятельности.



Авраамов Ю.С., Шляпин А.Д.
Новые композиционные материалы на основе несмешивающихся компонентов: получение, структура, свойства: монография. – 206 с.

Предлагаемый вниманию читателя материал будет полезным как в теоретическом, так и в практическом плане. Отдельные результаты данной работы могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области материаловедения. Материаловеды-практики найдут для себя много подсказок и смогут создать новые «экзотические» материалы, как те, которые нашли отражение в данной книге, так и не обсуждавшиеся в ней, но вполне подчиняющиеся обнаруженным закономерностям.

Машиностроение и инженерное образование, № 2, 2011 г.

Редактор Э. Ю. Шишкова

Корректор Л.С. Горбенко

Компьютерная верстка И. Е. Эффы,

А. М. Гришиной, Н. Р. Сейфетдиновой

Дизайн обложки И. Е. Эффы

Подписано в печать 21.06.2011. Формат 60 × 90/8.

Усл. п.л. 8,5. Уч.-изд. 7,0. Тираж 500 экз. Заказ № 185

Отпечатано в типографии Издательства МГИУ

Адрес редакции: 115280, г. Москва, ул. Автозаводская, д. 16

Тел. (495) 620-39-90

E-mail: mio@msiu.ru, izdat@msiu.ru

Сайт: www.mio.msiu.ru, www.izdat.msiu.ru

Прием авторских статей:

тел.: (495) 620-39-89

e-mail: skopin-j@mail.msiu.ru

Размещение рекламы:

тел.: 674-62-50 (доб. 264)

e-mail: mio@msiu.ru, reklama@sde.ru

Распространение и подписка

тел.: 674-62-50 (доб. 264)

e-mail: mio@msiu.ru, podpiska@sde.ru

Перепечатка и любое воспроизведение материалов, опубликованных в журнале,
без письменного разрешения редакции запрещены.

Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей.