

УДК 624.07:534.1

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

А.И. Муницын



**МУНИЦЫН
Александр
Иванович**

Кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Ивановского государственного энергетического университета (ИГЭУ). Специалист в области динамики и прочности машин. Автор более 50 научных работ.

Введение

Вращающийся стержень с шарнирно неподвижными в продольном направлении опорами, находящийся под действием гармонической нагрузки, является расчетной схемой для многих инженерных объектов. В частности для некоторых конструкций станков и манипуляторов источником вибраций являются механизмы, расположенные на той же поворотной платформе.

В исследованиях колебаний струны [1, 2] и стержня [3] без их вращения обнаружена взаимосвязь колебаний в различных направлениях, что приводит к существованию как плоских форм движения, так и пространственных, при которых точки осевой линии совершают дви-

жение по окружности. Для вынужденных колебаний в окрестности главного резонанса существует диапазон частот, при которых возникают устойчивые параметрические колебания в плоскости, ортогональной действию вынуждающей силы, и суммарное движение точек происходит по эллипсу. В задаче о колебаниях вращающегося ротора под действием гармонической нагрузки взаимодействие между колебаниями в различных плоскостях происходит вследствие нелинейных и гироскопических сил [4].

1. Постановка задачи

Пусть ось x совпадает с осью стержня в недеформированном состоянии, а опорам стержня соответствуют точки $x=0$, $x=L$. Центр масс поперечных сечений совпадает с осью вращения. Во вращающейся с угловой скоростью Ω системе координат обозначим через v и w перемещения точек средней линии вдоль осей y и z . При отсутствии вращения уравнения пространственных нелинейных колебаний стержня получены в [3]. Во вращающейся системе координат на сечения стержня действуют центробежные силы и силы Кориолиса, с учетом которых уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \beta \dot{v}^{IV} + \sigma \dot{v} + \sigma \omega w + (1 + \omega^2) \pi^{-4} v^{IV} - \omega^2 v - 4\gamma \varepsilon_0 \pi^{-4} v'' + 2\omega \dot{w} &= \\ = q_y(x) \cos(\mu t + \psi_1), \\ \ddot{w} + C\beta \dot{w}^{IV} + \sigma \dot{w} - \sigma \omega v + C(1 + \omega^2) \pi^{-4} w^{IV} - \omega^2 w - 4\gamma \varepsilon_0 w'' - 2\omega \dot{v} &= \\ = q_z(x) \cos(\mu t + \psi_2), \\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Omega = \omega_0 \omega, \quad \omega_0 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{\rho F(1+\omega^2)}},$$

где E , ρ – модуль упругости и плотность материала стержня; F – площадь поперечного сечения; J_y , J_z – моменты инерции сечения; ε_0 – деформация средней линии; $q_y(t)$, $q_z(t)$ – проекции нагрузки на оси y и z ; μ , ψ_1 , ψ_2 – частота и фазы нагрузки; $\gamma = FL^2(1+\omega^2)(4\pi^4 J_z)^{-1}$, $C = J_y/J_z$ – параметр нелинейности и отношение моментов инерции; β , σ – безразмерные коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; ω – безразмерная скорость вращения, ω_0 – первая частота изгибных колебаний в плоскости z .

Все перемещения и координата x отнесены к длине стержня L . Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $t = \omega_0 t$. Последнее уравнение получено из условия отсутствия относительного продольного смещения опор.

В полученных уравнениях безразмерная угловая скорость вращения стержня введена таким образом, что соответствующая размерная скорость не превышает значения, равного первой частоте изгибных колебаний. Поэтому явления, связанные с потерей устойчивости на критических скоростях вращения, не рассматриваются.

2. Уравнения движения в медленных переменных

Рассмотрим одномодовую модель и представим решение в виде:

$$v(x,t) = \varphi_1(t) \sin \pi x, \quad w(x,t) = \varphi_2(t) \sin \pi x.$$

Введем малый параметр ε :

$\gamma = \varepsilon \hat{\gamma}$, $\omega = \varepsilon \hat{\omega}$, $C = 1 + \varepsilon \hat{C}$, $f_k = \varepsilon \hat{f}_k$, $\sigma = \varepsilon \hat{\sigma}$, $\beta = \varepsilon \hat{\beta}$, т. е. нелинейность системы, угловая скорость вращения стержня, разность осевых моментов инерции, диссипация и внешние нагрузки предполагаются асимптотически малыми. Пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, приводим уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \varepsilon \eta \dot{\varphi}_1 + \varphi_1 + 2\varepsilon \omega \dot{\varphi}_2 + \varepsilon \gamma (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \varphi_1 &= \\ = \varepsilon f_1 \cos(\mu t + \psi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \varepsilon \eta \dot{\varphi}_2 + (1 + \varepsilon \delta) \varphi_2 - 2\varepsilon \omega \dot{\varphi}_1 + \varepsilon \gamma (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \varphi_2 &= \\ = \varepsilon f_2 \cos(\mu t + \psi_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\eta = \sigma + \beta, \quad f_1 = 2 \int_0^1 q_y(x) \sin \pi x dx, \quad f_2 = 2 \int_0^1 q_z(x) \sin \pi x dx.$$

Ограничимся рассмотрением колебаний в малой окрестности главного резонанса, т.е. при $\mu = 1 + \varepsilon \lambda$, где $\lambda \approx 1$ – частотная расстройка. Представим систему (2) в стандартной форме [5, 6] при помощи перехода к новым переменным:

$$\varphi_k = a_k \cos(\mu t + \alpha_k), \quad \dot{\varphi}_k = -a_k \sin(\mu t + \alpha_k), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где a_k – амплитуды парциальных колебаний; α_k – фазовые добавки.

Применение метода усреднения позволяет получить достаточно простую систему уравнений в медленных переменных, дающую возможность рассматривать колебания системы в малой окрестности единичной частоты:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= -\frac{1}{2} \varepsilon f_k \sin(\alpha_k - \psi_k) + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_1^k a_2^{3-k} \sin 2(\alpha_k - \alpha_{3-k}) - \\ &- \frac{1}{2} \varepsilon \eta a_k + (-1)^k \varepsilon \omega a_{3-k} \cos \Delta \alpha; \\ \dot{\alpha}_k &= \frac{1}{2} \varepsilon [\delta(k-1) - 2\lambda] - \frac{1}{2a_k} \varepsilon f_k \cos(\alpha_k - \psi_k) + \\ &+ \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a_k^2 + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_{3-k}^2 (2 + \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2)) + \varepsilon \omega \frac{a_{3-k}}{a_k} \sin \Delta \alpha; \\ \Delta \alpha &= \alpha_1 - \alpha_2, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Свободные колебания

Уравнения свободных колебаний получаются из системы (4) при $f_k = 0$, $\eta = 0$ и позволяют получить явные решения с помощью элементарных функций. Для установившихся движений полагаем левую часть равной нулю и получаем решения при $\Delta \alpha = \pi/2$. В этом случае из первых двух уравнений следует $a_k = \text{const}$, $k = 1, 2$, а два последних принимают вид:

$$\begin{aligned} -\lambda + \frac{3}{8} \gamma a_1^2 + \frac{1}{8} \gamma a_2^2 + \omega \frac{a_2}{a_1} &= 0, \\ -\lambda + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{8} \gamma a_1^2 + \frac{3}{8} \gamma a_2^2 + \omega \frac{a_1}{a_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Случай $\Delta \alpha = -\pi/2$ равнозначен замене знака амплитуды парциальных колебаний a_2 на противоположный и приводит к тем же уравнениям. Исключая из полученной системы частотную расстройку λ , получаем соотношение между амплитудами и следующие решения:

$$a_1^3 + \frac{4\omega}{\gamma} a_1^2 - \left(\frac{2\delta}{\gamma} + a_2^2\right) a_1 - \frac{4\omega a_2}{\gamma} = 0, \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{3}{8}\gamma a_1^2 + \frac{1}{8}\gamma a_2^2 + \omega \frac{a_2}{a_1} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{8}\gamma a_1^2 + \frac{3}{8}\gamma a_2^2 + \omega \frac{a_1}{a_2}.$$

Варьируя переменную a_2 , определяем вторую амплитуду как корень кубического уравнения, после чего второе уравнение (6) определяет амплитудно-частотные характеристики системы. При этом каждому значению a_1 соответствует максимум три корня a_2 и три значения частотной расстройки λ .

На рис. 1 представлены зависимости, построенные по формулам (6) для значений параметров $\omega=0,5$, $\gamma=1$, $\delta=1$. Цифры в скобках обозначают номер амплитуды. Поскольку изгибные жесткости различны, амплитуды a_1 и a_2 не равны между собой. Решение 1 соответствует движениям сечений по эллипсу, которые с увеличением частоты превращаются в движения преимущественно в плоскости большей изгибной жесткости. Решение 3 – это движения преимущественно в плоскости меньшей изгибной жесткости, решения 2 и 4 соответствуют амплитудам одного порядка. Для реализации решений 3 и 4 необходимо возмущение выше некоторого порогового значения. Решения 1, 3, 4 имеют одинаковые знаки амплитуд и соответствуют вращению сечений стержня по окружности в направлении вращения системы координат.

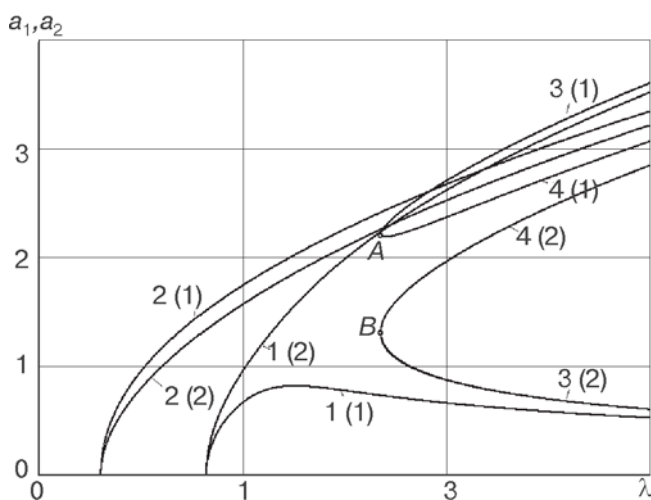


Рис. 1. Амплитудно-частотные зависимости для свободных колебаний

4. Вынужденные колебания

Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы (4) без учета диссипации, которые существуют при значениях фаз нагрузок $\psi_1=0$, $\psi_2=\pi/2$ и фазовых добавок $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi/2$. Так же, как и в случае свободных колебаний, из первых двух уравнений следует $a_k=\text{const}$, $k=1,2$, а два последних принимают вид:

$$\begin{aligned} -\lambda + \frac{3}{8}\gamma a_1^2 + \frac{1}{8}\gamma a_2^2 + \omega \frac{a_2}{a_1} - \frac{f_1}{2a_1} &= 0, \\ -\lambda + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{8}\gamma a_1^2 + \frac{3}{8}\gamma a_2^2 + \omega \frac{a_1}{a_2} - \frac{f_2}{2a_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для построения зависимостей $a_k(\lambda)$ исключаем из (7) частотную расстройку λ и получаем соотношение между амплитудами и следующие решения:

$$\begin{aligned} a_1^3 + \frac{4\omega}{\gamma} a_1^2 - \left(\frac{2\delta}{\gamma} + a_2^2 - \frac{2f_2}{\gamma a_2}\right) a_1 - \frac{4\omega a_2}{\gamma} - \frac{2f_1}{\gamma} &= 0, \\ \lambda = \frac{3}{8}\gamma a_1^2 + \frac{1}{8}\gamma a_2^2 + \omega \frac{a_2}{a_1} - \frac{f_1}{2a_1} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{8}\gamma a_1^2 + \frac{3}{8}\gamma a_2^2 + \omega \frac{a_1}{a_2} - \frac{f_2}{2a_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Варьируя переменную a_2 , определяем вторую амплитуду как корень кубического уравнения, после чего второе уравнение (8) определяет амплитудно-частотные характеристики системы. Каждому значению a_1 соответствует максимум три корня a_2 и три значения частотной расстройки λ .

Исследование устойчивости решений сводится к нахождению собственных значений матрицы $\mathbf{G}$, которая при отсутствии диссипации состоит из четырех блоков размерностью 2×2 , причем блоки $\mathbf{G}_{11}$ и $\mathbf{G}_{22}$ нулевые, а остальные два имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{12} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\gamma a_1 a_2^2 - 4\omega a_2 - 2f_1 & \gamma a_1 a_2^2 + 4\omega a_2 \\ \gamma a_1^2 a_2 + 4\omega a_1 & -\gamma a_1^2 a_2 - 4\omega a_1 - 2f_2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{G}_{21} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\gamma a_1 + (2f_1 + 4\omega a_2)/a_1^2 & \gamma a_2 - 4\omega/a_1 \\ \gamma a_1 - 4\omega/a_2 & 3\gamma a_2 + (2f_2 + 4\omega a_1)/a_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 2 и 3 приведены зависимости $a_2(l)$ и $a_1(l)$ для значений параметров $g=1$, $f_1=0$, $f_2=0$, $d=0,5$, $w=0,5$. При вращении стержня вокруг своей оси решение 1, соответствующее вращению сечений стержня в направлении угло-

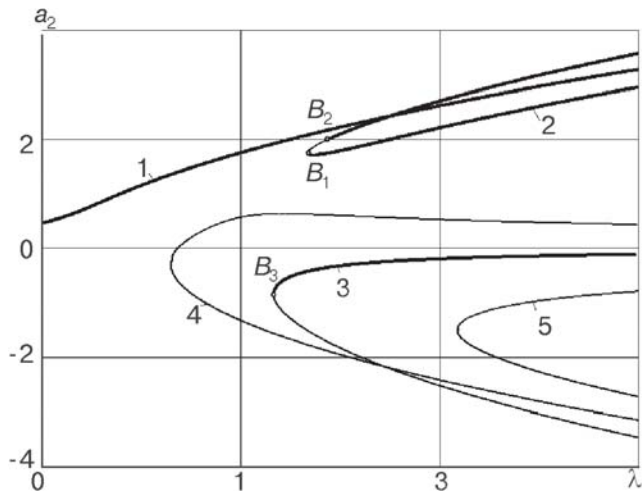


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика $a_2(\lambda)$

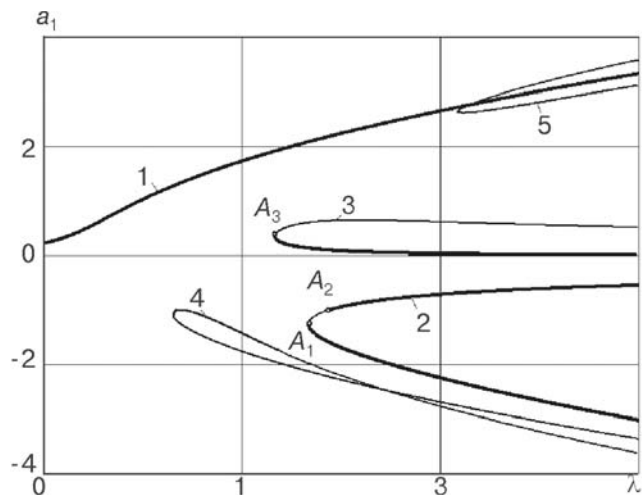


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика $a_1(\lambda)$

вой скорости, существует во всем диапазоне частотной расстройки и не имеет точек ветвления. Решение 2 соответствует вращению в противоположном направлении и является изолированным. Для его реализации необходимо наличие внешнего возмущения. Участок между точками B_1, B_2 и A_1, A_2 является неустойчивым.

Участок 3 соответствует колебаниям с малой амплитудой после прохождения резонанса. Наличие в исходных уравнениях сил Кориолиса приводит к отсутствию плоских решений. Одна ветвь решения 2 соответствует пространственной форме движения практически по окружности, вторая — по эллипсу, большая ось которого расположена в плоскости нагрузки. При уменьшении параметра δ точки A_2, B_2 перемещаются в бесконечность, и для стержня круглого сечения устойчива только одна нижняя ветвь решения 2 [4].

Одна ветвь решения 4 соответствует вращению сечений стержня в направлении вращения стержня, а аналогичная ветвь решения 5 — вращению в противоположном направлении. Вторые ветви этих решений соответствуют эллиптическому движению с большей амплитудой в плоскости, ортогональной нагрузке. Оба этих решения неустойчивы и на практике не реализуются.

Заключение

При проектировании конструкций с гибкими валами необходимо учитывать, что при пре-

вышении некоторого значения амплитуды гармонического возмущения и незначительного различия изгибных жесткостей вала в окрестности главного резонанса существует четыре режима колебаний: прямая и обратная круговые прецессии, а также эллиптические движения с большей амплитудой в плоскости действия нагрузки. Реализация того или иного режима зависит от предыстории вибрационного нагружения и наличия внешних возмущений.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 87–92.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Вынужденные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 17–24.
3. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 82–90.
4. Муницын А.И. Нелинейные изгибные колебания вращающегося стержня // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 2. С. 12–16.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
6. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 535 с.