УДК 531.395

К ВОПРОСУ О ПОДЪЕМЕ ШАЙБЫ ПО ВЕРТИКАЛЬНОМУ СТЕРЖНЮ ПРИ ЕГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Е.В. Мяло

МЯЛО Евгения Владимировна

Научный сотрудник лаборатории вибромеханики Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Окончила Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана по специальности «Динамика и прочность машин». Специализируется в области прикладной теории нелинейных колебаний и динамической устойчивости. Автор 8 научных публикаций.

Введение

Вынужденные колебания многих самых различных технических систем, подверженных вибрационным воздействиям, могут быть описаны и исследованы на основе стержневых расчетных моделей.

Особый интерес представляют задачи о движении твердых тел, свободно скользящих вдоль упругих и гибких стержней, при их вынужденных колебаниях.

В работах [1, 2] описано движение свободно скользящей массы вдоль горизонтального стержня, совершающего изгибные колебания, и, возникающий при этом эффект гашения колебаний стержня. Известно, что при определенных условиях возможно движение твердого тела вверх по вибрирующему стержню даже с вертикальной осью.

Впервые подъем шайбы по перевернутому маятнику, ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания, экспериментально наблюдал В.Н. Челомей [3]. Однако в предложенной им математической модели не учитывалась малая горизонтальная составляющая колебаний; в последующем ее влияние было учтено в работах [4, 5], что позволило качественно описать наблюдаемый эффект. В работах [5, 6] также было показано, что шайба при подъеме по упругому стержню может зависнуть либо в пучности, либо в узле поперечных колебаний.

В подавляющем большинстве работ, в том числе и цитированных выше [1–6], анализировались возможные режимы движения и условия устойчивости шайбы на стержне при его вынужденных колебаниях.

В настоящей статье рассматривается случай параметрического возбуждения вертикального упругого стержня, когда подъем шайбы возможен только в условиях параметрического резонанса.

На рис. 1 представлена схема вертикально установленного стержня, подверженного внешнему вибрационному возбуждению. Нижний конец стержня жестко закреплен на основании, совершающем вертикальные гармонические колебания. При достижении частоты возбуждения в два раза большей частоты собственных поперечных колебаний стержня и определен-

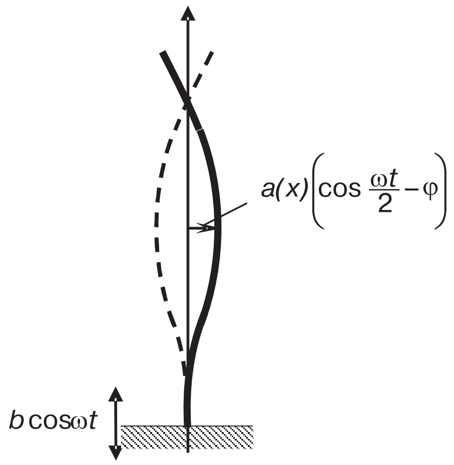


Рис. 1. Вторая форма параметрических колебаний стержня

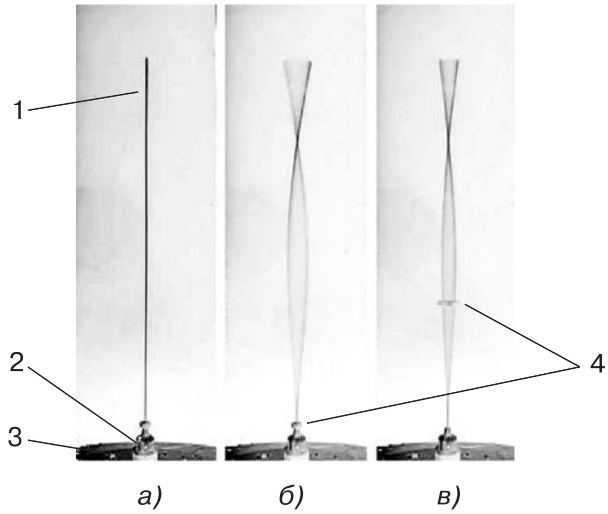


Рис. 2. Фотографии различных фаз

ной амплитуды возбуждения, возможны потеря устойчивости вертикальной оси стержня и выход на режим главного параметрического резонанса. Если на стержень изначально надеть шайбу, то (как будет показано ниже), при соответствующих параметрах системы и возбуждения, шайба может подняться по стержню и «зависнуть» в области пучности стержня; при этом снижаются амплитуды его поперечных колебаний.

К подобной расчетной схеме сводятся некоторые задачи динамики разнообразных устройств и конструкций, в частности: вибрационных подъемников, трубных виброклапанов, чувствительных элементов вибродатчиков, вибродвигателей.

Экспериментальное исследование

Стальной стержень 1 круглого поперечного сечения закреплялся в кулачковом патроне 2, жестко установленном на платформе 3 вибростенда типа ВЭДС (рис. 2). Платформа вибростенда может совершать вертикальные колебания в широком диапазоне амплитуд и частот. Для измерения амплитуды ускорения колебаний платформы использовался пьезоэлектрический акселерометр типа KD-35 (значения физических параметров системы и режимов колебаний приведены в табл. 1).

На стержень нанизывалась эбонитовая шайба 4, способная свободно скользить вдоль стержня. В стержне возбуждались параметрические колебания по второй изгибной форме (рис. 2, б), т.е. частота возбуждения была в два раза больше второй частоты собственных колебаний стержня. Шайба, находясь на стержне при вибрации основания, начинала хаотически подскакивать. На определенной высоте шайба «захватывалась», и начинался ее подъем по вибрирующему стержню (в некоторых случаях для «захватывания» и последующего подъема шайбу нужно было предварительно разместить на небольшой высоте от заделки стержня, примерно на расстоянии 0,1–0,2 его длины). Движение шайбы по стержню представляло собой периодические колебания с монотонно изменяющейся средней скоростью. Отметим, что в данных экспериментах не наблюдались заметные вращения шайбы относительно оси стер-

Таблица 1

Значения параметров испытываемой системы и ее колебаний

Параметр	Численное значение
Длина стержня, м	0,57
Диаметр стержня, м	0,003
Масса стержня, кг	0,031
Масса шайбы, кг	0,002
Частота возбуждения, Гц	78
Амплитуда возбуждения, м	0,0012
Амплитуда поперечных колебаний в пучности, м	0,018 (без шайбы) 0,01(с шайбой
Координата устойчивого положения шайбы (от заделки стержня), м	0,2

жня. Подъем шайбы заканчивался вблизи пучности поперечных колебаний стержня, где ее положение стабилизировалось, иначе говоря, шайба на вибрирующем стержне приобретала новое положение равновесия (динамической устойчивости). При попытках принудительного выведения шайбы из этого положения она вновь возвращалась в положение динамического равновесия. Приобретение устойчивого положения шайбы на вибрирующем стержне аналогично явлению динамической устойчивости перевернутого маятника с вибрирующей осью подвеса [3].

Эффект подъема шайбы и ее зависание вблизи пучности сопровождается заметным уменьшением амплитуд поперечных колебаний стержня примерно в 1,5–2 раза (рис. 2, в), что свидетельствует о роли шайбы как динамического гасителя параметрических колебаний стержня.

Расчетная модель

Гибкий вертикальный прямолинейный однородный стержень постоянного круглого поперечного сечения длиной L и изгибной жесткостью EI=const с вертикальной продольной осью нижним своим концом жестко закреплен на подвижном основании (рис. 3, а), которому сообщаются вертикальные колебания по закону $U(t)=b\cos\omega t$, где b, ω – соответственно амплитуда и частота возбуждения, t – время. Движение стержня описывается в подвижной системе координат $x0y$, начало которой жестко связано с вибрирующей заделкой стержня. Натуральная координата оси стержня S отсчитывается от заделки. Ось стержня считается нерастяжимой, инерцией вращения поперечных сечений стержня пренебрегаем, но учитываем конечные повороты его сечений. Внутреннее трение в материале стержня описывается моделью Фойхта (с коэффициентом трения d_l). Внешнее трение пропорционально абсолютной скорости поперечных колебаний стержня с коэффициентом демпфирования d.

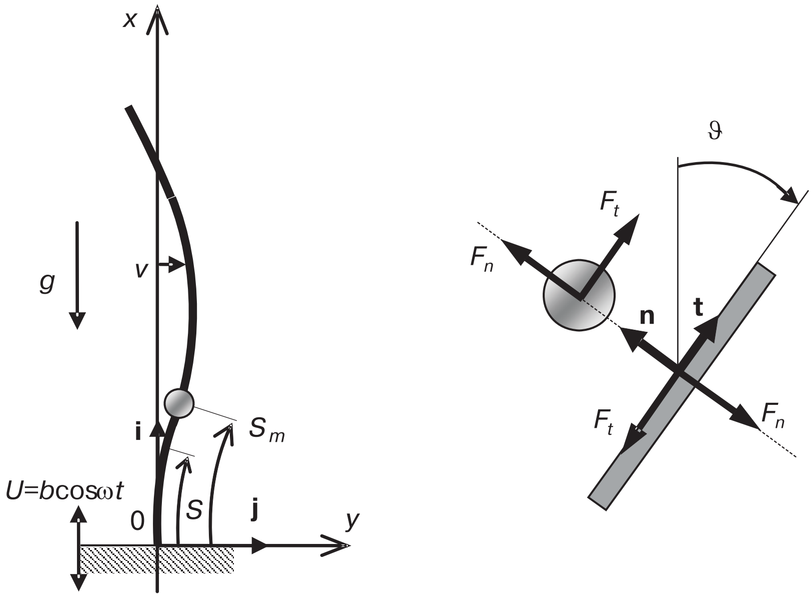
На стержень без зазора и натяга нанизана шайба, рассматриваемая как материальная точка массой M, положение которой задается натуральной координатой $S_m=S_m(t)$ вдоль оси стержня, отсчитываемой от его заделки.

Взаимодействие шайбы со стержнем (рис. 3, б) учитывается силой нормальной реакции $F_n=F_n(S_m,t)$ и силой сухого трения

$$F_t(S_m,t)=-f\left|F_n(S_m,t)\right|\mathrm{sign}(\dot{S}_m) \qquad (1)$$

(точкой обозначено дифференцирование по времени t).

При движении шайбы будем также учитывать силу внешнего трения, пропорциональную абсолютной скорости шайбы с коэффициентом d_e.



а) б)

Рис. 3. Расчетная модель

Уравнения движения стержня. Задача о поперечных колебаниях вертикально установленного упругого стержня в поле сил тяжести при параметрическом возбуждении с учетом конечных поворотов сечений стержня подробно была рассмотрена в работе [7]. Для учета сил взаимодействия между стержнем и шайбой в уравнение поперечных колебаний стержня, приведенных в [7], необходимо добавить сосредоточенные силы F_n и F_t, которые будут введены с помощью дельта-функции.

В результате уравнения движения дифференциального элемента стержня в проекциях на оси x и y приобретают вид:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-(N\cos\vartheta)'+(Q\sin\vartheta)'+m\left(g-b\omega^2\cos\omega t\right)-$$
$$-d\omega b\sin\omega t+\left(F_n\sin\vartheta+F_t\cos\vartheta\right)\delta(S-S_m), \qquad (2)$$
$$m\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}=(N\sin\vartheta)'+(Q\cos\vartheta)'+\left(F_n\cos\vartheta-F_t\sin\vartheta\right)\delta(S-S_m),$$

где u – смещение сечения стержня против положительного направления оси x, ν – прогиб стержня; ϑ – угол поворота оси стержня; N и Q – внутренние нормальная и поперечная силы; m – удельная масса стержня; g – ускорение свободного падения; $\delta(S-S_m)$ – дельта-функция Дирака; штрихами обозначено дифференцирование по координате S.

После выполнения необходимых преобразований, аналогичных приведенным в статье [7], уравнения колебаний стержня с учетом сил взаимодействия с шайбой принимают вид:

$$m\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}+d\frac{\partial\nu}{\partial t}+EI\,\nu^{IV}+d_l EI\,\frac{\partial\nu^{IV}}{\partial t}+q_\Sigma(t)\left[(L-S)\nu'\right]'=$$
$$=m\left[\nu'\int_S^L d\tilde S\,\frac12\int_0^{\tilde S}\frac{\partial^2\left(\nu'^2\right)}{\partial t^2}d\hat S\right]'+d\left[\nu'\int_S^L d\tilde S\,\frac12\int_0^{\tilde S}\frac{\partial\left(\nu'^2\right)}{\partial t}d\hat S\right]'-$$
$$-EI\left[\nu'(\nu''\nu')'\right]'-d_l EI\left[\frac{\partial\left(\nu'(\nu''\nu')'\right)}{\partial t}\right]'-q_\Sigma(t)\left[(L-S)\nu'^3/2\right]'-$$
$$-\left[\nu'\int_S^L q_n\left(t,\tilde S\right)\nu' d\tilde S\right]'-\left[\nu'\int_S^L q_t\left(t,\tilde S\right)\left(1-\nu'^2/2\right)d\tilde S\right]'-$$
$$-\left[\left(\nu'^3/2\right)\int_S^L q_t\left(t,\tilde S\right)d\tilde S\right]'+q_n(t,S)\left(1-\nu'^2/2\right)-q_t(t,S)\nu', \qquad (3)$$

где

$$q_\Sigma(t)=m(g-b\omega^2\cos\omega t)-d\omega b\sin\omega t,$$
$$q_n(t,S)=F_n(t,S)\delta(S-S_m),$$
$$q_t(t,S)=F_t(t,S)\delta(S-S_m).$$

Граничные условия:

$S=0$: $\nu=0$, $\nu'=0$, $S=L$: $\nu''=0$, $\nu'''=0$.

Для дальнейшего анализа приведем уравнение (3) к безразмерному виду, используя следующие масштабы [7]:

$$\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},\quad \zeta=\frac{S}{L},\quad \xi=\frac{\nu}{h}. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде:

$$\ddot\xi+2\psi\dot\xi+\xi^{IV}+2\psi_1\dot\xi^{IV}+p_\Sigma(\tau)\left[(1-\zeta)\xi'\right]'=$$
$$=\varepsilon^2\left\{\xi'\int_\zeta^1 d\zeta_1\int_0^{\zeta_1}\left(\dot\xi'^2+\xi\ddot\xi'+2\psi\xi\dot\xi'\right)d\zeta_2-\xi'(\xi''\xi')'-\right.$$
$$\left.-2\psi_1\left[\xi'(\xi''\xi')'\right]^{\cdot}-\frac{p_\Sigma(\tau)(1-\zeta)\xi'^3}{2}\right\}'+\varepsilon^2 w_n(\tau,\zeta)-$$
$$-\varepsilon^3\left\{w_t(\tau,\zeta)\xi'+\left[\xi'\int_\zeta^1 w_t(\tau,\zeta)\,d\tilde\zeta\right]'\right\}-$$
$$-\varepsilon^4\left\{w_n(\tau,\zeta)\frac12\xi'^2+\left[\xi'\int_\zeta^1 w_n(\tau,\zeta)\xi' d\tilde\zeta\right]'\right\}+$$
$$+\varepsilon^5\left\{\left[\xi'\int_\zeta^1 w_t(\tau,\zeta)\frac12\xi'^2 d\tilde\zeta\right]'-\left[\frac12\xi'^3\int_\zeta^1 w_t(\tau,\zeta)\,d\tilde\zeta\right]'\right\}, \qquad (5)$$

где $p_\Sigma(\tau)=\gamma-\beta\Omega^2\cos\Omega\tau-2\psi\beta\Omega\sin\Omega\tau$ – распределенная безразмерная внешняя нагрузка от переносных сил инерции и силы тяжести;

$$w_n(\tau,\zeta)=\frac{L^3}{\varepsilon^3 EI}F_n\delta(S-S_m),$$
$$w_t(\tau,\zeta)=\frac{L^3}{\varepsilon^3 EI}F_t\delta(S-S_m)$$

– безразмерные силы взаимодействия с шайбой;

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad \beta = \frac{b}{L}, \quad \gamma = \frac{mgL^3}{EI}, \tag{6}$$

$$\psi_I = \frac{d_I}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \psi = \frac{dL^2}{2\sqrt{mEI}} < 1, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{h}{L}}$$

– безразмерные параметры.

Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ, штрихами – дифференцирование по безразмерной дуговой координате ζ. Соответственно, краевые условия запишутся в виде:

$$\zeta=0:\ \xi=0,\ \xi'=0;\ \zeta=1:\ \xi''=0,\ \xi'''=0.$$

При выбранной нормировке параметр ε входит множителем перед нелинейными слагаемыми, благодаря чему становится более очевидным вклад того или иного слагаемого. Обезразмеривание для сил взаимодействия было принято таким, чтобы в уравнениях поперечных колебаний они были порядка малости не выше, чем для слагаемых, относящихся к геометрической нелинейности стержня. Тем самым физически подчеркивается второстепенность влияния шайбы на колебания стержня по сравнению с геометрическими нелинейностями.

Таким образом, мы получили нелинейное уравнение (5) третьего порядка малости по перемещениям, описывающее параметрические колебания стержня с учетом взаимодействия с шайбой.

Уравнения движения шайбы. Положение шайбы как точечной массы задается радиус-вектором $\mathbf{R}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – единичные орты осей x, y неподвижной системы координат xOy,

$$X(t)=U(t)+\int_0^{S_m}\left(1-[\nu'(S_m,t)]^2\right)^{1/2} dS_m \approx U(t)+S_m -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{S_m}[\nu'(S_m,t)]^2 dS_m, \quad Y(t)=\nu(S_m,t) \tag{7}$$

(здесь подразумевается, что $S_m=S_m(t)$).

Тогда уравнение движения шайбы в векторном виде будет выглядеть следующим образом:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = F_n\mathbf{n} + F_t\mathbf{t} - Mg\mathbf{i} - d_e\dot{\mathbf{R}}\ . \tag{8}$$

Рассмотрим проекции уравнения на нормаль и касательную к стержню (рис. 3, б), при этом учтем, что

$\mathbf{n}=-\cos\vartheta\mathbf{j}+\sin\vartheta\mathbf{i}$, $\mathbf{t}=\sin\vartheta\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{i}$.

Получим

$$M\ddot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{i} = F_n\sin\vartheta + F_t\cos\vartheta - Mg - d_e\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{i},$$
$$M\ddot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{j} = -F_n\cos\vartheta + F_t\sin\vartheta - d_e\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{j}$$

или в координатном виде

$$m\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 X}{\partial t\partial S}\dot{S} + \frac{\partial^2 X}{\partial S^2}\dot{S}^2 + \frac{\partial X}{\partial S}\ddot{S}\right) =$$
$$= F_n\frac{\partial Y}{\partial S} + F_t\frac{\partial X}{\partial S} - Mg - d_e\left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial S}\dot{S}\right),$$
$$m\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial t\partial S}\dot{S} + \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\dot{S}^2 + \frac{\partial Y}{\partial S}\ddot{S}\right) =$$
$$= -F_n\frac{\partial X}{\partial S} + F_t\frac{\partial Y}{\partial S} - d_e\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial S}\dot{S}\right). \tag{9}$$

Из определения угла поворота оси стержня следует, что $\sin\vartheta = \frac{\partial Y}{\partial S}$, $\cos\vartheta = \frac{\partial X}{\partial S}$.

Тогда, пренебрегая членами выше третьего порядка малости, получим:

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = \nu', \quad \frac{\partial X}{\partial S} = \sqrt{1-\sin^2\vartheta} = (1-\nu'^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\nu'^2,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = \nu'', \quad \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} = \left[(1-\nu'^2)^{1/2}\right]' = -\nu'\nu''(1-\nu'^2)^{-1/2} \approx -\nu'\nu''. \tag{10}$$

Уравнения (9) с учетом выражений (10) примут вид:

$$M\left[\ddot{U} - \int_0^{S_m}(\nu'\ddot{\nu}' + \dot{\nu}'^2)dS_m + 2\nu'\dot{\nu}'\dot{S}_m - \nu'\nu''\dot{S}_m^2 + \left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right)\ddot{S}_m\right] =$$

$$= F_n\nu' + F_t\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right) - Mg - d_e\left[\dot{U} - \int_0^{S_m}\nu'\dot{\nu}'dS_m + \left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right)\dot{S}_m\right],$$

$$M(\ddot{\nu} + 2\dot{\nu}'\dot{S}_m + \nu''\dot{S}_m^2 + \nu'\ddot{S}_m) = -F_n\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right) + F_t\nu' - d_e(\dot{\nu} + \nu'\dot{S}_m). \tag{11}$$

Первое уравнение системы (11) умножим на $\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right)$, второе – на ν' и сложим. Тогда, пренебрегая слагаемыми выше третьего порядка малости, получим следующее уравнение движения шайбы вдоль стержня:

$$M\ddot{S}_m = -M\left[\left(\ddot{U} - \int_0^{S_m}(\nu'\ddot{\nu}' + \dot{\nu}'^2)dS_m + g\right)\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right) + \ddot{\nu}\nu'\right] +$$

$$+ F_t - d_e\left[\left(\dot{U} - \int_0^{S_m}\nu'\dot{\nu}'dS_m\right)\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right) + \dot{\nu}\nu' + \dot{S}_m\right]. \tag{12}$$

Далее первое уравнение системы (11) умножим на ν', второе – на $\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right)$ и вычтем. Как и ранее, пренебрегая слагаемыми выше третьего порядка малости, получим выражение для нормальной силы:

$$F_n = M\left[\nu'\left(\ddot{U}-\int_0^{S_m}\left(\nu'\ddot{\nu}'+\nu'^2\right)dS_m+g\right)-\dot{\nu}'\left(2+\nu'^2\right)\dot{S}_m-\right.$$
$$\left.-\nu''\left(1+\frac{1}{2}\nu'^2\right)\dot{S}_m^2-\ddot{\nu}\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right)\right]+$$
$$+d_e\left[\left(\dot{U}-\int_0^{S_m}\nu'\dot{\nu}'dS_m\right)\nu'+\dot{\nu}\left(1-\frac{1}{2}\nu'^2\right)\right]. \qquad (13)$$

Выражение (13) является связью уравнений движения стержня (3) и шайбы (12).

Введем в уравнения (12), (13) масштабы (4), безразмерные параметры (6) и новые безразмерные параметры:

$\zeta_m = \frac{S_m}{L}$ – безразмерную координату шайбы;

$\mu = \frac{M}{Lm}$ – отношение масс шайбы и стержня.

Тогда уравнение (11) запишется в виде:

$$\ddot{\zeta}_m = -\left(\ddot{\bar{U}}-\varepsilon^2\int_0^{\zeta_m}\left(\xi\ddot{\xi}'+\dot{\xi}'^2\right)d\zeta_m\right)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\dot{\xi}'^2\right)-\varepsilon^2\ddot{\xi}\xi'-$$
$$-\gamma\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\dot{\xi}'^2\right)+\frac{1}{\mu}\varepsilon^3\bar{F}_t(\zeta_m,\tau)-\frac{2}{\mu}\psi_e^{disc}\left[\left(\dot{\bar{U}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varepsilon^2\int_0^{\zeta_m}\xi\dot{\xi}'d\zeta_m\right)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\dot{\xi}'^2\right)+\varepsilon^2\xi'\dot{\xi}+\dot{\xi}_m\right], \qquad (14)$$

где

$$\bar{F}_t(\zeta_m,\tau) = -f\left|\bar{F}_n(\zeta_m,\tau)\right|\operatorname{sign}\dot{\zeta}_m. \qquad (15)$$

Выражение (13) для нормальной силы выглядит как

$$\bar{F}_n = \frac{1}{\varepsilon^2}\mu\left\{\xi'\left(\ddot{\bar{U}}-\varepsilon\int_0^{\zeta_m}\left(\xi'\ddot{\xi}'+\dot{\xi}'^2\right)d\zeta_m\right)-\dot{\xi}'\left(2+\varepsilon\xi'^2\right)\dot{\zeta}_m-\right.$$
$$-\xi''\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\xi'^2\right)\dot{\zeta}_m^2-\ddot{\xi}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\xi'^2\right)+\gamma\xi'+$$
$$\left.+\frac{2}{\mu}\psi_e^{disc}\left[\left(\dot{\bar{U}}-\varepsilon\int_0^{\zeta_m}\xi'\dot{\xi}'d\zeta_m\right)\xi'-\dot{\xi}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\xi'^2\right)\right]\right\}. \ , \qquad (16)$$

где введены следующие безразмерные комплексы:

$$\bar{U} = \beta\cos\Omega\tau\,,\quad \bar{F}_n = \frac{L^2}{\varepsilon^3 EI}F_n,\quad \bar{F}_t = \frac{L^2}{\varepsilon^3 EI}F_t,$$
$$\psi_e^{disc} = \frac{d_e L}{2\sqrt{mEI}} = \frac{\psi}{L}.$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений (5) и (14), позволяющую определить все кинематические параметры движения шайбы и колебаний стержня с учетом выражения (16).

Дальнейшее решение этой системы уравнений ориентировано на вычисление параметров, характеризующих движение шайбы вдоль стержня и амплитуды поперечных колебаний стержня при подъеме и стабилизации шайбы в зоне ее устойчивого положения.

Решение уравнений

Решение систем нелинейных уравнений в частных производных сопровождается значительными вычислительными трудностями. С целью оптимизации вычислительных процедур воспользуемся методом Галеркина, что позволяет привести полученную систему в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений. Кроме того, для замены разрывной функции силы сухого трения (15) проведем регуляризацию (т.е. заменим разрывную функцию сигнум на гиперболический тангенс):

$$\bar{F}_t(\zeta_m,\tau) = -f\left|\bar{F}_n(\zeta_m,\tau)\right| sign\dot{\zeta}_m \cong -f\left|\bar{F}_n(\zeta_m,\tau)\right| th\dot{\zeta}_m.$$

Данная операция является физически и математически обоснованной и значительно облегчает численное решение системы уравнений (сравнительные расчеты показали допустимость подобной замены).

Так как в описанном эксперименте колебания стержня возбуждались вблизи второго резонанса (по второй форме), то решение уравнения (5) ищем в виде одномодового приближения:

$$\xi(\zeta,\tau) \approx q(\tau)\varphi(\zeta), \qquad (17)$$

где $q(\tau)$ – амплитудная функция; $\varphi(\zeta)$ – координатная функция, соответствующая второй форме свободных поперечных колебаний стержня, представленная в виде функций Крылова [8].

После подстановки (17) в уравнение (5) и последующей ортогонализации невязки с координатной функцией на интервале $\xi \in [0,1]$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитудной функции $q(\tau)$:

$$
\begin{gathered}
J_1\ddot{q} + 2\psi J_1\dot{q} + J_2 q + 2\psi_I J_2\dot{q} + p_\Sigma(\tau)J_3 q = \\
= \varepsilon^2\left[q\left(\dot{q}^2 + q\ddot{q} + 2\psi q\dot{q}\right)J_4 - q^3J_5 - 6\psi_I q^2\dot{q}J_5 - p_\Sigma(\tau)q^3J_6\right] + \\
+ \varepsilon^2\overline{F}_n(\tau,\zeta_m)J_7 - \varepsilon^3 q\overline{F}_t(\tau,\zeta_m)(J_8 + J_9) - \varepsilon^4 q^2\overline{F}_n(\tau,\zeta_m)(J_{10} + \\
+ J_{11}) - \varepsilon^5 q^3\overline{F}_t(\tau,\zeta_m)(J_{12} - J_{13}).
\end{gathered} \tag{18}
$$

Здесь J_j, $j = \overline{1,13}$ – определенные интегралы от координатной функции $\varphi(\zeta)$ и ее производных: $J_{1\text{-}6}$ – приведены в работе [7],

$$J_7 = \int_0^1 \varphi\,\delta(\zeta - \zeta_m)\,d\zeta = \varphi(\zeta_m),$$

$$J_8 = \int_0^1 \varphi\varphi'\,\delta(\zeta - \zeta_m)\,d\zeta = \varphi(\zeta_m)\varphi'(\zeta_m),$$

$$J_9 = \int_0^1 \varphi\left[\varphi'\int_\zeta^1 \delta(\zeta - \zeta_m)\,d\tilde{\zeta}\right]' d\zeta = -\int_0^{\zeta_m} \varphi'^2\,d\zeta\ ,$$

$$J_{10} = \int_0^1 \varphi\left[\varphi'\int_\zeta^1 \varphi'\delta(\zeta - \zeta_m)\,d\tilde{\zeta}\right]' d\zeta = -\varphi'(\zeta_m)\int_0^{\zeta_m} \varphi'^2\,d\zeta,$$

$$J_{11} = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi\left[\int_\zeta^1 \varphi'^2\,\delta(\zeta - \zeta_m)\,d\tilde{\zeta}\right]' d\zeta = -\frac{1}{2}\varphi'^2(\zeta_m)\int_0^{\zeta_m} \varphi'\,d\zeta\ ,$$

$$J_{12} = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi\left[\varphi'^3\int_\zeta^1 \delta(\zeta - \zeta_m)\,d\tilde{\zeta}\right]' d\zeta = -\frac{1}{2}\int_0^{\zeta_m} \varphi'^4\,d\zeta\ ,$$

$$J_{13} = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi\left[\varphi'\int_\zeta^1 \delta(\zeta - \zeta_m)\varphi'^2\,d\tilde{\zeta}\right]' d\zeta = -\frac{1}{2}\varphi'^2(\zeta_m)\int_0^{\zeta_m} \varphi'^2\,d\zeta.$$

В уравнения движения стержня (18) и шайбы (14) подставим выражения для сил взаимодействия (15) и (16). В результате получим дифференциальные уравнения следующей структуры:

$$
\begin{cases}
\dddot{q} = f_1(q, \dot{q}, \ddot{q}, \zeta_m, \dot{\zeta}_m, \tau) \\
\ddot{\zeta}_m = f_2(q, \dot{q}, \ddot{q}, \zeta_m, \dot{\zeta}_m, \tau)
\end{cases}, \tag{19}
$$

где f_1, f_2 – нелинейные операторы.

Таким образом, получили систему двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка малости относительно поперечных смещений стержня, описывающих движение системы. В этих уравнениях неизвестными являются поперечное перемещение стержня $q(\zeta_m,\tau)$ и координата положения шайбы на стержне $\zeta_m(\tau)$.

Данную систему невозможно разрешить относительно старшей производной $\dddot{q}$. Поэтому при использовании стандартных методов численного интегрирования, в частности, метода Рунге-Кутта 4-го порядка, на каждом шаге интегрирования дополнительно решаем нелинейное уравнение следующего вида:

$$a_1 + a_2\dddot{q}_i + a_3\left|a_4 + a_5\dddot{q}_i\right| = 0,$$

где $a_k = a_k\left(q_{i-1}, \dot{q}_{i-1}, \ddot{q}_{i-1}, \zeta_{i-1}, \dot{\zeta}_{i-1}, \ddot{\zeta}_{i-1}\right)$, $k = \overline{1,5}$ – числа, полученные от значений переменных с предыдущего шага.

Этот прием позволяет получить значения $\dddot{q}$ на каждом шаге интегрирования.

Интегрирование проводилось в математическом пакете Matlab R2006a с порядком относительной и абсолютной погрешностей равным 10^{-8}. При этом использовались следующие значения безразмерных величин:

γ=0,12, β=0,0022, Ω=43,5, μ=0,064, ε=1,

$f = 0{,}1$, $\psi = 0$, $\psi_I = 0{,}00084$.

Значения параметров возбуждения β, Ω и системы γ, μ, соответствовали принятым в эксперименте. Идентификация коэффициента внутреннего трения ψ_I производилась при нулевом значении коэффициента внешнего трения ψ из условия равенства расчетной (по уравнению (18)) амплитуды поперечных колебаний стержня ее экспериментальному значению. Значения амплитудной функции, соответствующие экспериментальной амплитуде поперечных колебаний стержня в пучности: $q_{antinode}$=0,0225 (для стержня без шайбы) и $q_{antinode\_disk}$=0,0125 (для стержня с шайбой).

При интегрировании системы (19) начальные условия задавались следующим образом: начальные значения амплитудной функции для стержня и ее производной соответствовали

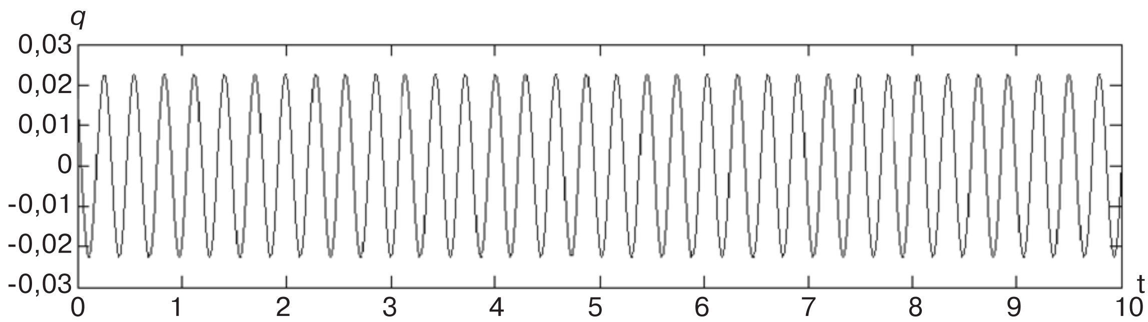


Рис. 4. Периодическое решение для амплитудной функции стержня

условиям возникновения периодического решения с периодом $4\pi/\Omega$ (рис. 4), а координата начального положения шайбы и скорость шайбы соответствовали их экспериментальным значениям: $\zeta_m(0)=0{,}1$ и $\dot{\zeta}_m(0)=0$.

В результате выполненных расчетов были построены графики зависимости от времени амплитудной функции для стержня (рис. 5, а), положения шайбы на стержне (рис. 5, б) и нормальной силы взаимодействия шайбы со стержнем (рис. 5, в). Как видно из приведенных графиков, по мере подъема шайбы амплитуда поперечных колебаний стержня снижается. На определенном расстоянии от заделки шайба настолько гасит амплитуду колебаний стержня, что не может удержаться и падает.

Однако при меньшем значении массы шайбы μ=0,012 принятая математическая модель

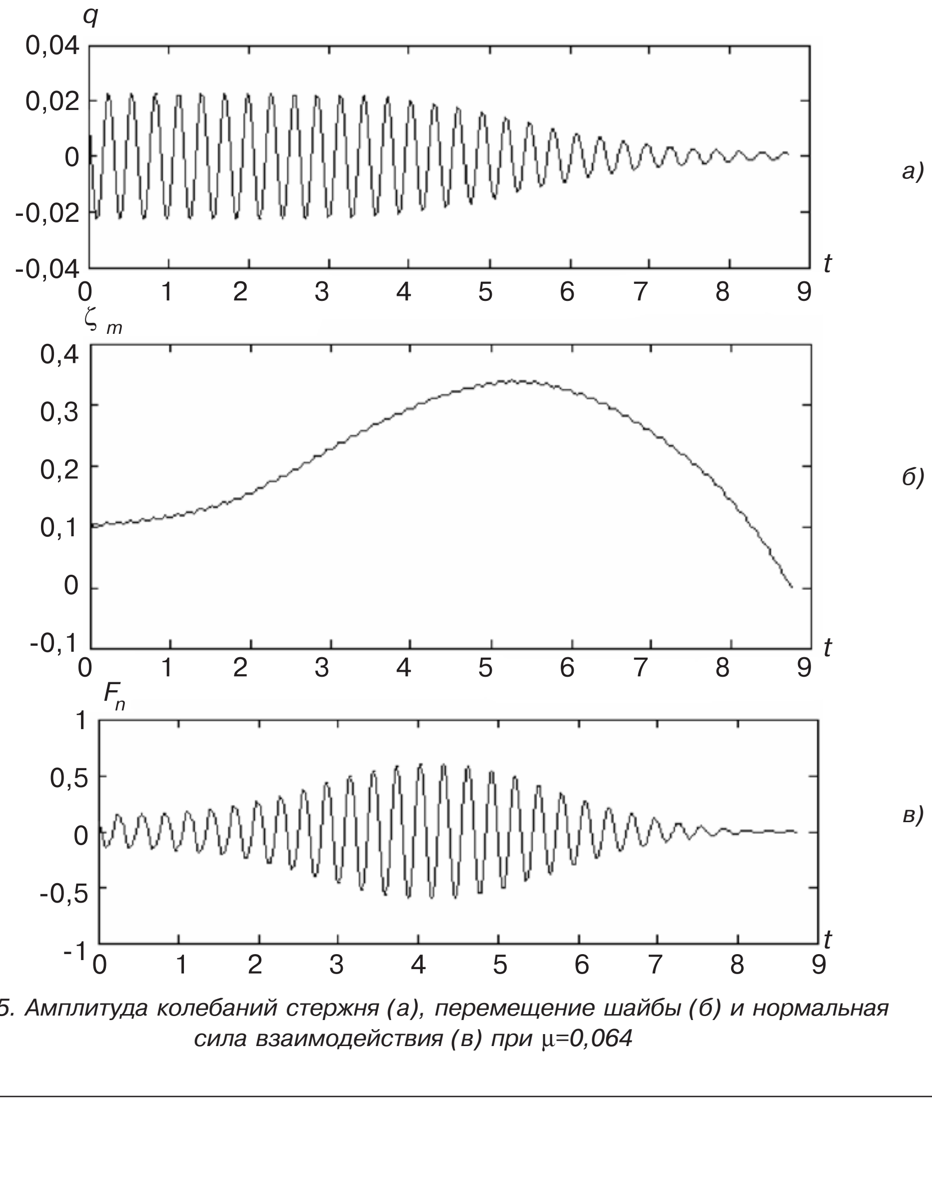


Рис. 5. Амплитуда колебаний стержня (а), перемещение шайбы (б) и нормальная сила взаимодействия (в) при μ=0,064

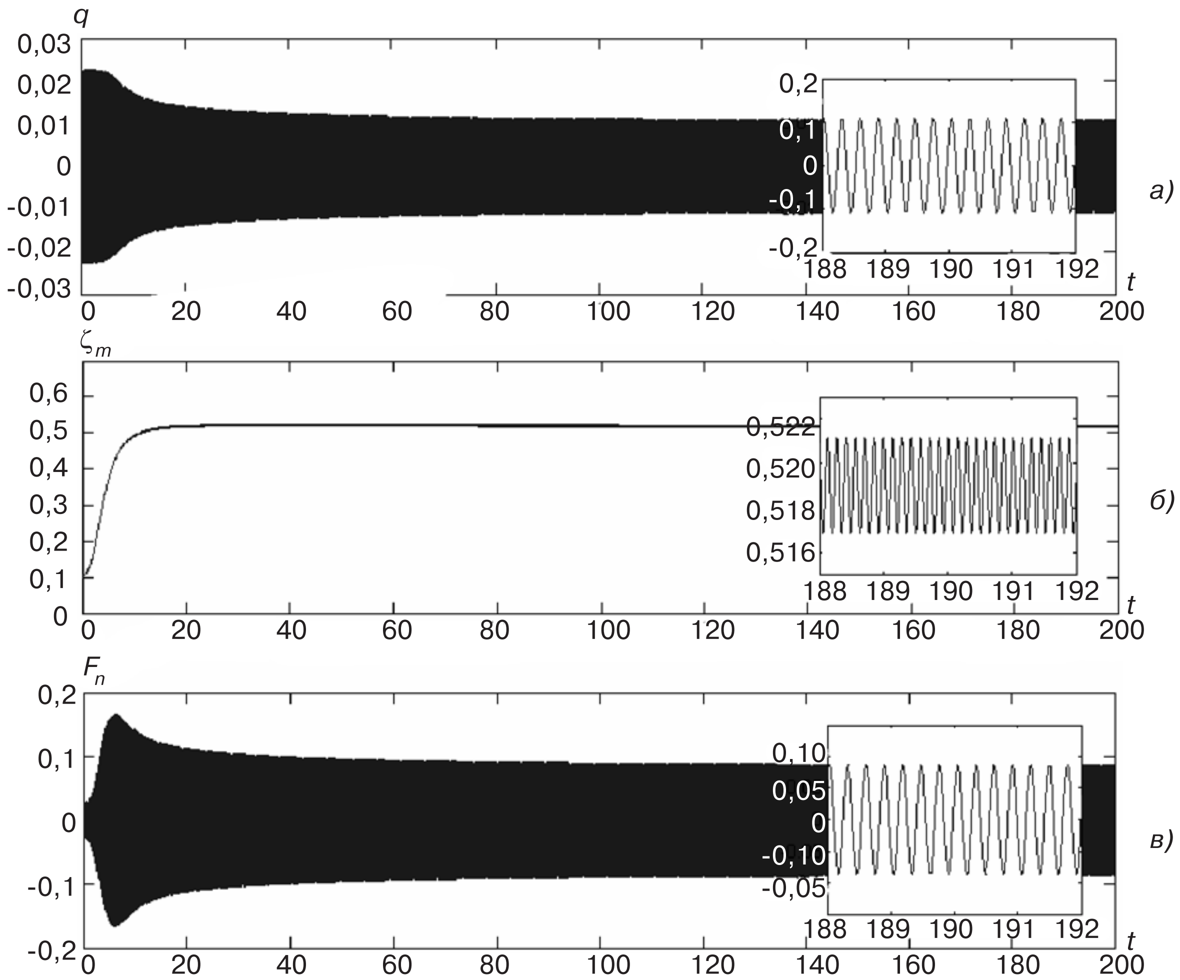


Рис. 6. Амплитуда колебаний стержня (а), перемещение шайбы (б) и нормальная сила взаимодействия (в) при μ=0,012

описывает поведение системы, наблюдаемое в эксперименте: шайба поднимается и стабилизируется в области пучности ($\langle\langle \zeta_m^{st} \rangle\rangle = 0{,}52$) (рис. 6, б). При этом амплитуда поперечных колебаний стержня уменьшается в два раза (рис. 6, а), что показывает роль шайбы как динамического гасителя колебаний. Вопрос о влиянии различных видов трения и их параметров на характер движения шайбы вдоль элемента стержня как жесткого целого обсуждался в работе [10].

Заключение

Следует отметить, что рассмотренная модель не претендует на полноту описания наблюдаемых в эксперименте эффектов и не учитывает все возможные механизмы взаимодействия стержня и шайбы. Наблюдаемое расхождение результатов математического моделирования с данными эксперимента можно объяснить, в частности: пренебрежением реальными размерами шайбы, возможными соударениями, а также принятой моделью внутреннего трения, в которой коэффициент трения является постоянной величиной. В действительности внутреннее трение может существенно зависеть от деформаций (напряжений) [9], определяемых амплитудой поперечных колебаний стержня. В рассматриваемом случае эта амплитуда уменьшается при подъеме шайбы и коэффициент внутреннего трения должен иметь переменное во времени значение. Кроме того, на количественные результаты моделирования может повлиять и введение в модель стержня его начальных несовершенств.

Тем не менее, предложенная модель вполне адекватно описывает наиболее существенные особенности поведения исследуемой системы, в частности, подъем шайбы по стержню, стабилизацию ее положения и гашение амплитуд поперечных колебаний, наблюдаемые в эксперименте.

Автор выражает глубокую признательность профессорам А.М. Гуськову и Г.Я. Пановко за постановку задачи и помощь в ее решении.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-08-00253-а и гранта CRDF НОЦ-018.

Список литературы

1. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Веприк А.М., Крупенин В.Л. Гашение вынужденных колебаний струн и стержней подвижной шайбой // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 1. С. 50–54
2. Babitsky V.I., Veprik A.M. Damping of beam forced vibration by a moving washer // Journal of Sound and Vibration. 1993. 166(1). P. 77–85.
3. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 62–68
4. Меняйлов А.И., Мовчан А.В. О стабилизации системы маятник-кольцо в условиях вибрации основания. // МТТ, 1984, № 6, с.35–40
5. Блехман И.И. Малахова О.З. О квазиравновесных положениях маятника Челомея // ДАН СССР. 1988. Т. 287. № 2. С. 290–294
6. Thomsen J.J., Tcherniak D.M. Chelomei's pendulum explained // Proc. R. Soc. Lond. A 2001. V. 457. № 2012. P. 1889–1913.
7. Гуськов А.М., Пановко Г.Я. Вибрационная стабилизация вертикальной оси гибкого стержня // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 5. С. 13–19.
8. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. Учеб. пособ. для втузов. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
9. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Гос. изд-во физмат. лит-ры, 1960 – 193 с.
10. Gouskov A.M., Myalo E.V., Panovko G.Y. Disc movement features along vertical vibrating rod // Proceedings of 12th IFToMM World Congress, 2007. http://www.iftomm.org