

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ*

К.А. Агахи, **В.Н. Кузнецов**, А.М. Локощенко,
В.К. Ковальков, Л.В. Фомин

В статье рассматривается построение аналитического выражения для описания II и III стадий семейства кривых ползучести с учетом зависимости параметров аппроксимации от уровня напряжений. Предложены аналитические представления этих параметров как функций напряжения. Разработана методика соответствующей обработки экспериментальных данных и приведены результаты ее применения. Получено хорошее соответствие расчетных величин результатам испытаний.

Ключевые слова: ползучесть, математическая модель, аппроксимационный метод, анализ экспериментальных данных.

Введение

Все существующие материалы при различных температурах обладают свойствами ползучести в той или иной мере. Металлы, как и все конструкционные материалы, проявляют свойства ползучести в определенном диапазоне напряжений и температур. При этом пренебрежение учетом явления ползучести может привести к существенным ошибкам в оценке деформируемости и работоспособности исследуемых объектов.

В общем случае зависимость деформации ползучести p от времени t (кривая ползучести) при постоянном растягивающем напряжении состоит из трех последовательных стадий: I стадии с постепенно уменьшающейся скоростью ползучести; II стадии с постоянной (минимальной) скоростью ползучести; III стадии с ускоряющейся ползучестью, предшествующей разрушению, когда наблюдается деформация с возрастающей скоростью. В зависимости от уровня напряжения соотношение между длительностями этих стадий может сильно различаться. Так, при достаточно малых напряжениях кривая $p(t)$, как правило, имеет достаточно протяженную I стадию (неустановившаяся ползучесть). На кривых ползучести, соответствующих достаточно большим напряжениям, могут

вообще отсутствовать либо I стадия, либо I и II стадии.

При описании различных видов кривых ползучести необходимо сочетать характерные особенности процесса ползучести с простотой используемых уравнений.

В представленной статье основное внимание уделяется моделированию процесса ползучести, характеризуемого установившейся и ускоряющейся стадиями. Как правило, при описании таких процессов применяется кинетическая теория ползучести, основанная на использовании введенного Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым параметра поврежденности материала [1–3], который должен определяться в ходе специальных исследований структуры материала. Проведение опытов по определению поврежденности до сих пор представляет собой трудно решаемую задачу.

В отличие от такого подхода в данной статье процесс ползучести, развивающийся вплоть до разрушения, предлагается моделировать без использования параметра поврежденности. Целью настоящей работы является разработка методики аналитического описания семейства кривых ползучести, адекватного известным экспериментальным данным, и нахождения констант, содержащихся в определяющем уравнении.

* Работа выполнена при финансовой поддержке проектов РФФИ (№ 11-08-01015, 11-08-00007).

Постановка задачи

Задача состоит в построении аппроксимирующих функций для семейства кривых ползучести данного материала, зависящих от времени и содержащих материальные параметры. Кривые, входящие в семейство, зависят от уровня напряжения, для них принимается один и тот же вид аппроксимирующей функции. Материальные параметры также зависят от напряжения. Необходимо определить аналитические зависимости параметров, обеспечивающие достаточно хорошее соответствие экспериментальным данным.

Моделирование стадии ускоряющейся ползучести

Рассмотрим кривую ползучести, характеризующую процесс разупрочнения, описываемую только III (ускоряющейся) стадией. В этом случае зависимость $p(t)$ можно аппроксимировать следующим выражением:

$$p(t) = A_0 t + B_0 + \frac{C_0}{(t_* - t)^r},$$

где параметры аппроксимации A_0, B_0, C_0, r, t_* считаются зависящими от напряжения σ и определяются для каждой экспериментальной кривой ползучести.

Таким образом, определяют значения параметров аппроксимации в конкретных точках при $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots$, а затем получают зависимости $A_0 = A_0(\sigma), B_0 = B_0(\sigma), C_0 = \dots$ этих параметров от σ как непрерывные функции.

Здесь используется аппроксимация кривых ползучести, причем, очевидно, что возможны различные способы ее реализации. При достаточно точной аппроксимации получаемые кривые ползучести по существу будут слабо зависеть от конкретного вида аппроксимации. Это позволяет выбрать аппроксимацию из соображения простоты и удобства для перевода графических данных в аналитический вид.

Моделирование кривой ползучести на установившейся и ускоряющейся стадиях

Рассмотрим аппроксимацию кривых ползучести для II и III стадий. Согласно работе [4] примем, что кривая ползучести $p = p(t, \sigma)$ может быть аппроксимирована при условии замены I стадии – стадии неустановившейся

ползучести – прямой линией, рассматриваемой как продолжение участка установившейся ползучести [2], следующей зависимостью:

$$p(t) = \begin{cases} At + B & \text{при } 0 \leq t \leq t_s, \\ \frac{C}{(t_* - t)^k} + b & \text{при } t_s \leq t \leq t_{\max}, \end{cases} \quad (1)$$

где A, B, t_*, C, k, b – материальные параметры, зависящие от σ . Значение $t_s(\sigma)$ характеризует момент окончания II и начала III стадии, значение $t_{\max}(\sigma)$ равно фактическому времени разрушения образца при напряжении σ .

Различие вида кривых ползучести на II и III стадиях можно интерпретировать с помощью рассмотрения поврежденности материала. В отличие от работы [2] предположим, что поврежденность материала появляется не во время нагружения образца ($t = 0$), а в момент t_s в начале стадии прогрессирующей ползучести (III стадии), предшествующей разрушению. Появление поврежденности обуславливает нелинейный характер кривой ползучести на этой стадии. Трудно объяснить постоянную скорость \dot{p} на II стадии, допуская, что в это время всегда имеет место согласованный с данным условием процесс возникновения и роста микротрещин. Более естественно предположить, что на II стадии количество таких микротрещин пренебрежимо мало.

Основным фактором, определяющим установившуюся стадию ползучести, является баланс процессов упрочнения, возникшего на I стадии, и разупрочнения, появившегося на II стадии, что обусловлено движением дислокаций, а не образованием микропор [5].

Как отмечает Ю.Н. Работнов [6], причиной образования III стадии кривой ползучести является тот факт, что ползучесть сопровождается образованием микротрещин и микрополостей на границах кристаллических зерен. В результате эффективная площадь сечения образца, воспринимающая нагрузку, уменьшается, и скорость ползучести увеличивается. Одновременно с этим увеличивается скорость образования новых микротрещин и роста уже имеющихся; наконец, в каком-то месте образца микротрещины сливаются, образуя большую трещину разрушения. В соответствии с принятой новой гипотезой поврежденность ω существует только на III стадии кривой ползучести, а на I и II стадиях поврежденность тождественно равна нулю.

Методика определения констант в уравнениях

При аппроксимации кривой ползучести со II и III стадиями в соответствии с уравнениями (1) должны быть выполнены следующие четыре условия: непрерывность и гладкость кривой $p(t)$ в точке t_s ; равенство деформации и скорости ползучести в этой точке их известным экспериментальным значениям:

$$p(t)|_{(t_s-0)} = p(t)|_{(t_s+0)} = p_s,$$

$$\dot{p}(t)|_{(t_s-0)} = \dot{p}(t)|_{(t_s+0)} = A.$$

Для определения шести параметров аппроксимации уравнения (1) кроме вышеуказанных условий в точке t_s используем еще два: значения функции в точке реального разрушения $p(t_{max}) = p_{max}$ и в некоторой точке внутри интервала $t_s < t_{cp} < t_{max}$ $p(t_{cp}) = p_{cp}$ (эти данные также известны из эксперимента).

В итоге, для каждой кривой ползучести, соответствующей определенному значению напряжения σ , получаем систему из шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными A, B, t_*, C, k, b :

$$\begin{cases} p_s = At_s + B = \frac{C}{(t_* - t_s)^k} + b, \\ \dot{p}_s = A = Ck(t_* - t_s)^{-(k+1)}, \\ p_{max} = \frac{C}{(t_* - t_{max})^k} + b, \\ p_{cp} = \frac{C}{(t_* - t_{cp})^k} + b. \end{cases} \quad (2)$$

Во многих случаях системы уравнений такой природы относятся к классу обратных (некорректных) задач [7].

Предлагается следующая итерационная методика решения данной существенно нелинейной системы уравнений. Преобразуем систему уравнений (2) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta p_1 = p_{max} - p_s = C[(\Delta t_{max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}], \\ \Delta p_2 = p_{cp} - p_s = C[(\Delta t_{cp})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}], \\ A = Ck\Delta t_s^{-(k+1)}, \quad \Delta t_s = t_* - t_s, \quad \Delta t_{cp} = t_* - t_{cp}, \\ \Delta t_{max} = t_* - t_{max}. \end{cases} \quad (3)$$

Далее получаем:

$$\begin{cases} \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{(\Delta t_{max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}{(\Delta t_{cp})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}, & (4) \\ C = \Delta p_1((\Delta t_{max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k})^{-1}, & (5) \\ A = Ck(\Delta t_s)^{-(k+1)}. & (6) \end{cases}$$

В этой системе величины $\Delta p_1 = p_{max} - p_s$ и $\Delta p_2 = p_{cp} - p_s$ вычисляются по известным из эксперимента и аппроксимации данным. Величины t_s, t_{max}, t_{cp} также известны из эксперимента. Константа A характеризуется тангенсом угла наклона кривой ползучести на II (линейном участке) стадии.

Таким образом, в полученной системе из трех уравнений (4)–(6) неизвестными величинами являются C, k и t_* ($\Delta t_s, \Delta t_{cp}, \Delta t_{max}$ выражаются через t_* согласно (3)). Для ее решения используем метод итераций. Для нахождения k составим невязку $f(k)$ с помощью уравнения (4):

$$f(k) = \frac{(\Delta t_{max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}{(\Delta t_{cp})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}} - \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2}.$$

Зададим нулевое приближение $t_* = t_*^{(0)}$ и, варьируя значение k , будем искать такое значение k , которое удовлетворяет условию $f(k)=0$. Данное значение k и будет решением системы в нулевом приближении. Далее из уравнения (5) вычисляется значение C . Найденные таким образом значения k и C используются для нахождения величины первого приближения $t_*^{(1)}$, на основе рекуррентной формулы, полученной из уравнения (6):

$$t_*^{(1)} = t_s + \left(\frac{Ck}{A}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Далее весь приведенный алгоритм повторяется с использованием первого приближения $t_*^{(1)}$ и т.д.

Количество итераций по данной методике, как правильно, определяется условием, что погрешность аппроксимации не превышает погрешность эксперимента в определении значения функции и ее производной в начале III стадии. Погрешность аппроксимации контролируется среднеквадратичным отклонением аппроксимации относительно эксперимента на III стадии кривой ползучести.

Описание известных экспериментальных данных

В качестве примера применения предложенного метода аппроксимации семейства кривых

ниже использованы результаты испытаний медных цилиндрических образцов при температуре 400 °С и напряжениях $\sigma = 40, 50, 60, 70$ МПа [8]. Для семейства экспериментальных кривых ползучести (см. рисунок) в соответствии с решением системы уравнений (2) были найдены параметры аппроксимации A, B, t_*, C, k, b и построены аппроксимации согласно уравнению (1) II и III стадий этих кривых ползучести (с напряжениями $\sigma = 40, 50, 60, 70$ МПа. Параметры $t_s, t_{cp}, t_{max}, P_s, P_{cp}, P_{max}$, взятые из экспериментальных кривых, представлены в табл. 1; параметры аппроксимации – в табл. 2. Результаты аппроксимаций этих кривых показаны на рисунке.

На основе обработки значений параметров аппроксимации II и III стадий кривых ползучести были построены следующие аналитические зависимости параметров аппроксимаций от напряжения σ :

$$A(\sigma) = a_1 \exp(a_2 \sigma) + a_3;$$

$$a_1 = 3,305 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}, \quad a_2 = 0,081 \text{ МПа}^{-1},$$

$$a_3 = 1,407 \cdot 10^{-4} \text{ ч}^{-1};$$

$$B(\sigma) = B_1(\sigma - B_2)^3 + B_3; \quad B_1 = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-3},$$

$$B_2 = 55 \text{ МПа}, \quad B_3 = 0,0165;$$

$$t_*(\sigma) = \beta_1 \exp(-\beta_2 \sigma) - \beta_3; \quad \beta_1 = 602,62 \text{ ч},$$

$$\beta_2 = 0,04 \text{ МПа}^{-1}, \quad \beta_3 = 21,64 \text{ ч};$$

$$C(\sigma) = C_1 \exp(-C_2 \sigma) + C_3 \sigma - C_4;$$

$$C_1 = 486143 \text{ ч}^k, \quad C_2 = 0,1823 \text{ МПа}^{-1},$$

$$C_3 = 0,43325 \text{ ч}^k \cdot \text{МПа}^{-1}, \quad C_4 = 31,2443 \text{ ч}^k;$$

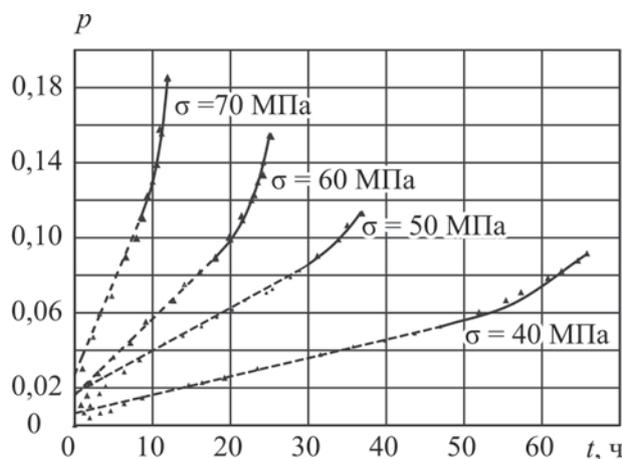
$$k(\sigma) = k_1 - k_2 \sigma; \quad k_1 = 4,05, \quad k_2 = 0,04 \text{ МПа}^{-1};$$

$$b(\sigma) = b_1 - b_2 \exp(-b_3 \sigma); \quad b_1 = 0,069,$$

$$b_2 = 0,273, \quad b_3 = 0,05 \text{ МПа}^{-1}.$$

Здесь все входящие константы характеризуют механические свойства материала независимо от напряжения σ .

Результаты, представленные на рисунке, в табл. 1 и 2, характеризуют хорошее соответствие численных расчетов результатам испытаний.



Семейство кривых ползучести [8] при различных уровнях напряжений и $T = 400$ °С:
 - - - - - аппроксимация I и II стадий;
 — — — — — аппроксимация III стадии;
 ▲ — экспериментальные точки

Таблица 1

Экспериментальные значения параметров

$\sigma, \text{ МПа}$	$t_s, \text{ ч}$	$t_{cp}, \text{ ч}$	$t_{max}, \text{ ч}$	P_s	P_{cp}	P_{max}
40	46,92	56,35	65,78	0,0525	0,0675	0,0913
				0,0525	0,0649	0,0913
50	28,65	33,17	36,73	0,0823	0,0969	0,1135
				0,0823	0,0969	0,1135
60	18,08	21,54	25,00	0,0896	0,1104	0,1542
				0,0896	0,1090	0,1542
70	8,462	10,00	11,92	0,1104	0,1292	0,1844
				0,1104	0,1295	0,1844

Примечание. Для p_s, P_{cp}, P_{max} над чертой указаны экспериментальные значения, под чертой – расчетные значения решения системы уравнений (2).

Значения параметров аппроксимации II и III стадий кривых ползучести как функций напряжения σ

σ , МПа	$A \cdot 10^3$, ч^{-1}	$B \cdot 10^2$	t_* , ч	t_* , ч^k	k	b
40	<u>0,981</u>	<u>0,646</u>	<u>100,0</u>	<u>286</u>	<u>2,4</u>	<u>0,031</u>
	0,984	0,638	100,0	317,1	2,45	0,032
50	<u>2,278</u>	<u>1,702</u>	<u>60,0</u>	<u>49,8</u>	<u>2,1</u>	<u>0,046</u>
	2,037	1,612	59,9	43,9	2,05	0,046
60	<u>4,063</u>	<u>1,615</u>	<u>33,0</u>	<u>3,39</u>	<u>1,7</u>	<u>0,055</u>
	4,405	1,688	33,0	3,39	1,65	0,055
70	<u>9,830</u>	<u>2,724</u>	<u>15,0</u>	<u>0,47</u>	<u>1,2</u>	<u>0,060</u>
	9,725	2,662	15,0	0,47	1,25	0,060

Примечание. Над чертой указаны значения параметров аппроксимации, вычисленные на основе решения системы уравнений (2), под чертой – значения параметров аппроксимации, вычисленные на основе их аналитических зависимостей от σ .

Заключение

На основе аппроксимационного метода построено аналитическое выражение деформации ползучести для II и III стадий кривых ползучести. Получены аналитические зависимости параметров аппроксимации от уровня напряжения. Применение предложенного соотношения при описании известных опытных данных показало хорошее соответствие результатов расчетов экспериментальным данным.

Список литературы

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
3. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1991. – 196 с.
4. Моделирование процесса ползучести с учетом стадии предразрушения и идентификация модели / К.А. Агахи, Ю.Г. Басалов, В.Н. Кузнецов, Л.В. Фомин // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2009. № 2(19). С. 243–247.
5. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 944 с.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. – 744 с.
7. Гончаровский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 335 с.
8. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: МГИУ, 2007. – 264 с.

Материал поступил в редакцию 27.12.2010

Агахи Камилла Абдул Гусейн кызы

E-mail: kamilla@imec.msu.ru
Тел. +7 (495) 939-20-77

Кандидат физико-математических наук, доцент. И.о. заведующего лабораторией НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела: пластичность, реология; биомеханика. Автор 61 научной публикации, 3 патентов и 12 авторских свидетельств на изобретение.

КУЗНЕЦОВ Владимир Николаевич

Доктор физико-математических наук, доцент. Заведующий лабораторией НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела, биомеханика. Автор более 100 научных публикаций, 4 патентов и 15 авторских свидетельств на изобретение.

**ЛОКОЩЕНКО
Александр
Михайлович**

E-mail: loko@imec.msu.ru
Тел. +7 (495) 939-53-08

Доктор физико-математических наук, профессор. Заместитель директора НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела. Автор более 200 научных публикаций.

**КОВАЛЬКОВ
Валерий
Константинович**

E-mail: vkovalkov@imec.msu.ru
Тел. +7 (495) 939-20-77

Кандидат технических наук. Старший научный сотрудник НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела, реология, биомеханика, физика. Автор 45 научных публикаций, 3 патентов и 5 авторских свидетельств на изобретение.

**ФОМИН
Леонид Викторович**

E-mail: lef1975@rambler.ru
Тел. +7 (495) 939-20-77

Ведущий инженер НИИ механики МГУ. Сфера научных интересов – механика деформируемого твердого тела, реология, биомеханика. Автор 10 научных публикаций.