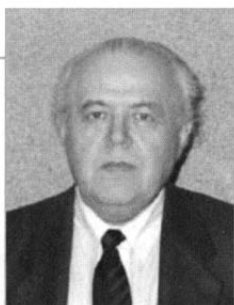


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В АГРЕССИВНОЙ СРЕДЕ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Часть 2*

А.М. Локощенко, Д.О. Платонов



ЛОКОЩЕНКО
Александр Михайлович

Доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии естественных наук. Заместитель директора НИИ механики. Основная область научных интересов – математическая теория ползучести металлов в различных условиях и ее экспериментальное обоснование. Автор 140 научных трудов.

Введение

Вопросу математического моделирования длительной прочности металлов, находящихся в условиях агрессивной окружающей среды, по-

священо немало работ, однако проблема анализа влияния агрессивной среды на время разрушения элементов конструкций по-прежнему является очень актуальной. Трудность изучения влияния агрессивной среды на длительную прочность металлов связана с недостатком эк-



ПЛАТОНОВ
Денис Олегович

Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры общей и прикладной математики ГОУ МГИУ. Инженер института механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор 16 научных трудов.

* Окончание. Начало см. в «Машиностроение и инженерное образование». 2006. Вып. 3.

спериментальных исследований. Испытания на длительную прочность металлических образцов в основном проводятся в воздушной среде при одноосном растяжении, так как проведение высокотемпературных испытаний при сложном напряженном состоянии связано со значительными техническими трудностями. Результаты немногих испытаний на длительную прочность металлов, находящихся в агрессивной окружающей среде при сложном напряженном состоянии, показывают, что многие среды приводят к уменьшению времени разрушения по сравнению с вакуумом в несколько раз, а особо агрессивные среды (например, высокосернистые топлива) – в десятки раз. Технические трудности, связанные с проведением подобных испытаний, приводят к необходимости разработки эффективных методов расчета для оценки влияния сложного напряженного состояния и агрессивной среды на характеристики длительного разрушения элементов конструкций.

В этой части статьи рассматривается моделирование процесса накопления повреждений в тонкостенных цилиндрических оболочках, находящихся в сложном напряженном состоянии в агрессивных средах. Для этого используется кинетическая теория ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова [1], где в качестве кинетических параметров используются зависящие от времени t концентрация агрессивной среды c , определяемая из решения уравнения диффузии, и параметр повреждения материала ω .

1. Приближенный метод решения уравнения диффузии

1.1. Задача диффузии в оболочке при постоянном значении концентрации агрессивной среды на ее поверхности

Рассмотрим решение задачи о нахождении концентрации агрессивной среды в тонкостенной цилиндрической оболочке при условии, что концентрация элементов агрессивной среды на обеих ее поверхностях постоянна и одинакова.

Будем считать, что длина тонкостенной оболочки во много раз превосходит радиус R_0 ее срединной поверхности, так что влияние продольной координаты оболочки на диффузионный процесс в ее поперечном сечении можно не учитывать. Рассматриваем осесимметричную задачу, поэтому диффузионный процесс в цилиндрической оболочке можно считать одномерным. Поскольку толщина оболочки H_0 значительно меньше ее радиуса, диффузионный процесс в элементе такой оболочки мало отличается от диффузионного процесса в длинной прямоугольной пластине. Введем радиальную координату x в поперечном сечении оболочки таким образом, что значения $x = 0$ и $x = H_0$ будут соответствовать внутренней и внешней поверхностям оболочки (рис. 1). Считаем, что действие агрессивной среды осуществляется с обеих поверхностей тонкостенной оболочки, вследствие чего задача является симметричной, поэтому рассмотрим только часть сечения со стороны внутренней поверхности при $0 \leq x \leq 0,5 H_0$.

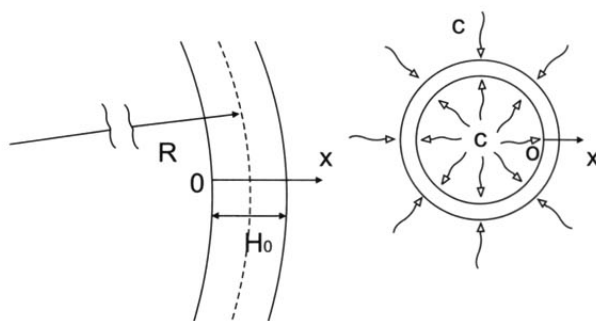


Рис. 1. Схема тонкостенной оболочки

Уравнение диффузии для решения этой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

где t – время; c – концентрация агрессивной среды в произвольной точке оболочки; x – радиальная координата произвольной точки оболочки; $D = \text{const}$ – коэффициент диффузии.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{2x}{H_0}, \quad \bar{t} = \frac{48Dt}{H_0^2}, \quad \bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{c(x, t)}{c_0},$$

где $c_0 = \text{const}$ – значение концентрации агрессивной среды в окружающем пространстве.

Уравнение (1.1) в этом случае примет следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad \bar{t} \geq 0. \quad (1.2)$$

Начальное и граничные условия для этой задачи следующие:

$$\bar{c}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{c}(0, \bar{t}) = 1, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}}(1, \bar{t}) = 0. \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.2), полученное с помощью метода Фурье [2], имеет вид:

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi \bar{x}}{2} \exp \left[-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 \bar{t}}{48} \right]. \quad (1.4)$$

Наряду с точным решением (1.4) получим приближенное решение задачи (1.2)–(1.3). Из уравнения диффузии следует, что заметное изменение концентрации $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ в каждой точке наступает по истечении некоторого времени, зависящего от расстояния данной точки до поверхности тонкостенной оболочки. В связи с этим при получении приближенного решения задачи разделим всю область поперечного сечения на области, соответствующие невозмущенной и возмущенной стадиям разрушения, и исследуем движение границы диффузионного фронта между ними.

Введем понятие координаты диффузионного фронта $l(\bar{t})$, в качестве которой выберем безразмерную координату фронта $\bar{l}(\bar{t}) = 2l(\bar{t})/H_0$. При $\bar{l}(\bar{t}) = 1$ фронты, продвигающиеся с обеих поверхностей оболочки, соединяются.

При $0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}(\bar{t})$ искомая функция $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ находится в виде параболы k -ой степени от координаты $\bar{x}$; перед фронтом ($\bar{l}(\bar{t}) \leq \bar{x} \leq 1$) функция $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ равна нулю. Рассмотрим две последовательные стадии решения [3, 4]:

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} \left[1 - \frac{\bar{x}}{\bar{l}(\bar{t})} \right]^k, & 0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}(\bar{t}), \quad 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0, \\ 0, & \bar{l}(\bar{t}) \leq \bar{x} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + [1 - B(\bar{t})](1 - \bar{x})^k, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad \bar{t} > \bar{t}_0, \quad (1.6)$$

где $\bar{t}_0$ – время достижения диффузионным фронтом срединной поверхности оболочки; $B(\bar{t}) = \bar{c}(1, \bar{t})$.

Согласно (1.5) и (1.6) зависимости $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ при любом $\bar{t}$ представляют собой параболы k -ой степени от координаты $\bar{x}$. Неизвестные функции $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ определяются с помощью интегрального удовлетворения уравнения диффузии (1.2):

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} - 12 \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x} = 0. \quad (1.7)$$

Подставив выражения (1.5) и (1.6) в (1.7), находим функции $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ с учетом начальных и граничных условий:

$$\bar{l}(\bar{t}) = \sqrt{\frac{\bar{t}k(k+1)}{6}}, \quad B(\bar{t}) = 1 - \exp \left[-\frac{(k+1)(\bar{t}_0 - \bar{t})}{12} \right]. \quad (1.8)$$

Значение $\bar{t}_0$ определяется из условия $\bar{l}(\bar{t}) = 1$:

$$\bar{t}_0 = \frac{6}{k(k+1)}.$$

Подставляя (1.8) в (1.5) и (1.6), получаем выражение $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ для обеих стадий разрушения.

Определим уровень концентрации в объеме рассматриваемой оболочки, для чего введем среднюю концентрацию по поперечному сечению тонкостенной оболочки $\bar{c}_m(\bar{t})$ [3, 4]:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x}, \quad (1.9)$$

которая при учете (1.4), (1.5), (1.6) и (1.8) зависит от времени следующим образом:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\bar{t}k}{6(k+1)}}, & 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0, \\ 1 - \frac{k}{k+1} \exp \left[-\frac{(k+1)(\bar{t} - \bar{t}_0)}{12} \right], & \bar{t} \geq \bar{t}_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\bar{c}_{m0}(\bar{t}) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp \left[-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 \bar{t}}{48} \right]. \quad (1.11)$$

В качестве показателя степени k примем то его значение, которое приводит к наилучшему соответствию функций $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ и $\bar{c}_{m1}(k, \bar{t})$, характеризующих точное (1.4) и приближенное (1.5)–(1.6) решения задачи соответственно.

Введем величину $\Delta(k, \bar{t})$, представляющую собой относительное интегральное расхождение точного $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ и приближенного $\bar{c}_{m1}(k, \bar{t})$ ре-

шений с показателем степени k при изменении безразмерного параметра времени от 0 до $\bar{t}$:

$$\Delta(k, \bar{t}) = \left[\int_0^{\bar{t}} |\bar{c}_{m1}(\bar{t}) - \bar{c}_{m0}(k, \bar{t})| d\bar{t} \right] \cdot \left[\int_0^{\bar{t}} \bar{c}_{m0}(\bar{t}) d\bar{t} \right]^{-1}. \quad (1.12)$$

Основное накопление концентрации в тонкостенной оболочке происходит при $\bar{t} \approx 20$. При $\bar{t} = 20$ минимальное значение $\Delta(k, \bar{t})$ достигается при $k = 1,52$ (рис. 2).

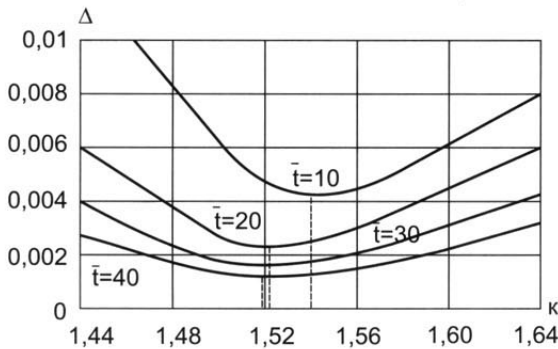


Рис. 2. Влияние параметров k и $\bar{t}$ на величину относительного интегрального расхождения при постоянном значении концентрации агрессивной среды на поверхности оболочки

Для оценки погрешности вычисления приближенного решения $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ по сравнению с точным решением $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ введем параметр $\varepsilon(\bar{t})$:

$$\varepsilon(\bar{t}) = \frac{|\bar{c}_{m0}(\bar{t}) - \bar{c}_{m1}(k, \bar{t})|}{\bar{c}_{m0}(\bar{t})}. \quad (1.13)$$

На рис. 3 показаны графики функций $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$, $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ и $\varepsilon(\bar{t})$, откуда следует, что предложенное приближенное решение (1.5)–(1.6) при $k = 1,52$ дает погрешность $\varepsilon(\bar{t})$, не превышающую 0,7% при $\bar{t} > 4$; при $\bar{t} \rightarrow +\infty$ погрешность $\varepsilon(\bar{t})$ асимптотически стремится к нулю.

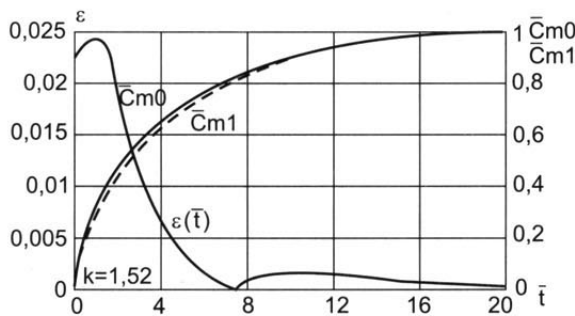


Рис. 3. Зависимости $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$, $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ при $k = 1,52$ (сплошная и штриховая линии соответственно) и относительной погрешности $\varepsilon(\bar{t})$

1.2. Задача диффузии в оболочке при условии массообмена на ее обеих поверхностях

Рассмотрим задачу о распространении концентрации агрессивной среды в тонкостенной оболочке с учетом явления диффузии, протекающей в условиях поверхностного массообмена.

Примем, что действие агрессивной среды осуществляется с обеих поверхностей тонкостенной оболочки с одинаковым коэффициентом массообмена γ . Тогда задача является симметричной, поэтому рассмотрим только часть сечения оболочки при $0 \leq \bar{x} \leq 1$.

В данной задаче начальные и граничные условия в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\bar{c}(\bar{x}, 0) = 0, \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) = \bar{\gamma} [\bar{c}(0, \bar{t}) - 1], \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}}(1, \bar{t}) = 0, \quad (1.14)$$

$$\text{где } \bar{\gamma} = \frac{\gamma \cdot H_0}{2}.$$

Точное решение задачи (1.2), (1.14) имеет следующий вид [2]:

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left[\cos \frac{z_k \bar{x}}{2} + \frac{2\bar{\gamma}}{z_k} \cdot \sin \frac{z_k \bar{x}}{2} \right] \exp \left[-\frac{z_k^2 \bar{t}}{48} \right], \quad (1.15)$$

где z_k – положительные корни уравнения

$$2 \operatorname{ctg} z = \frac{z}{2\bar{\gamma}} - \frac{2\bar{\gamma}}{z}, \quad (1.16)$$

а коэффициенты a_k определяются при помощи уравнения

$$a_k = \frac{2[z_k \sin z_k + 2\bar{\gamma}(1 - \cos z_k)]}{[z_k^2 + 4\bar{\gamma} + 4\bar{\gamma}^2]}. \quad (1.17)$$

Рассмотрим приближенное решение задачи (1.2), (1.14), основанное на введении диффузионного фронта:

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}(\bar{l}(\bar{t}) - \bar{x})^k}{(\bar{l}(\bar{t}))^{k-1}(k + \bar{\gamma}\bar{l}(\bar{t}))}, & 0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}(\bar{t}), 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0, \\ 0, & \bar{l}(\bar{t}) \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + \frac{\bar{\gamma}(1 - B(\bar{t}))}{(k + \bar{\gamma})} (1 - \bar{x})^k, \quad \bar{t} > \bar{t}_0. \quad (1.19)$$

Функции $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ определяются с помощью интегрального удовлетворения выражений (1.18)–(1.19) уравнению диффузии (1.7):

$$\bar{t} = \frac{6}{(k+1)k\bar{\gamma}^2} \left[\bar{l}^2(\bar{t}) + 2\bar{l}(\bar{t})k\bar{\gamma} - 2k^2 \ln \left(1 + \frac{\bar{\gamma}\bar{l}(\bar{t})}{k} \right) \right],$$

$$B(\bar{t}) = 1 - \exp \left[-\frac{\bar{\gamma}(\bar{t} - \bar{t}_0)k(k+1)}{12((k+1)(k+\bar{\gamma}) - \bar{\gamma})} \right]. \quad (1.20)$$

Параметр $\bar{t}_0$ определяется из условия $\bar{l}(\bar{t}) = 1$ следующим образом:

$$\bar{t}_0 = \frac{6}{(k+1)k\bar{\gamma}^2} \left[1 + 2k\bar{\gamma} - 2k^2 \ln \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \right]. \quad (1.21)$$

Найдем среднюю по поперечному сечению концентрацию $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ при учете (1.9), (1.18)–(1.19):

$$\bar{c}_{m1}(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}\bar{l}(\bar{t})^2}{(k+\bar{\gamma}\bar{l}(\bar{t}))(k+1)}, & 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0, \\ B(\bar{t}) + (1-B(\bar{t}))\frac{\bar{\gamma}}{(k+1)(k+\bar{\gamma})}, & \bar{t} > \bar{t}_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

где $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ вычисляются согласно (1.20).

Из точного решения (1.15) задачи (1.2) при использовании (1.9) получим выражение для средней концентрации $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$:

$$\bar{c}_{m0}(\bar{t}) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_k}{z_k} \left[\sin \frac{z_k}{2} - \frac{2\bar{\gamma}}{z_k} \left(\cos \frac{z_k}{2} + 1 \right) \right] \exp \left[-\frac{z_k^2 \bar{t}}{48} \right], \quad (1.23)$$

где z_k и a_k определяются с помощью уравнений (1.16)–(1.17).

При исследовании влияния коэффициента массообмена $\bar{\gamma}$ на погрешность приближенного решения было получено, что изменение коэффициента $\bar{\gamma}$ не приводит к каким-либо качественным различиям, в связи с чем ниже приведены результаты вычислений только при $\bar{\gamma} = 1$.

Для количественной оценки расхождения функций $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ и $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ воспользуемся относительным интегральным расхождением (1.12). Основное накопление концентрации в тонкостенной оболочке происходит при $\bar{t} \approx 50$. При $\bar{t} = 50$ минимальное значение $\Delta(k, \bar{t})$ достигается при $k = 1,98$ (рис. 4).

Для оценки погрешности вычисления приближенного решения $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ по сравнению с точным решением $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ воспользуемся формулой (1.13).

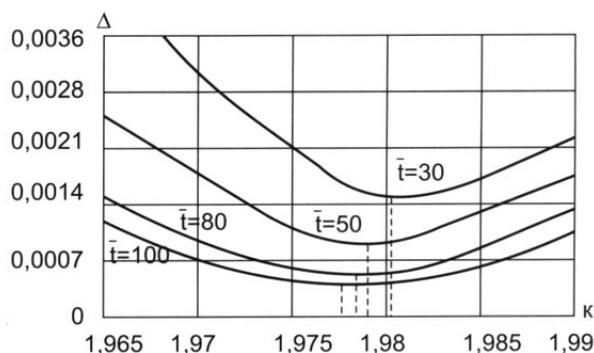


Рис. 4. Влияние параметров k и $\bar{t}$ на величину относительного интегрального расхождения при условии массообмена концентрации агрессивной среды на поверхности оболочки

Из рис. 5 следует, что предложенное приближенное решение (1.18)–(1.23) при $k = 1,98$ и $\bar{\gamma} = 1$ приводит к погрешности средней концентрации, которая не превышает 0,6 % при $\bar{t} > 5$, и при $\bar{t} \rightarrow +\infty$ погрешность $\varepsilon(\bar{t})$ асимптотически стремится к нулю.

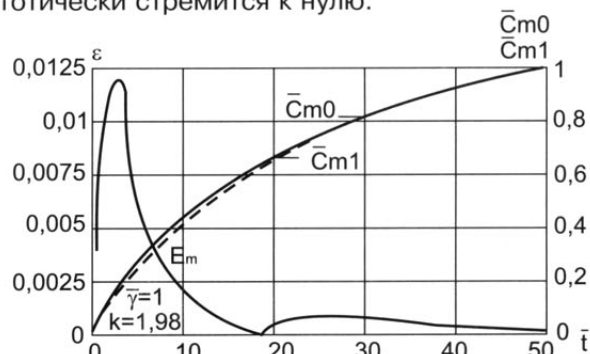


Рис. 5. Зависимости $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ и $\bar{c}_{m1}(\bar{t})$ при $k = 1,98$ (сплошная и штриховая линии соответственно) и относительной погрешности $\varepsilon(\bar{t})$

В результате исследований относительной погрешности $\varepsilon(\bar{t})$ получено, что при условии массообмена ее значения меньше, чем при постоянной концентрации агрессивной среды на поверхности тонкостенной оболочки.

2. Длительная прочность тонкостенной цилиндрической оболочки в агрессивной среде при сложном напряженном состоянии

2.1. Постановка задачи

Известно, что агрессивные среды оказывают значительное влияние на ползучесть и дли-

тельную прочность металлов и элементов конструкций из них. В работе [3] приведен подробный обзор экспериментально-теоретических исследований поведения металлов в агрессивных средах при высокой температуре. В данной работе исследуется разрушение в условиях ползучести длинной тонкостенной цилиндрической оболочки, находящейся в агрессивной окружающей среде при сложном напряженном состоянии. Влияние сложного напряженного состояния на длительную прочность оболочки будет учитываться с помощью эквивалентного напряжения σ_{e0} [5].

Далее рассматривается длительная прочность тонкостенной цилиндрической оболочки либо в условиях совместного действия растягивающей силы P и крутящего момента M – нагружение $(P + M)$, либо – растягивающей силы P и внутреннего давления q – нагружение $(P + q)$.

При нагружении $(P + M)$ в качестве эквивалентного напряжения σ_{e0} в соответствии с работой [5] принимается полусумма максимального главного напряжения σ_1 и интенсивности касательного напряжения σ_u :

$$\sigma_{e0} = \sigma_{e0} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_u) = \frac{1}{8\pi R_0 H_0} \left[P + \sqrt{P^2 + \frac{4M^2}{R_0^2}} + 2\sqrt{P^2 + \frac{3M^2}{R_0^2}} \right]. \quad (2.1)$$

При нагружении $(P + q)$ эквивалентное напряжение σ_{e0} определяется [5] как разность максимального и минимального главных напряжений ($\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$)

$$\sigma_{e0} = \sigma_1 = \max \left[\left(\frac{P}{2\pi R_0 H_0} + \frac{qR_0}{2H_0} \right); \frac{qR_0}{H_0} \right]. \quad (2.2)$$

Рассмотрим общий метод анализа влияния компонентов окружающей среды на длительную прочность тонкостенной цилиндрической оболочки при тех же допущениях на геометрические параметры оболочки ($L \gg R_0, R_0 \gg H_0$) и действие агрессивной среды, что и ранее. Вследствие этого опять рассматривается только часть оболочки при $0 \leq x \leq 0,5 H_0$.

Для анализа влияния окружающей среды на длительную прочность напряженной оболочки с дополнительным учетом фронта разрушения используется кинетическая теория Ю.Н. Работнова [1] с двумя зависящими от времени t струк-

турными параметрами – поврежденностью $\omega(x, t)$ и концентрацией компонентов окружающей среды внутри оболочки $c(x, t)$. Параметр $\omega(x, t)$ является возрастающей функцией времени t . В связи с диффузией компонентов среды в материал оболочки, ослабляющей ее прочностные свойства, поврежденность $\omega(x, t)$ зависит также от координаты x , причем эта зависимость монотонно убывающая. Принимая в качестве условия разрушения $\omega(x, t) = 1$, получаем, что в некоторый момент времени нарушается сплошность оболочки на поверхности. При $t > t_1$ происходит движение фронта разрушения вглубь оболочки.

Введем координату фронта разрушения $X(t)$, которая определяется из условия $\omega(X(t), t) = 1$. При $0 \leq t \leq t_1, X(t) = 0$, а при $t > t_1$ координата является возрастающей функцией времени t , подлежащей определению. Появление фронта разрушения приводит к уменьшению площади поперечного сечения. Поскольку внешние нагрузки P, M, q не зависят от времени, эквивалентное напряжение σ_e с течением времени t возрастает и становится больше исходного номинального напряжения σ_{e0} , вычисляемого согласно (2.1) или (2.2).

Концентрация $c(x, t)$ в произвольный момент времени определяется из решения уравнения диффузии (1.1). Для простоты примем, что в начальный момент времени концентрация во всем сечении равна нулю:

$$c(x, 0) = 0. \quad (2.3)$$

В качестве граничного условия, соответствующего срединной поверхности оболочки ($x = 0,5 H_0$), из условия симметрии принимается уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0,5 H_0, t) = 0. \quad (2.4)$$

В качестве второго граничного условия ($x = X(t)$) рассматривается постоянное значение концентрации на поверхности оболочки:

$$c(X(t), t) = c_0. \quad (2.5)$$

2.2. Параметр поврежденности материала

Рассмотрим кинетическое уравнение для поврежденности в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} &= A \cdot \left[\frac{\sigma_e(t)}{1 - \omega(x, t)} \right]^n \cdot f(c(x, t)), \\ \sigma_e(t) &= \sigma_{e0} \left[1 - \frac{2X(t)}{H_0} \right]^{-1}, \quad \omega(x, 0) \equiv 0, \quad \omega(X(t), t) \equiv 1, \\ X(t) &\leq x \leq 0, 5H_0, \quad 0 < t \leq t^*, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где A и n – константы.

Функция $f(c(x, t))$ учитывает влияние диффузионного процесса на длительную прочность. В качестве времени разрушения оболочки t^* примем значение t , при котором эквивалентное напряжение $\sigma_e(t^*)$ становится равным пределу кратковременной прочности σ_b материала оболочки при соответствующей температуре (при этом предполагается, что величина σ_b не зависит от уровня концентрации агрессивной среды в оболочке).

При использовании безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2x}{H_0}, \quad \bar{X} = \frac{2X}{H_0}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}, \quad \bar{\sigma}_{e0} = \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_b}, \\ \bar{t} &= \frac{48D}{H_0^2} \cdot t, \quad \bar{A} = A \cdot \sigma_b^n \cdot \frac{H_0^2}{48D} \end{aligned} \quad (2.7)$$

уравнение (2.6) примет вид:

$$\frac{\partial \omega(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \bar{A} \cdot \left[\bar{\sigma}_{e0} (1 - \bar{X}(\bar{t}))^{-1} (1 - \omega(\bar{x}, \bar{t}))^{-1} \right]^n \cdot f(\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})). \quad (2.8)$$

При отсутствии агрессивной окружающей среды выполняется условие $f(\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})) = f(0) \equiv 1$, параметр поврежденности в этом случае зависит только от времени $\bar{t}$, и уравнение (2.8) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\omega(\bar{t})}{d\bar{t}} = \bar{A} \cdot \left[\frac{\bar{\sigma}_{e0}}{1 - \omega(\bar{t})} \right]^n.$$

В результате решения уравнения можно получить время разрушения при отсутствии агрессивной окружающей среды (например, в вакууме):

$$\bar{t}_{00}^* = ((n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{e0})^n)^{-1}.$$

Вследствие распространения фронта разрушения уменьшение поперечного сечения оболочки приводит к возрастанию осевых напряжений и, как следствие, к увеличению эквивалентных напряжений:

$$\bar{\sigma}_e(\bar{t}) = \bar{\sigma}_{e0} / (1 - \bar{X}(\bar{t})) > \bar{\sigma}_e(\bar{t} = 0) = \bar{\sigma}_{e0}.$$

Интегрируя (2.8), получаем:

$$\begin{aligned} \Omega(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{[1 - (1 - \omega(\bar{x}, \bar{t}))^{(n+1)}]}{(n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{e0})^n} = \\ &= \int_0^{\bar{t}} [1 - \bar{X}(\bar{t}')]^{-n} \cdot f(\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}')) d\bar{t}'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В выражении (2.9) вместо параметра поврежденности $\omega(\bar{x}, \bar{t})$ введен новый параметр поврежденности $\Omega(\bar{x}, \bar{t})$, который возрастает во времени от нулевого значения при $\bar{t} = 0$ до предельного значения $((n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{e0})^n)^{-1}$, характеризующего разрушение материала. Согласно (2.6) и (2.7) разрушение оболочки наступает при достижении координатой фронта разрушения значения $\bar{X}^* = (1 - \bar{\sigma}_{e0})$.

2.3. Первая стадия разрушения

Весь процесс разрушения проходит в две или три стадии. Первая стадия $0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1$ – скрытое разрушение. В течение второй стадии ($\bar{t}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_2$) в оболочке развиваются два фронта – фронт разрушения $\bar{X}(\bar{t})$ и диффузионный фронт $\bar{l}(\bar{t})$. Вследствие наличия фронта разрушения $\bar{X}(\bar{t})$ эквивалентное напряжение возрастает во времени по формуле $\bar{\sigma}_e(\bar{t}) = \bar{\sigma}_{e0} / (1 - \bar{X}(\bar{t}))$. Если во второй стадии процесса величина $\bar{t}$ достигает значения $\bar{t}^*$, т.е. фронт разрушения $\bar{X}(\bar{t})$ достигнет значения $\bar{X}^*$ раньше, чем диффузионный фронт $\bar{l}(\bar{t})$ – середины сечения оболочки, то ее разрушение наступает на второй стадии. В противном случае время окончания второй стадии $\bar{t}_2$ характеризуется следующими условиями:

$$\bar{l}(\bar{t}) = 1, \quad \bar{t}_2 < \bar{t}^*.$$

В этом случае вторая стадия процесса переходит в третью стадию ($\bar{t}_2 < \bar{t} < \bar{t}^*$), в ходе которой фронт разрушения распространяется в оболочке при ненулевой концентрации $\bar{c}$ во всем сечении. Если $\bar{t}_1 \geq \bar{t}_0$, то первая стадия разрушения переходит сразу в третью стадию.

В течение первой стадии разрушения ($0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1$) параметр поврежденности монотонно возрастает, а координата фронта разрушения $\bar{X}(\bar{t}) \equiv 0$. Из выражения (2.9) следует,

что разрушение материала наступает в том месте, где $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ максимальна. Из решения уравнения диффузии очевидно, что максимальное значение концентрации компонентов внутри тонкостенной оболочки достигается при $\bar{x} = 0$. Определяя из уравнения (1.1) при учете условий (1.2)–(1.3) функцию времени $\bar{c}(0, \bar{t})$ и подставляя ее в выражение (2.8) при $\bar{X}(\bar{t}) \equiv 0$, получаем выражение для вычисления времени первой стадии разрушения $\bar{t}_1$:

$$\frac{1}{(n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{e0})^n} = \int_0^{\bar{t}_1} f(\bar{c}(0, \bar{t})) d\bar{t}. \quad (2.10)$$

Точное и приближенное решения уравнения диффузии в полярных координатах подробно рассмотрены в работе [4]. Приближенное решение задачи (1.2), (1.3) в декартовых координатах при задании зависимости концентрации $\bar{c}$ от $\bar{x}$ в виде параболы k -ой степени имеет вид (1.5), (1.6). Неизвестные зависимости координаты диффузионного фронта $\bar{l}(\bar{t})$ и значения концентрации $B(\bar{t}) = \bar{c}(1, \bar{t})$ от времени $\bar{t}$ определяются из интегрального удовлетворения уравнению диффузии (1.7).

Решение (1.5), (1.6), (1.8) означает, что с обеих поверхностей оболочки развиваются диффузионные фронты $\bar{l}(\bar{t}) = \sqrt{\bar{t}/\bar{t}_0}$, при $\bar{t} = \bar{t}_0$ эти фронты смыкаются и при $\bar{t} > \bar{t}_0$ концентрация $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ в любой точке оболочки возрастает во времени $\bar{t}$ по экспоненциальному закону с отрицательным аргументом.

Время $\bar{t}_1$ первой стадии разрушения вычисляется по формуле (2.10):

$$\bar{t}_1 = [(n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{e0})^n f(\bar{c} = 1)]^{-1}.$$

2.4. Вторая стадия разрушения

Как только параметр поврежденности $\omega(0, \bar{t})$ при $\bar{t} = \bar{t}_1$ достигает значения, равного 1, то при $\bar{t} > \bar{t}_1$ поверхностный слой оболочки начинает разрушаться и возникает фронт разрушения, постепенно перемещающийся от внутренней поверхности оболочки к срединной поверхности. Поскольку $\omega(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t}) \equiv 1$,

$$\Omega(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t}) \equiv [(n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{e0})^n]^{-1} \equiv \text{const}.$$

Отсюда

$$\left. \frac{d\Omega(\bar{x}, \bar{t})}{d\bar{t}} \right|_{\bar{x}=\bar{X}(\bar{t})} = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \right]_{\bar{x}=\bar{X}(\bar{t})} = 0. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.9) в (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t})}{\partial \bar{t}} &= [1 - \bar{X}(\bar{t})]^{-n} \cdot f(\bar{c}(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t})), \\ -\frac{\partial \Omega(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t})}{\partial \bar{x}} &= I(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \psi d\bar{t}', \end{aligned}$$

$$\psi = [1 - \bar{X}(\bar{t})]^{-n} \cdot \frac{df(\bar{c}(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t}))}{d\bar{c}} \cdot \frac{\partial \bar{c}(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t})}{\partial \bar{x}}, \quad (2.12)$$

$$\dot{\bar{X}} = \frac{d\bar{X}}{d\bar{t}} = [1 - \bar{X}(\bar{t})]^{-n} \cdot f(\bar{c}(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t})) / I(\bar{t}),$$

$$\bar{X}(\bar{t} = \bar{t}_1) = 0. \quad (2.13)$$

Представим зависимость концентрации $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ от радиальной координаты $\bar{x}$ в следующем виде:

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} \left[\frac{\bar{l}(\bar{t}) - \bar{x}}{\bar{l}(\bar{t}) - \bar{X}(\bar{t})} \right]^k & \bar{X}(\bar{t}) \leq \bar{x} \leq \bar{l}(\bar{t}) \\ 0 & \bar{l}(\bar{t}) < \bar{x} \leq 1 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Взаимную зависимость координат двух фронтов $\bar{l}(\bar{t})$ и $\bar{X}(\bar{t})$ определим из интегрального удовлетворения функции (2.14) уравнению диффузии:

$$\int_{\bar{x}(\bar{t})}^1 \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} - 12 \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x} = 0. \quad (2.15)$$

Вычислим значения производных $\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2}$ и $\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{t}}$ при $\bar{X}(\bar{t}) \leq \bar{x} \leq \bar{l}(\bar{t})$ и подставим их в выражение (2.15), в результате чего получим:

$$\frac{12k(\dot{\bar{l}}(\bar{t}) - \dot{\bar{X}}(\bar{t}))}{k+1} - 12\dot{\bar{l}}(\bar{t}) + \frac{k}{\bar{l}(\bar{t}) - \bar{X}(\bar{t})} = 0,$$

$$\bar{X}(\bar{t}_1) = 0, \quad \bar{l}(\bar{t}_1) = \sqrt{\frac{\bar{t}_1 k (k+1)}{6}}. \quad (2.16)$$

Исследование второй стадии представляется собой совместное решение системы уравнений (2.13), (2.16). Интеграл $I(\bar{t}_1)$ в уравнении (2.12) применительно ко второй стадии разрушения можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$I(\bar{t}) = I_1(\bar{t}_1) + I_2(\bar{t}),$$

$$I_1(\bar{t}_1) = \int_0^{\bar{t}_1} \psi d\bar{t}', \quad I_2(\bar{t}) = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}} \psi d\bar{t}'. \quad (2.17)$$

При вычислении $I(\bar{t}_1)$ использованы формулы (1.5), (1.7), при вычислении $I_2(\bar{t})$ – (2.14). Подставляя (2.14), (2.17) в (2.13), получаем систему двух обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (2.13), (2.16) относительно двух функций $\bar{X}(\bar{t})$ и $\bar{B}(\bar{t})$. Если $\bar{t}^* > \bar{t}_2$, то вторая стадия переходит в третью стадию длительного разрушения.

2.5. Третья стадия разрушения

Переходим к исследованию третьей стадии разрушения оболочки, при этом $\bar{t}_2 < \bar{t} < \bar{t}^*$. Концентрации $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ в центре сечения оболочки обозначается через $B(\bar{t})$, при этом зависимость $\bar{c}$ от $\bar{x}$ в виде параболы k -ой степени принимает следующий вид:

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + (1 - B(\bar{t})) \cdot \left[\frac{1 - \bar{x}}{1 - \bar{X}(\bar{t})} \right]^k. \quad (2.18)$$

Для получения связи между двумя функциями времени $B(\bar{t})$ и $\bar{X}(\bar{t})$ удовлетворим уравнение диффузии интегрально (2.15). С этой целью вычислим значения производных $\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2}$ и $\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{t}}$ и подставим их в выражение (2.15). В результате получим:

$$12\dot{B}(\bar{t})(1 - \bar{X}(\bar{t})^2 + (k + 1)(B(\bar{t}) - 1) + 12(1 - B(\bar{t}))(1 - \bar{X}(\bar{t}))\dot{\bar{X}}(\bar{t}) = 0,$$

откуда

$$\frac{dB(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{(1 - B(\bar{t}))}{12(1 - \bar{X}(\bar{t}))^2} \left[k + 1 - 12(1 - \bar{X}(\bar{t}))\dot{\bar{X}}(\bar{t}) \right],$$

$$B(\bar{t}_2) = 0. \quad (2.19)$$

Исследование третьей стадии сводится к решению системы двух интегро-дифференциальных уравнений (2.13) и (2.19) относительно двух функций $\bar{X}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$. Интеграл $I(\bar{t})$ в уравнении (2.12) представим в виде суммы трех интегралов:

$$I(\bar{t}) = I_1(\bar{t}_1) + I_2(\bar{t}_2) + I_3(\bar{t}),$$

$$I_3(\bar{t}) = k \cdot \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}} \left[1 - \bar{X}(\bar{t}') \right]^n \cdot \frac{d\bar{f}(\bar{c}(\bar{X}(\bar{t}), \bar{t}'))}{d\bar{c}} \times$$

$$\times [1 - B(\bar{t}')] \frac{[1 - \bar{X}(\bar{t})]^{k-1}}{[1 - \bar{X}(\bar{t}')]^k} d\bar{t}'. \quad (2.20)$$

Решение системы (2.13), (2.19) с учетом (2.17), (2.20) проводится вплоть до значения $\bar{X}(\bar{t}^*) = \bar{X}^*$.

Предположим, что время $\bar{t}_1$ начала разрушения оболочки с поверхности не меньше, чем время достижения диффузионным фронтом середины этой оболочки $\bar{t}_0(\bar{t}_1 \geq \bar{t}_0)$. В этом случае первая стадия сразу переходит в третью стадию. Согласно (2.14) концентрация $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ в середине сечения тонкостенной оболочки в конце первой стадии принимает следующее значение:

$$B_0 = 1 - \exp\left(-\frac{(k+1)(\bar{t}_1 - \bar{t}_0)}{12}\right). \quad (2.21)$$

Интеграл $I(\bar{t})$ в правой части уравнения (2.11) представим в виде суммы трех интегралов:

$$I(\bar{t}) = \int_0^1 \psi \cdot d\bar{t}' + \int_1^{\bar{t}_1} \psi \cdot d\bar{t}' + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}} \psi \cdot d\bar{t}' =$$

$$= I_4 + I_5 + I_6(\bar{t}). \quad (2.22)$$

В первом слагаемом в качестве функции $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$ используется уравнение (1.5) с учетом (1.8), во втором слагаемом – (1.6) с учетом (1.8), в третьем – (2.18).

Постепенное разрушение оболочки на третьей стадии в этом случае описывается системой (2.13), (2.19) двух обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений относительно двух функций времени $\bar{X}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$, начальные условия для $\bar{X}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ при $\bar{t} = \bar{t}_1$ имеют вид $\bar{X}(\bar{t}_1) = 0$ и $B(\bar{t}_1) = B_0$ (2.21), интеграл $I(\bar{t})$ в уравнении (2.12) определяется с помощью (2.22). Решение системы (2.13), (2.19) проводится вплоть до значения $\bar{X}(\bar{t}^*) = \bar{X}^* = (1 - \bar{c}_{e0})$, при этом определяется соответствующее время полного разрушения оболочки $\bar{t}^*$.

2.6. Решение задачи без введения фронта разрушения

Рассмотрим приближенное решение задачи без введения фронта разрушения. При этом используется интегральный способ учета вли-

яния концентрации компонентов среды, при котором процесс накопления поврежденности в материале зависит от среднего (по площади поперечного сечения) уровня концентрации $\bar{c}$ в оболочке. Решение уравнения диффузии интегрально осредняется по поперечному сечению (1.9), после чего исследование длительной прочности сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения относительно параметра поврежденности $\omega(\bar{t})$; в качестве условия разрушения как обычно принимается $\omega(\bar{t}^*) = 1$.

Выражение для $\bar{c}_m(\bar{t})$ при использовании формул (1.5), (1.6), (1.8) принимает вид (1.10). Из (1.10) следует, что функция $\bar{c}_m(\bar{t})$ и ее производная непрерывны при $\bar{t} = \bar{t}_0$. Функция $\bar{c}_m(\bar{t})$ в (1.10) является возрастающей и имеет горизонтальную асимптоту $\bar{c}_m(\bar{t}) = 1$.

Уравнение (2.8) в случае отсутствия фронта разрушения принимает следующий вид:

$$\frac{d\omega(\bar{t})}{d\bar{t}} = \bar{A} \cdot \left(\frac{\bar{\sigma}_{\infty}}{1-\omega(\bar{t})} \right)^n \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})),$$

$$\omega(0) = 0, \omega(\bar{t}^*) = 1, \quad (2.23)$$

где $f(\bar{c}_m)$ – возрастающая функция, удовлетворяющая равенству $f(\bar{c}_m = 0) = 1$.

Интегрируя (2.23), получаем уравнение для определения времени разрушения $\bar{t}^*$:

$$\bar{t}_{\infty}^* = \left[(n+1)\bar{A}(\bar{\sigma}_{\infty})^n \right]^{-1} = \int_0^{\bar{t}^*} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}, \quad (2.24)$$

где $\bar{t}_{\infty}^*$ – время разрушения тонкостенной оболочки при отсутствии агрессивной окружающей среды.

В качестве зависимости $f(\bar{c}_m)$ можно рассматривать линейную функцию с одной константой:

$$f(\bar{c}_m) = 1 + b \cdot \bar{c}_m. \quad (2.25)$$

Подставляя (1.10) в (2.25) и затем – в (2.24), получаем время разрушения $\bar{t}^*$ оболочки с учетом влияния агрессивной окружающей среды:

$$\bar{t}_{\infty}^* = \begin{cases} \bar{t}^* + \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{(\bar{t}^*)^3 k}{6(k+1)}}, & \bar{t}^* \leq \bar{t}_0, \\ \bar{t}^* (1+b) - \frac{2(3k+1)b}{k(k+1)^2} - \frac{12bk}{(k+1)^2} \left[1 - \exp\left[\frac{(k+1)(\bar{t}^* - \bar{t}_0)}{12} \right] \right], & \bar{t}^* > \bar{t}_0. \end{cases}$$

Заключение

Разработанный приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на разделении рассматриваемой области на невозмущенную и возмущенную части и на определении движения границы диффузионного фронта между ними, показал достаточно высокую точность и является удобным для анализа.

Полученные решения ряда задач могут быть использованы при прогнозировании долговечности работы цилиндрических элементов конструкций, применяемых в условиях сложного напряженного состояния в агрессивной окружающей среде. При этом влияние сложного напряженного состояния на длительную прочность учитывается с помощью эквивалентного напряжения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №05-01-00295) и фонда INTAS (проект №03-51-6046).

Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962. – 768 с.
3. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 178 с.
4. Локощенко А.М., Платонов Д.О. Расчет длительной прочности с использованием приближенного уравнения диффузии // Физико-химическая механика материалов. 2003. №1. С.15–21.
5. Локощенко А.М., Назаров В.В., Платонов Д.О., Шестериков С.А. Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. №2. С.139–149.