

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О.А. Русанов, Н.Ф. Авдеев

Дано описание методов расчета установившихся вынужденных колебаний при исследовании конструкций с линейными свойствами методом конечных элементов. Рассмотрен как прямой подход к анализу вынужденных колебаний, так и подход, основанный на разложении по тонам собственных колебаний. При использовании разложения по тонам применена специальная процедура повышения точности сходимости.

Ключевые слова: линейная механическая система, вынужденные колебания, частотные характеристики, разложение по тонам собственных колебаний, квазистатическая задача, метод конечных элементов.

Введение

Задача исследования установившихся вынужденных колебаний является актуальной для машиностроительных конструкций различного назначения в связи с широким распространением на практике режимов нагружения, связанных с периодическим воздействием на системы, которые вызывают в них интенсивные резонансные вибрации и, как следствие, повышенные шумы, ускоренное накопление усталостных повреждений, превышение уровней статической прочности и другие негативные проявления.

В линейных системах исследование подобных режимов может быть эффективно выполнено методом конечных элементов (МКЭ). Постановка задачи расчета МКЭ установившихся вынужденных колебаний имеет особенности. Наибольшую точность расчета обеспечивает прямой анализ вынужденных колебаний в частотной области с построением частотных характеристик. Однако реализация прямого метода сопряжена со значительными вычислительными затратами.

Альтернативой может являться использование разложения по тонам собственных колебаний, позволяющее радикально сократить время расчета. Однако при этом могут возникать заметные ошибки, связанные с неполнотой используемого в разложении набора форм собственных колебаний. Основанные на разложении по тонам методы динамического анализа ин-

тенсивно развивались в исследованиях систем с помощью метода начальных параметров, имеющего ограниченные возможности моделирования сложных пространственных конструкций. Конечно-элементный способ дискретизации в этом отношении обладает существенно более широкими возможностями. Кроме того, решение задачи на собственные значения в приложениях МКЭ хорошо отработано [1].

Рассмотрим прямой анализ и анализ с разложением по тонам собственных колебаний, которые могут быть эффективно применены для анализа МКЭ установившихся вынужденных колебаний конструкций.

Прямой анализ установившихся вынужденных колебаний

В линейном динамическом анализе равновесие системы МКЭ описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (1)$$

где $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ – глобальные матрицы жесткости, масс и демпфирования системы МКЭ соответственно; $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$ – векторы узловых перемещений, скоростей, ускорений узлов модели соответственно.

Принято, что демпфирование в системе – малое и учитывает конструкционное демпфирование, а также внутреннее трение в материалах на основе гипотезы вязкого трения.

Установившиеся вынужденные колебания возникают в конструкции при действии на систему периодической нагрузки. Для линейного анализа колебаний из периодической нагрузки выделены гармонические составляющие, каждая из которых исследуется отдельно. Гармоническое воздействие на систему можно описать вектором нагрузки $\mathbf{R}(t)$, изменяющимся во времени по закону

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 e^{ipt} = \mathbf{R}_0 (\cos pt + i \sin pt), \quad (2)$$

где t – время; p – частота возбуждения; i – мнимая единица; $\mathbf{R}_0$ – вектор комплексных амплитуд сил, который можно представить в виде действительной $\mathbf{R}_{\text{Re}}$ и мнимой $i \cdot \mathbf{R}_{\text{Im}}$ составляющих:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_{\text{Re}} + i \cdot \mathbf{R}_{\text{Im}}. \quad (3)$$

После затухания неустановившихся переходных процессов в системе реализуются (периодически изменяющиеся во времени с частотой p) перемещения $\mathbf{U}(t)$:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 e^{ipt} = \mathbf{U}_0 (\cos pt + i \sin pt), \quad (4)$$

где $\mathbf{U}_0$ – вектор комплексных амплитуд перемещений, в котором также можно выделить действительную $\mathbf{U}_{\text{Re}}$ и мнимую $i \cdot \mathbf{U}_{\text{Im}}$ составляющие ($\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_{\text{Re}} + i \cdot \mathbf{U}_{\text{Im}}$).

Дифференцированием $\mathbf{U}(t)$ по времени получим векторы скоростей $\dot{\mathbf{U}}$ и ускорений $\ddot{\mathbf{U}}$:

$$\dot{\mathbf{U}} = ip \mathbf{U}_0 e^{ipt}; \quad \ddot{\mathbf{U}} = -p^2 \mathbf{U}_0 e^{ipt}. \quad (5)$$

После подстановки выражений (2), (4), (5) в уравнение (1) и последующего приравнивания друг к другу отдельно действительных и отдельно мнимых составляющих можно сформировать систему уравнений для определения амплитуд перемещений установившихся вынужденных колебаний в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - p^2 \mathbf{M} & -p\mathbf{C} \\ p\mathbf{C} & \mathbf{K} - p^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\text{Re}} \\ \mathbf{U}_{\text{Im}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{\text{Re}} \\ \mathbf{R}_{\text{Im}} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

С помощью данных матричных уравнений для заданной частоты возбуждения p и векторов амплитуд сил $\mathbf{R}_{\text{Re}}$, $\mathbf{R}_{\text{Im}}$ определяют действительные и мнимые составляющие амплитуд $\mathbf{U}_{\text{Re}}$, $\mathbf{U}_{\text{Im}}$ перемещений и рассчитывают модуль амплитуды и фазу колебаний для каждой компоненты перемещений. Определяя данные параметры для различных частот возбуждения p с некоторым шагом по частоте, строят в заданном диапазоне частотные и другие динамические характеристики объекта [2, 3].

Матрица коэффициентов системы уравнений (6) является несимметричной, имеет удвоенный порядок по сравнению с исходными матрицами ($\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$), изменяется при изменении частоты p . При построении частотных характеристик требуются многократное формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений (6), что представляет собой трудоемкую вычислительную задачу. Матрицы при разложении претерпевают значительное заполнение с нарушением высокой разреженности, свойственной матрицам МКЭ в исходном состоянии.

Сократить вычислительные затраты при построении частотных характеристик с использованием прямого анализа установившихся вынужденных колебаний позволяет допущение об отсутствии демпфирования. Во многих расчетных случаях результаты при определении частотных характеристик на нерезонансных режимах при таком подходе будут мало отличаться от частотных характеристик, полученных при расчете с учетом демпфирования. При этом вдвое уменьшается порядок системы уравнений, решаемой на каждом шаге по частоте, сохраняется ее симметричность. В этом случае система уравнений (6) распадается на две независимые системы уравнений для определения мнимой и действительной составляющих амплитуд колебаний:

$$(\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U}_{\text{Re}} = \mathbf{R}_{\text{Re}},$$

$$(\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U}_{\text{Im}} = \mathbf{R}_{\text{Im}}. \quad (7)$$

Для расчета резонансных амплитуд колебаний, которые фактически определяются затуханием в системе, применяется методика [4], позволяющая по ширине изолированных резонансных пиков амплитудно-частотных характеристик, полученных без учета демпфирования, рассчитать уровни резонансных амплитуд при наличии заданного демпфирования.

Анализ установившихся вынужденных колебаний с разложением по тонам собственных колебаний

Для данного типа анализа должны быть определены необходимые частоты и формы собственных колебаний объекта. При отсутствии демпфирования и внешних нагрузок их получают из решения задачи на собственные значения:

$$\mathbf{K} \cdot \Phi = \mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \Lambda, \quad (8)$$

где Φ – матрица, содержащая в своих столбцах собственные векторы (собственные формы колебаний); Λ – диагональная матрица собственных чисел (квадратов круговых частот собственных колебаний).

Матрицы Φ , Λ подчиняются условиям ортогональности и нормирования:

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T \cdot M \cdot \Phi = I, \quad (9)$$

где I – единичная матрица.

При разложении по тонам собственных колебаний вычисляют проекции векторов амплитуд усилий на данные тона, образующие нормальные координаты:

$$f_{Re} = \Phi^T \cdot R f_{Re}, \quad f_{Im} = \Phi^T \cdot R_{Im}, \quad (10)$$

где f_{Re} , f_{Im} – векторы с компонентами проекций действительной и мнимой частей амплитуд усилий на учитываемые тона колебаний.

Амплитуды перемещений представлены в виде разложения по нормальным координатам:

$$U_{Re} = \Phi \cdot x_{Re}, \quad U_{Im} = \Phi \cdot x_{Im}, \quad (11)$$

где x_{Re} , x_{Im} – векторы с коэффициентами разложения по нормальным координатам действительной и мнимой частей амплитуд перемещений.

Векторы x_{Re} , x_{Im} являются неизвестными в задаче. Сделано допущение об отсутствии перекрестного демпфирования между различными собственными тонами (колебания по различным тонам не связаны по демпфированию друг с другом). Матрица демпфирования в нормальных координатах принимает диагональную форму:

$$\Phi^T \cdot C \cdot \Phi = D = \text{diag} \left(\frac{\omega_i \delta_i}{\pi} \right), \quad (12)$$

где D – диагональная матрица демпфирования в нормальных координатах; ω_i , δ_i – круговая собственная частота и логарифмический декремент колебаний для i -го тона колебаний.

Умножив левую и правую части каждого из двух матричных уравнений системы (6) на Φ^T и подставив в эти уравнения выражения (10), (11), (12), после преобразования получим уравнение вынужденных колебаний в нормальных координатах:

$$\begin{bmatrix} \Lambda - p^2 I & -p \cdot D \\ p \cdot D & \Lambda - p^2 I \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_{Re} \\ x_{Im} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{Re} \\ f_{Im} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Матрица данного уравнения содержит четыре блока, каждый из которых представляет собой квадратную диагональную матрицу порядка m , где m – число учитываемых в разло-

жении тонов колебаний. При такой структуре матрицы система уравнений (13) распадается на не связанные друг с другом системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Основные вычислительные затраты при данном методе заключаются в расчете частот и форм собственных колебаний конструкции.

Основной недостаток метода связан с возможными погрешностями в определении нерезонансных амплитуд перемещений. Погрешности обусловлены использованием ограниченного набора тонов собственных колебаний в разложении. Снизить эти погрешности можно, расширив количество учитываемых в разложении тонов, однако даже значительное увеличение этого количества полностью не устраняет подобных погрешностей. Повысить точность разложения можно, применив метод выделения квазистатической составляющей [5].

Выделение квазистатической составляющей в уравнении динамического равновесия

Метод повышения точности расчета при разложении по тонам собственных колебаний может быть реализован с помощью выделения квазистатики [5].

Введенным обозначения: Φ_0 , Φ_1 – матрицы с формами собственных колебаний для нулевых и ненулевых тонов; Λ_1 – диагональная матрица собственных чисел (квадратов круговых частот собственных колебаний системы) для ненулевых тонов; I_0 , I_1 – единичные матрицы соответствующего порядка.

Условия ортогональности и нормирования (9) могут быть записаны для нулевых и ненулевых тонов отдельно:

$$\begin{aligned} \Phi_0^T \cdot K \cdot \Phi_0 &= 0, & \Phi_0^T \cdot K \cdot \Phi_1 &= 0, \\ \Phi_1^T \cdot K \cdot \Phi_1 &= \Lambda_1, & \Phi_0^T \cdot M \cdot \Phi_0 &= I_0, \\ \Phi_0^T \cdot M \cdot \Phi_1 &= 0, & \Phi_1^T \cdot M \cdot \Phi_1 &= I_1. \end{aligned} \quad (14)$$

При исследованиях полностью закрепленных систем квазистатическая задача решается известными методами в рамках статического расчета. При исследованиях свободных (незакрепленных) и частично свободных систем (механизмов) НДС объекта определяется совместным действием внешней нагрузки и (если она не является самоуравновешенной) инерционными усилиями от движения с ускорением. В качестве квазистатического решения будет использован вектор U_s , который ортогонален (с

весом матрицы масс $\mathbf{M}$) к формам колебаний Φ_0 :

$$\Phi_0^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_s = 0. \quad (15)$$

Метод повышения точности заключается в представлении вектора амплитуд перемещений $\mathbf{U}$ в виде суммы квазистатического решения $\mathbf{U}_s$, изменяющегося во времени вместе с изменением внешней нагрузки, и дополнительных перемещений $\Delta \mathbf{U}$, описывающих колебания конструкции относительно квазистатического равновесного состояния:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_s + \Delta \mathbf{U}. \quad (16)$$

Аналогичные соотношения можно записать для скоростей и ускорений:

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_s + \Delta \dot{\mathbf{U}}, \quad \ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}_s + \Delta \ddot{\mathbf{U}}. \quad (17)$$

Подстановка уравнений (17) в уравнение (1) дает следующее:

$$\mathbf{M} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \Delta \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{U} = -\mathbf{R} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_s - \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_s \quad (18)$$

Дополнительные векторы амплитуд перемещений $\Delta \mathbf{U}$ разложены отдельно по нулевым тонам в виде произведения $\Phi_0 \cdot \mathbf{x}_0$ и отдельно по ненулевым тонам в виде произведения $\Phi_1 \cdot \mathbf{x}_1$. Аналогично разложены дополнительные скорости и ускорения. Уравнения (16), (17) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_s + \Phi_0 \cdot \mathbf{x}_0 + \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_1, \\ \dot{\mathbf{U}} &= \dot{\mathbf{U}}_s + \Phi_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 + \Phi_1 \cdot \dot{\mathbf{x}}_1, \\ \ddot{\mathbf{U}} &= \ddot{\mathbf{U}}_s + \Phi_0 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_0 + \Phi_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}_0$, $\ddot{\mathbf{x}}_0$ – векторы с коэффициентами разложения перемещений, скоростей и ускорений по нулевым тонам; $\mathbf{x}_1$, $\dot{\mathbf{x}}_1$, $\ddot{\mathbf{x}}_1$ – векторы с коэффициентами разложения дополнительных перемещений, скоростей и ускорений по ненулевым тонам колебаний.

Приведение к нормальным координатам с помощью матриц Φ_0 и Φ_1 позволяет записать уравнение движения конструкции как твердого тела и уравнение, описывающее колебания конструкции вследствие ее деформаций, в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_0 &= \Phi_0^T \cdot \mathbf{R}, \\ \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1 &= \Phi_1^T (-\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_s). \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) используется для динамического анализа конструкций с разложением по тонам собственных колебаний, уточненным путем выделения квазистатической составляющей.

Выделение квазистатической составляющей в уравнении установившихся вынужденных колебаний

Возбужденные колебания в конструкции возникают под действием периодически изменяющихся во времени с частотой p внешних сил $\mathbf{R}(t)$. Изменение сил $\mathbf{R}(t)$ во времени подчиняется закону (2). Аналогично в виде произведения векторов комплексных амплитуд и функций времени представлены векторы амплитуд квазистатических перемещений $\mathbf{U}_s(t)$ и дополнительных перемещений $\Delta \mathbf{U}(t)$:

$$\mathbf{U}_s(t) = \mathbf{U}_{s0} e^{ipt}, \quad \Delta \mathbf{U}(t) = \Delta \mathbf{U}_0 e^{ipt}, \quad (21)$$

где $\mathbf{U}_{s0}$ – вектор комплексных амплитуд квазистатических перемещений; $\Delta \mathbf{U}_0$ – вектор комплексных амплитуд дополнительных перемещений.

В векторах $\mathbf{U}_{s0}$, $\Delta \mathbf{U}_0$ можно выделить действительные и мнимые составляющие:

$$\mathbf{U}_{s0} = \mathbf{U}_{sRe} + i \cdot \mathbf{U}_{sIm}, \quad \Delta \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_{Re} + i \cdot \mathbf{U}_{Im}. \quad (22)$$

Составляющие $\mathbf{U}_{sRe}$, $\mathbf{U}_{sIm}$ должны быть определены из решения квазистатической задачи по заданным значениям $\mathbf{R}_{Re}$, $\mathbf{R}_{Im}$:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_{sRe} = \mathbf{R}_{Re}, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_{sIm} = \mathbf{R}_{Im}. \quad (23)$$

Дифференцированием по времени векторов $\Delta \mathbf{U}(t)$, $\mathbf{U}_s(t)$ получаются векторы скоростей $\Delta \dot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}_s$ и ускорений $\Delta \ddot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}_s$ в системе:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{U}} &= ip \Delta \mathbf{U}_0 e^{ipt}; \quad \Delta \ddot{\mathbf{U}} = -p^2 \Delta \mathbf{U}_0 e^{ipt}; \\ \dot{\mathbf{U}}_s &= ip \mathbf{U}_{s0} e^{ipt}; \quad \ddot{\mathbf{U}}_s = -p^2 \mathbf{U}_{s0} e^{ipt}. \end{aligned} \quad (24)$$

После подстановки выражений (24) в уравнение (18) его можно привести к виду

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}) \cdot \Delta \mathbf{U}_0 + ip \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{U}_0 &= \\ = \mathbf{R}_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_{s0} - ip \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_{s0} + p^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{s0} \end{aligned} \quad (25)$$

и записать в развернутой форме

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}) \cdot (\mathbf{U}_{Re} + i \cdot \mathbf{U}_{Im}) + ip \mathbf{C} \cdot (\mathbf{U}_{Re} + i \cdot \mathbf{U}_{Im}) &= \\ = (\mathbf{R}_{Re} + i \cdot \mathbf{R}_{Im}) - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{U}_{sRe} + i \cdot \mathbf{U}_{sIm}) - & \\ - ip \mathbf{C} \cdot (\mathbf{U}_{sRe} + i \cdot \mathbf{U}_{sIm}) + p^2 \mathbf{M} \cdot (\mathbf{U}_{sRe} + i \cdot \mathbf{U}_{sIm}). \end{aligned} \quad (26)$$

Действительные и мнимые составляющие амплитуд перемещений представлены в виде разложения по нормальным координатам в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{sRe} &= \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_{sRe}; \quad \mathbf{U}_{sIm} = \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_{sIm}; \\ \mathbf{U}_{Re} &= \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_{Re}; \quad \mathbf{U}_{Im} = \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_{Im}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\mathbf{x}_{sRe}$, $\mathbf{x}_{sIm}$ – векторы с коэффициентами

разложения по нормальным координатам действительной и мнимой частей амплитуд квазистатических перемещений $\mathbf{U}_s$; $\mathbf{x}_{Re}$, $\mathbf{x}_{Im}$ – векторы с коэффициентами разложения по нормальным координатам действительной и мнимой частей амплитуд дополнительных перемещений $\Delta \mathbf{U}$.

Преобразовав уравнение (26) к нормальным координатам, получим систему уравнений вынужденных колебаний с выделением квазистатической составляющей при разложении в виде

$$\begin{bmatrix} \Lambda - p^2 \mathbf{I} & -p \mathbf{D} \\ p \mathbf{D} & \Lambda - p^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{Re} \\ \mathbf{x}_{Im} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_{sIm} + p^2 \mathbf{x}_{sRe} \\ -p \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_{sRe} + p^2 \mathbf{x}_{sIm} \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

Векторы $\mathbf{x}_{Re}$, $\mathbf{x}_{Im}$ являются неизвестными в задаче и должны быть определены в результате ее решения. Система уравнений (28) распадается на ряд (по числу учитываемых тонов колебаний) независимых систем линейных алгебраических уравнений второго порядка, которые могут быть решены самостоятельно.

Последующий синтез действительной и мнимой составляющих $\mathbf{U}_{Re}$, $\mathbf{U}_{Im}$ полных амплитуд $\mathbf{U}_0$ вынужденных колебаний в физических координатах модели осуществляется по формулам:

$$\mathbf{U}_{Re} = \mathbf{U}_{sRe} + \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_{Re}, \quad \mathbf{U}_{Im} = \mathbf{U}_{sIm} + \Phi_1 \cdot \mathbf{x}_{Im}. \quad (29)$$

Далее для каждой физической степени свободы модели могут быть рассчитаны модуль амплитуды вынужденных колебаний, фаза и другие параметры, а также построены частотные характеристики.

Модельная задача для установившихся вынужденных колебаний оболочки

Рассмотрена задача возбуждения установившихся вынужденных колебаний в цилиндрической оболочке (рис. 1) силой $F(t)$, изменяющейся по гармоническому закону. Оболочка жестко закреплена на одном из своих торцов, другой торец – свободен. Усилие возбуждения приложено к стенке оболочки на свободном торце.

Оболочка выполнена из материала с характеристиками: модуль Юнга $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,28$, плотность $\rho = 7850$ кг/м³ и имеет следующие геометрические параметры: $L = 1000$ м, $R = 125$ м, $h = 3$ мм. Возбуждение вынужденных колебаний осуществлялось в диапазоне частот 100 – 800 Гц. Амплитуда силы составляла 24 Н. Значения логарифмического декремента колебаний δ заданы линейно возрастающими от 0,05 до 0,2 при изменении частоты тона колебаний от 1 до 1000 Гц.

Для моделирования использованы разработанные треугольные конечные элементы тонкой оболочки. Конечно-элементная модель оболочки содержит 13 636 элементов, 6898 узлов, 41 338 степеней свободы.

При решении задачи использован метод разложения по тонам собственных колебаний с выделением и без выделения квазистатической составляющей. Для оболочки с помощью алгоритма одновременных итераций первоначально определены 16 частот и форм собственных колебаний (все собственные частоты лежат в диапазоне от 0 до 800 Гц).

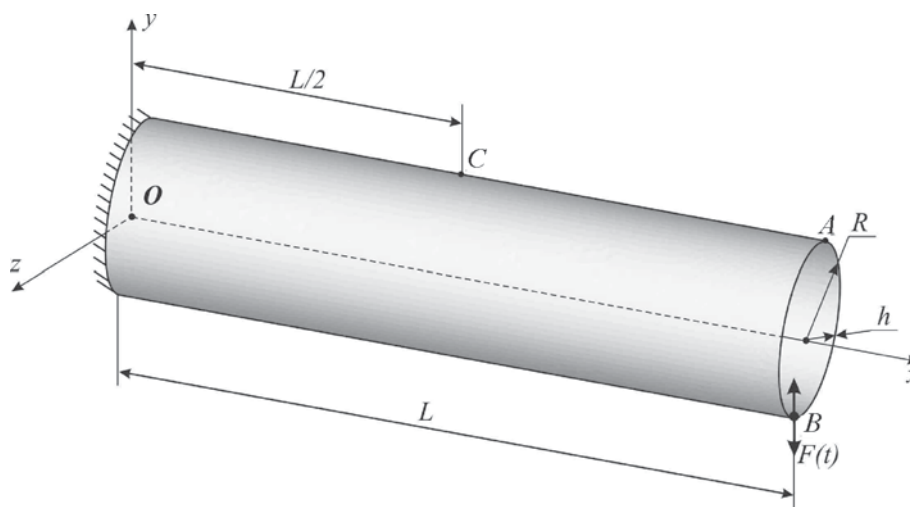


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки

Расчет амплитудно-частотных характеристик выполнен в диапазоне 100 – 800 Гц с шагом 1 Гц.

Для иллюстрации сходимости решения выполнены расчеты установившихся вынужденных колебаний оболочки с разложением по 78 тонам. Сравнение амплитудно-частотной характеристики по вертикальному перемещению в точке *B* (см. рис. 1) для случаев разложения по 16, 78 тонам колебаний без выделения квазистатики и по 16 тонам колебаний с выделением квазистатики показано на рис. 2. Хорошо видно, что резонансные уровни амплитуд колебаний практически совпадают.

Совпадение резонансных уровней амплитуд колебаний обусловлено тем, что данные амплитуды определяются преимущественной реакцией только одного резонансного тона колебаний системы, который учтен в данных вариантах разложения. Остальные тона колебаний оказывают незначительное влияние на данные резонансные амплитуды. В зонах между резонансными пиками имеются существенные различия, так как в этом случае амплитуды вынужденных колебаний складываются из сопоставимых по величине реакций большого количества тонов.

Заключение

Рассмотрены прямые методы исследования установившихся вынужденных колебаний в конечно-элементном анализе линейных систем. Отмечено, что расчет амплитуд установившихся вынужденных колебаний с учетом затухания в системе связан с необходимостью формирования и решения системы линейных алгебраических уравнений удвоенного порядка по отношению к числу степеней свободы модели, что может приводить к существенным вычислительным затратам.

Предложенный альтернативный подход, основанный на разложении по тонам собственных колебаний, является менее требовательным к вычислительным затратам, хотя и имеет некоторые недостатки, связанные с возможной потерей точности. Для повышения точности разложения проведена процедура предварительного выделения квазистатической составляющей.

Список литературы

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Л.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических коле-

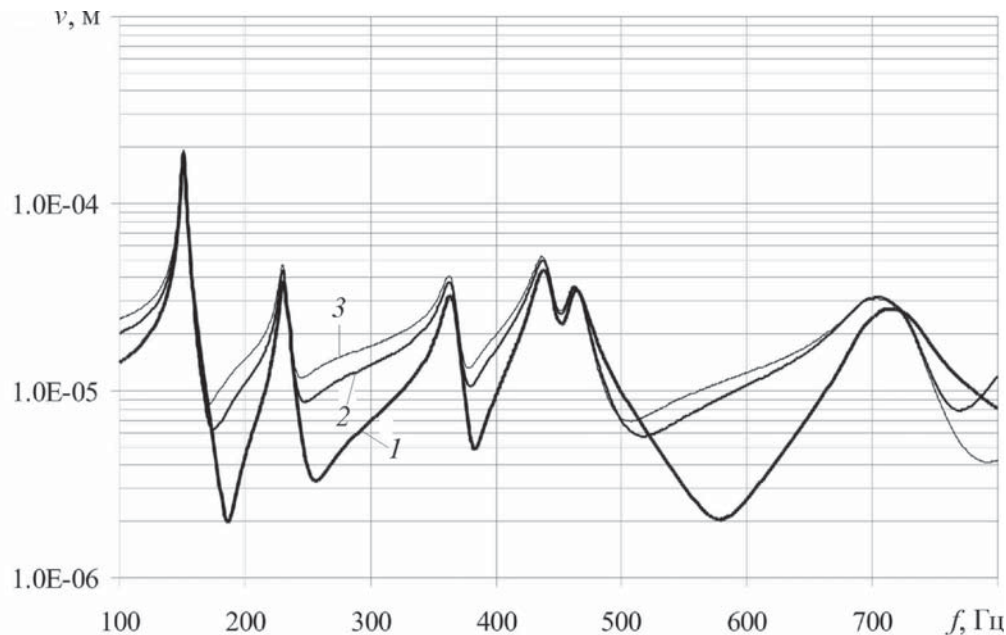


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики по вертикальному перемещению в точке *B* конструкции, вычисленные с использованием разложения с различным количеством собственных тонов колебаний:

- 1 – разложение по 16 тонам; 2 – разложение по 78 тонам;
3 – разложение по 16 тонам с выделением квазистатики

- баний. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 414 с.
3. Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
 4. Микишев Г.И., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 564 с.
 5. Лиходед А.И. О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 180 – 188.

Материал поступил в редакцию 12.11.2011

РУСАНОВ
Олег Александрович

E-mail: newmalina@rambler.ru
Тел.: +7(495) 620-39-89

Доктор технических наук. Ведущий научный сотрудник ФГБОУ ВПО «Московский государственный индустриальный университет». Сфера научных интересов – численные методы анализа машиностроительных конструкций, расчеты на прочность несущих систем мобильных машин. Автор более 60 научных работ.

АВДЕЕВ
Николай Федорович

Доктор технических наук, профессор. Сфера научных интересов – динамический анализ летательных аппаратов. Автор более 70 научных работ.