УДК 614.8.084

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОПАСНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАТРАТ И ПОКАЗАТЕЛЕЙ РИСКА

А.В. Майструк, А.А. Майструк, Е.А. Резчиков

Представлена математическая модель задачи оптимизации показателей безопасности сложных систем по критерию минимума суммарных затрат. Разработанный критерий оптимизации позволяет учитывать как эксплуатационные затраты, так и показатели риска аварий и катастроф при эксплуатации сложных систем. Показан способ решения задачи с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Эффективность разработанных моделей подтверждена результатами моделирования.

Ключевые слова: *безопасность, риск, сложные системы.*

Введение

В настоящее время требования к безопасности производственных процессов являются одним из важнейших факторов, стимулирующих развитие научно-методического аппарата анализа и управления риском при эксплуатации потенциально опасных объектов (ПОО). При этом, когда затраты на обеспечение безопасности ПОО составляют значительную долю материальных ресурсов общества, важное значение приобретает проблема оптимизации показателей безопасности сложных технических систем (СТС) с учетом затрат и прогнозируемых значений показателей приемлемого риска аварий и катастроф.

Приемлемый риск сочетает в себе технические, экономические, социальные и политические аспекты и представляет собой некоторый компромисс между уровнем безопасности и возможностями ее достижения. Поэтому целью данной работы явилась разработка математического аппарата по обоснованию требований к показателям безопасности СТС и соответствующих программ управления, позволяющих с использованием современных вычислительных средств и методов оптимизации эффективно управлять организационными системами, производством и потенциально опасными объектами.

Постановка задачи оптимизации

Под сложной технической системой понимается множество взаимосвязанных элементов, взаимодействующих между собой и образующих некоторую целостность (общность), которая обладает определенными свойствами, присущими только данной системе и отсутствующими у каждого элемента в отдельности (свойство эмерджентности).

Сложные системы характеризуются, прежде всего, большим числом составных элементов, множеством разнообразных связей, разнородностью структурных элементов и многообразием их физической природы. Кроме того, сложные системы обладают свойством оптимальности. Примерами СТС могут служить энергетические комплексы, гидротехнические узлы, автоматические и автоматизированные системы, управляющие технологическими процессами в химической, металлургической промышленности и машиностроении, атомные электростанции, ракетно-космические комплексы, системы военного назначения и т.д.

В общем случае обоснование требований к безопасности и надежности СТС связано с соизмерением производственных, эксплуатационных затрат и существующим риском аварий и катастроф [1, 3]. Поэтому в качестве критерия оптимизации рассматривается минимум суммарных экономических издержек (затрат), связанных как с предупреждением возможных происшествий (аварий и катастроф), так и с ликвидацией последствий (ущерба) от их возникновения.

Безопасность, как и другие свойства технических систем, обеспечивается свойствами отдельных компонентов (элементов), что требует проведения большого количества контрольно-профилактических и ремонтно-восстановительных мероприятий, выполняемых на всех элементах и всех этапах жизненного цикла систем. Мероприятия обеспечения требуемого уровня безопасности характеризуются показателями стоимости, эффективности, ресурсоемкости и т.п. Следовательно, задача обоснования параметров безопасности сложных систем является оптимизационной задачей, а ее решение предполагает нахождение таких значений параметров $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$, которые обеспечат минимум функционала

$$C_\Sigma(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\, C_i\,(P_i) + R_i\,(P_i)\right] \to \min_{P_i} \qquad (1)$$

где P_i – параметры оптимизации, представляющие собой показатели безопасности i-х (i = 1, 2, ..., n) систем (компонентов, элементов); $C_i\,(P_i)$ – затраты (стоимость) на реализацию комплекса организационно-технических мероприятий, связанных с обеспечением выбранного показателя надежности и безопасности P_i; $R_i\,(P_i)$ – затраты, связанные с риском аварий и катастроф в процессе эксплуатации (функционирования) i-ой системы (компонентов, элементов); **P** – вектор с компонентами P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_n.

Решение оптимизационной задачи (1) связано с некоторыми трудностями: из-за существенной неопределенности исходной информации, обусловленной различными режимами и условиями эксплуатации СТС; сложности структурных схем и множества элементов различной физической природы; неопределенности процессов старения и, как следствие, технического состояния отдельных компонентов и системы в целом.

Рассмотрим один из возможных подходов к решению задачи. Из опыта эксплуатации известно, что, с одной стороны, затраты (стоимость) на обеспечение заданного уровня надежности и безопасности СТС нелинейно увеличиваются по мере возрастания требований к этим показателям. При этом очевидно, что, чем меньше требования к безопасности и надежности систем, тем меньше затраты на их обеспечение, и наоборот. Так, при изменении показателей безопасности в пределах 0,2...0,8 увеличение стоимости незначительно, а в пределах 0,8...1,0 – резко возрастает, стремясь к бесконечности (рис. 1):

$$C(P) \to \infty \text{ при } P(t) \to 1,$$

где t – время.

Соответственно, для каждой i-й системы (элемента) в общем случае функция стоимости $C(P)$ (для системы в целом или для ее i-й компоненты) может быть аппроксимирована зависимостью вида

$$C(\,P\,) = C_\Delta + C_0\,\frac{\ln\left(1-P\right)}{\ln\left(1-P_0\right)}, \qquad (2)$$

где C_Δ – постоянная величина затрат, не зависящая от надежности и безопасности СТС; C_0 – затраты (стоимость), связанные с обеспечением технически возможного максимального значения показателя безопасности P_0.

С другой стороны, эксплуатация системы с низкими показателями надежности и безопас-

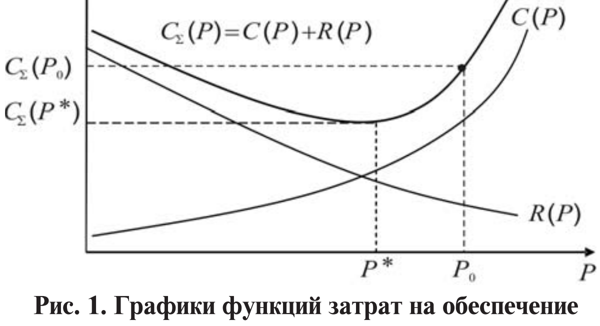


Рис. 1. Графики функций затрат на обеспечение безопасности сложной системы:

P^* – оптимальный уровень безопасности системы по критерию минимума суммарных затрат ности связана с высокими эксплуатационными затратами, обусловленными повышенной интенсивностью отказов, увеличением числа неисправностей, ремонтов и технических обслуживаний, а также затратами по устранению последствий (ущерба) аварий и катастроф. Все это требует содержания большого количества обслуживающего персонала и аварийно-спасательных формирований, специальных средств сигнализации и обслуживания, сложной и дорогостоящей контрольно-измерительной аппаратуры и т.п. При этом по мере роста показателей надежности и безопасности СТС снижаются не только затраты на эксплуатацию системы, но и затраты, связанные с устранением последствий аварий и катастроф.

Интегральными показателями опасности систем, обладающих параметрами P, являются показатели риска, которые представляют собой произведение вероятности $Q = 1 - P$ некоторого неблагоприятного события (происшествия) на величину ущерба $C_у$ от этого события:

$$R(Q) = QC_у = (1 - P)C_у. \qquad (3)$$

Характерная зависимость эксплуатационного риска (риска аварий и катастроф) $R(P)$ от надежности и безопасности системы $P = 1 - Q$ может быть аппроксимирована зависимостью (см. рис. 1, кривая $R(P)$)

$$R(P) = R_\Delta + R_0 \frac{\ln P}{\ln P_0} = R_\Delta + R_0 \frac{\ln(1-Q)}{\ln(1-Q_0)}, \qquad (4)$$

где R_Δ – постоянная величина риска, не зависящая от показателей безопасности системы; R_0 – значение показателя риска при эксплуатации системы с показателем безопасности P_0; Q – вероятность аварии (катастрофы) при эксплуатации СТС с показателями безопасности P.

С учетом случайного характера эксплуатационных процессов суммарная стоимость всех затрат, связанных с достижением приемлемого уровня риска эксплуатации СТС, равна

$$C_\Sigma(P) = C(P) + R(P) = C_\Delta + R_\Delta + C_0 \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-P_0)} + R_0 \frac{\ln P}{\ln P_0}, \qquad (5)$$

или

$$C_\Sigma(Q) = C(Q) + R(Q) = C_\Delta + R_\Delta + C_0 \frac{\ln(Q)}{\ln(Q_0)} + R_0 \frac{\ln(1-Q)}{\ln(1-Q_0)} \; \forall\, Q = 1 - P,$$

где $C_\Sigma(P)$ – математическое ожидание суммарных затрат, связанных с затратами на обеспечение (достижение) выбранного уровня безопасности СТС и риском возникновения происшествий в процессе эксплуатации; $C(P)$ – математическое ожидание затрат, связанных с реализацией программы по обеспечению выбранного уровня безопасности СТС (включая затраты на разработку, производство, испытания и эксплуатацию); $R(Q)$ – математическое ожидание затрат, связанных с риском нанесения ущерба самой СТС, окружающей среде и социальным объектам при данном уровне безопасности.

Функциональная зависимость суммарных затрат от достигнутого уровня безопасности приведена на рис. 1 (кривая $C_\Sigma(P)$). Из рисунка 1 видно, что суммарные затраты имеют минимум при определенном значении P^*, которое и является оптимальным уровнем безопасности системы по критерию минимума суммарных затрат. Для определения P^* необходимо взять производную от выражения (5) и решить уравнение

$$\frac{\partial C_\Sigma(P)}{\partial P} = 0. \qquad (6)$$

Для этого выражение (5) запишем в следующем виде:

$$[C_\Sigma(P)] = [A + B\ln(1-P) + D\ln P], \qquad (7)$$

где $A = C_\Delta + R_\Delta$; $B = \dfrac{C_0}{\ln(1-P_0)}$; $D = \dfrac{R_0}{\ln P_0}$.

После дифференцирования выражения (7) с учетом (6) получим уравнение вида

$$\frac{D(1-P) - BP}{P(1-P)} = 0.$$

Так как $P \neq 0$ и $P \neq 1$, то и знаменатель $P(1-P) \neq 0$. Следовательно, числитель

$$D(1-P) - BP = 0.$$

Отсюда решение этого уравнения

$$P^* = \frac{D}{B+D}.$$

После подстановки B и D получим окончательное выражение

$$P^* = \frac{R_0}{\ln P_0} \Bigg/ \left[\frac{C_0}{\ln(1-P_0)} + \frac{R_0}{\ln P_0}\right] = \frac{R_0}{R_0 + C_0 \dfrac{\ln P_0}{\ln(1-P_0)}}. \qquad (8)$$

Пример решения задачи оптимизации

Для иллюстрации возможностей и апробации разработанного математического аппарата приведем пример решения задачи оптимизации (1) параметров безопасности некоторой идеализированной сложной технической системы по критерию минимума суммарных затрат.

В качестве исходных данных при моделировании функций эксплуатационного риска и суммарных затрат по формулам (2), (4)–(5) приняты значения параметров, не противоречащие современной производственной и эксплуатационной практике в различных отраслях экономики: $C_\Delta = 970$ у.е.; $R_\Delta = 2300$ у.е.; $C_0 = 1\,773\,950$ у.е.; $C_y = 6\,957\,575$ у.е.; $P_0 = 0{,}9999$. Полученные результаты решения, представленные на рис. 2 в виде графиков, показали наличие оптимального значения параметра безопасности СТС $P^* = P_{\text{opt}} = 0{,}973062$, обеспечивающего минимум суммарных затрат $C_\Sigma(P) = 8{,}894 \cdot 10^5$ у.е.

В целом результаты моделирования (см. рис. 2), полученные с помощью системы MATHCAD, показали универсальность, адекватность и эффективность разработанных моделей, что подтверждается чувствительностью моделей к исходным данным и параметрам оптимизации, а также совпадением результатов вычислений, полученных как расчетным путем P_{opt} = 0,973062 по формуле (8), так и с помощью встроенных функций оптимизации – $Minimize(C_\Sigma, P) = 0{,}97306$.

Особенности формализации задачи оптимизации

В общем случае требования к безопасности СТС в целом трансформируются в требования к показателям надежности и безопасности отдельных компонентов (элементов) системы. Соответственно распределение требований к показателям надежности и безопасности функционирования элементов (компонентов) $P_i(t)$ системы в течение времени t также предполагает решение оптимизационной задачи.

Задача состоит в распределении требований между отдельными подсистемами (элементами) таким образом, чтобы были удовлетворены требования безопасности ко всей системе в целом. В тех ситуациях, когда система состоит из n подсистем примерно эквивалентного

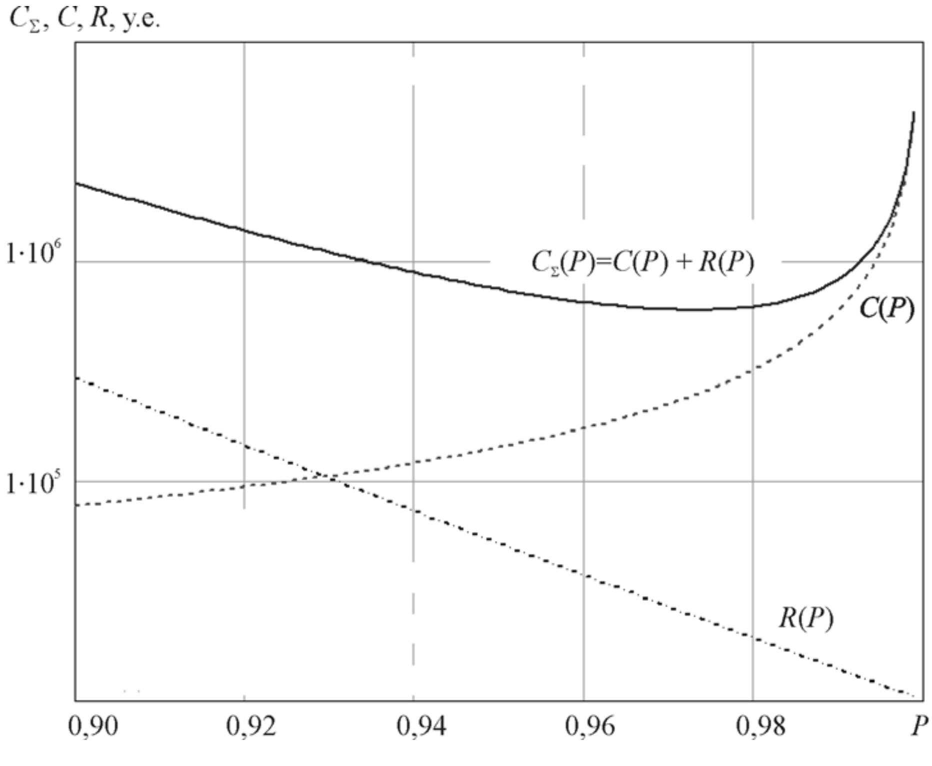


Рис. 2. Результаты оптимизации показателей безопасности сложной системы по критерию минимума суммарных затрат

объема (подсистемы близки по сложности, например по числу элементов), а их отказы являются опасными и независимыми событиями (т. е. отказ любой из подсистем может привести к происшествию), требуемое значение показателя $P_i(t)$ может быть найдено методом равномерного распределения квот безопасности.

Например, если в простейшем случае надежностные характеристики элементов примерно равны, а отказ любого элемента n системы является опасным и независимым, то

$$P_{\text{с}}(t) \geq P_{\text{тр}}(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) \approx P_i^n(t), \qquad (9)$$

следовательно

$$P_i(t) = \sqrt[n]{P_{\text{тр}}(t)},$$

где $P_i(t)$ – вероятность безопасного функционирования (работы) элемента (компонента) системы в течение времени t; $P_{\text{с}}$ – показатель безопасности системы; $P_{\text{тр}}(t)$ – требуемые значения показателя безопасности СТС.

В других случаях между показателями надежности и безопасности отдельных элементов и системы в целом существует более сложная зависимость $P_{\text{с}}(t) = f[P_i(t)]$. Для ее установления и формализации используются методы системного анализа и моделирования опасных процессов, например аппарат логико-вероятностной теории безопасности сложных систем [1, 4].

Для описания дополнительных затрат, связанных с обеспечением безопасности СТС, воспользуемся экспоненциальной зависимостью вида

$$C_i(X_i) = \alpha_i e^{\theta_i X_i}, \qquad (10)$$

где X_i – оптимизируемый параметр (например, показатель безопасности P_i); α_i – постоянный коэффициент с размерностью целевой функции; θ_i – постоянный коэффициент с размерностью, обратной размерности X_i ($\theta_i > 0$).

Из выражения (10) следует, что уменьшение параметра X_i приводит к снижению затрат. Применительно к задаче оптимизации (см. рис. 1) это означает, что, чем ниже показатели безопасности системы (элементов), тем меньше затраты, связанные с их обеспечением (достижением). Например, если $P_1 < P_2$, то $C(P_1) < C(P_2)$.

Для показателя риска можно записать аналогичную зависимость

$$R_i(X_i) = \beta_i e^{-\chi_i X_i}, \qquad (11)$$

где X_i – оптимизируемый параметр; β_i – постоянный коэффициент с размерностью целевой функции; χ_i – постоянный коэффициент с размерностью, обратной размерности X_i($\chi_i > 0$).

Из выражения (11), в отличие от выражения (10), следует, что, чем выше показатели безопасности системы (элементов), тем меньше затраты, связанные с ликвидацией последствий происшествий. То есть если $P_1 < P_2$, то $R(P_1) > R(P_2)$.

Примем допущение, что для всех i-х элементов системы ($i = 1, ..., n$) зависимость между показателями безопасности и стоимостью мероприятий обеспечения безопасности определяется функцией вида

$$C(P_i) = \alpha_i \ln(1 - P_i) = \alpha_i \ln(Q_i), \qquad (12)$$

а между безопасностью и показателями эксплуатационного риска – функцией

$$R(P_i) = \beta_i \ln(P_i) = \beta_i \ln(1 - Q_i), \qquad (13)$$

где α_i и β_i – постоянные величины; $P_i = 1 - Q_i$.

Соответственно критерий оптимизации в виде минимума суммарных затрат, связанных с обеспечением безопасности функционирования множества элементов (компонентов) системы (например, множества потенциально опасных объектов) и риска происшествий, будет определяться как

$$\begin{aligned} C_\Sigma(\mathrm{P}) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i \ln\left(1 - P_i\right) + \beta_i \ln\left(P_i\right)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i \ln\left(Q_i\right) + \beta_i \ln\left(1 - Q_i\right)\right] \Rightarrow \min_{P_i}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Для того чтобы формула (14) выражала зависимость между показателями безопасности системы и суммарной стоимостью, необходимо $P_i(t)$ выразить через $P_{\text{с}}(t)$. При этом очевидно, что определенному значению $P_{\text{с}}(t)$ показателя безопасности системы может удовлетворять множество комбинаций значений $\{P_i(t)\}$, дающих в произведении одно и то же значение $P_{\text{с}}(t)$. Однако с учетом критерия оптимизации (14) необходимо найти такую комбинацию произведений $P_i(t)$, i = 1, ..., n, которая обеспечит выполнение ограничения

$$P_{\text{с}}(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) \geq P_{\text{тр}}(t) \text{ при } C_\Sigma(P_i) \Rightarrow \min_{P_i}.$$

Другими словами, задача сводится к нахождению значений $P_i(t)$, при которых показатель безопасности системы $P_{\text{с}}(t)$ удовлетворяет условию $P_{\text{с}}(t) \geq P_{\text{тр}}(t)$, а суммарная стоимость минимальна, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &C_\Sigma(P_c) = \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i \ln\left(1-P_i\right)+\beta_i \ln\left(P_i\right)\right] = \min_{P_i};\\ &P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\ \forall\ 0 < P_i < 1.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Методы решения задачи оптимизации

В общем случае для отыскания условного экстремума функции многих переменных используется метод множителей Лагранжа [1, 5]. С помощью данного метода устанавливаются необходимые условия, позволяющие идентифицировать точки оптимума в задачах оптимизации с ограничениями-равенствами. При этом задача с ограничениями (задача условной оптимизации) преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации, в которой фигурируют некоторые неизвестные параметры, называемые множителями Лагранжа.

Сущность метода заключается в том, что для функции многих переменных необходимо решить задачу

$$C_\Sigma(P_1, P_2, \dots, P_n) \Rightarrow \min_{P_i \in P} \quad (16)$$

при условии

$$\begin{aligned} &g_1(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0;\\ &g_2(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &g_i(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &g_m(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0, \quad m < n,\end{aligned} \quad (17)$$

где $g_i(P_1, P_2, \dots, P_i)$, $i=\overline{1,m}$ – функции ограничений, определяющие множество допустимых решений.

Для того чтобы свести эту задачу условной минимизации к задаче безусловной минимизации, введем множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и составим расширенную функцию (функцию Лагранжа):

$$\begin{aligned} &C_\Sigma^*(P_1, P_2, \dots, P_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) =\\ &= C_\Sigma(\mathbf{P}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{P}),\end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{P}$ – вектор с компонентами $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Из выражения (18) видно, что, каковы бы ни были значения λ_i, при выполнении ограничений $g_i(\mathbf{P})$ значение функции $C_\Sigma^*(\mathbf{P})$ совпадает со значением функции $C_\Sigma(\mathbf{P})$, поэтому необходимые условия минимума функции будут следующие:

$$\frac{\partial C_\Sigma^*(\mathbf{P})}{\partial P} = 0;\ \frac{\partial C_\Sigma^*(\mathbf{P})}{\partial \lambda} = g(\mathbf{P}) = 0, \quad (19)$$

где λ – вектор с компонентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Соответственно, для нахождения стационарной точки, в которой будут выполнены необходимые условия экстремума, заключающиеся в том, что производная данной функции равна нулю или не существует, следует решить систему алгебраических уравнений (19) размерности $m + n$ (n оптимизируемых параметров и m вспомогательных переменных – множителей Лагранжа).

С помощью метода множителей Лагранжа можно получить необходимые условия и в задаче нелинейного программирования с ограничениями в виде неравенств

$$\begin{aligned} &g_1(P_1, P_2, \dots, P_n) \ge 0;\\ &g_2(P_1, P_2, \dots, P_n) \ge 0;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &g_m(P_1, P_2, \dots, P_n) \ge 0, \quad m < n.\end{aligned} \quad (20)$$

В этом случае ограничения в виде неравенств (20) сводятся к ограничениям в виде равенств, для чего вводятся дополнительные переменные $\delta_i^2 \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, m$, а ограничения записываются в виде

$$\begin{aligned} &g_1(P_1, P_2, \dots, P_n) - \delta_1^2 = 0;\\ &g_2(P_1, P_2, \dots, P_n) - \delta_2^2 = 0;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &g_m(P_1, P_2, \dots, P_n) - \delta_m^2 = 0, \quad m < n.\end{aligned} \quad (21)$$

Функция Лагранжа примет вид

$$C_\Sigma^*(P, \lambda, \delta) = C_\Sigma(P) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[g_i(P) - \delta_i^2\right]. \quad (22)$$

Запишем систему уравнений из условия равенства нулю градиента функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_\Sigma^*(P)}{\partial P} = \operatorname{grad} C_\Sigma(P) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i'(P) = 0;\\ \dfrac{\partial C_\Sigma^*(P)}{\partial \lambda} = g_i(P) - \delta_i^2 = 0;\\ \dfrac{\partial C_\Sigma^*(P)}{\partial \delta} = -2\lambda_i\delta_i = 0.\end{cases} \quad (23)$$

Из представленной системы уравнений (23) следует, что для каждого из уравнений либо $\lambda_i = 0$, либо $\delta_i = 0$. В первом случае i-е ограничение не активно и входит в функцию Лагранжа с нулевым весом. Во втором случае минимум достигается при выполнении условия $g_i(P) = 0$, вклад этого слагаемого также нулевой. При этом необходимые условия (23) называются условиями Куна–Таккера [5].

Таким образом, на основании метода множителей Лагранжа минимизация стоимостных показателей безопасности СТС может быть достигнута путем решения системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial P_1}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\alpha_i \ln\left(1-P_i\right)+\beta_i \ln\left(P_i\right)\right]+\lambda P\right\}=0; \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad\quad\quad ; \\ \dfrac{\partial}{\partial P_n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\alpha_i \ln\left(1-P_i\right)+\beta_i \ln\left(P_i\right)\right]+\lambda P\right\}=0; \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\alpha_i \ln\left(1-P_i\right)+\beta_i \ln\left(P_i\right)\right]+\lambda P\right\}=0; \\ P(t)-\prod\limits_{i=1}^{n} P_i(t)=0. \end{array}\right\} \quad (24)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Последнее уравнение системы (24) $P_c(t)=\prod\limits_{i=1}^{n} P_i(t)$ есть не что иное, как уравнение связи.

В результате дифференцирования системы (24) получим для первых n уравнений следующую зависимость:

$$\frac{\alpha_i}{1-P_i}+\frac{\beta_i}{P_i}+\frac{\lambda P}{P_i}=0 \quad (25)$$

Обозначив $\lambda P=\nu$ и преобразовав выражение (25), получим

$$P_i(t)=\frac{\nu+\beta_i}{\nu+\beta_i+\alpha_i}. \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в уравнение связи, получаем

$$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n} P_i(t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\nu+\beta_i}{\nu+\beta_i+\alpha_i}. \quad (27)$$

Из уравнений (24) и выражения (27) видно, что между $P_c(t)$ и $P_i(t)$ имеется сложная зависимость, затрудняющая непосредственное выражение $P_i(t)$ через $P_c(t)$. В этом случае задачу оптимизации можно решать методом имитационного моделирования [1, 2, 7].

Модель уравнения связи и результаты моделирования

В тех ситуациях, когда между показателями безопасности системы имеется сложная функциональная зависимость $P_c(t)=f\left\{P_1(t),P_2(t),\ldots,P_n(t)\right\}$, т. е. задача является многомерной (многопараметрической) задачей оптимизации, на первом этапе ее решения возникает необходимость в разработке математической модели уравнения связи.

Модель строится путем системного анализа опасности СТС и логического представления сценариев развития опасных состояний, отражающих причинно-следственный механизм возникновения происшествия. В качестве исходных событий рассматриваются отдельные предпосылки (отказы, нарушения, отклонения, воздействия и т.п.), приводящие к происшествию данного вида [1, 4, 6].

Для формализации разработанных сценариев опасных состояний применяются математические методы вычисления истинности функций алгебры логики, позволяющие непосредственно получить аналитические зависимости для функции возникновения происшествия. При этом полученная математическая модель безопасности СТС позволяет проводить оптимизацию параметров безопасности для каждого элемента с учетом их структурной значимости, с точки зрения их влияния на показатели риска аварий и катастроф.

В качестве примера рассмотрим некоторый упрощенный сценарий перехода СТС в опасное состояние (рис. 3) в результате возникновения множества различных предпосылок к происшествию (ПП) с вероятностями $\left\{Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5\right\}$.

Логическая функция опасного состояния

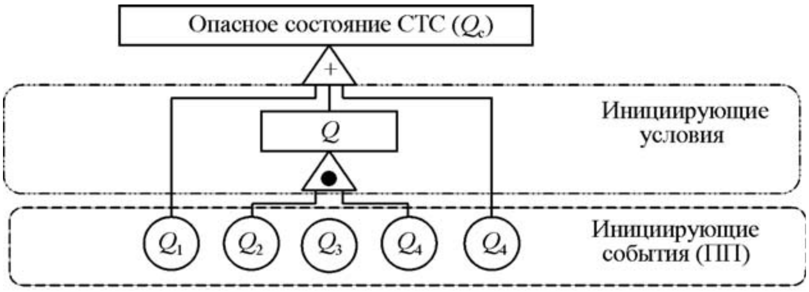


Рис. 3. Логическая модель сценария опасного состояния сложной системы

(ФОС) системы имеет вид

$$Q_c = Q_1 \vee Q_5 \vee (Q_2 \wedge Q_3 \wedge Q_4), \qquad (28)$$

где $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5$ – соответственно вероятности возникновения предпосылок к происшествию; $\vee, \wedge$ – знаки оператора логического сложения (дизъюнкции) и умножения (конъюнкции).

Логическая ФОС (28) является бесповторной и монотонной, поэтому вероятностная функция опасного состояния СТС будет иметь вид

$$Q_c = 1-(1-Q_1)(1-Q_5)(1-Q_2\,Q_3\,Q_4),$$

или

$$Q_c = 1 - P_1P_5\left[1-(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)\right]$$

$$\forall\ P_i = 1 - Q_i. \qquad (29)$$

С точки зрения наглядности результатов моделирования исходную многопараметрическую задачу оптимизации $C_\Sigma(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5) \to \min$ сведем к двухпараметрической задаче путем принятия следующего допущения:

$$P_1 = P_5;\ \ P_2 = P_3 = P_4.$$

В целом принятое допущение не влияет на общность полученных результатов и выводов. Исходные данные, аналитические зависимости математической модели и результаты оптимизации показателей безопасности элементов СТС, как задачи поиска условного экстремума функции двух переменных $C_\Sigma(P_1,\ P_2) \to \min\limits_{P_1, P_2}$, представлены на рис. 4.

Анализ результатов моделирования показал, что предложенный подход учитывает как структурную значимость отдельных элементов системы с точки зрения их влияния на безопасность системы в целом (см. рис. 3), так и стоимостные затраты на обеспечение требуемых значений параметров безопасности. Так, с учетом структурной значимости элементов и принятых исходных данных минимум суммарных затрат $C_\Sigma(P_1, P_2) = 9{,}075 \cdot 10^5$ у.е. будет обеспечен при оптимальных значениях показателей безопасности $P_1 = P_5 = 0{,}9667853$ и $P_2 = P_3 = P_4 = 0{,}66620427$. При этом результаты моделирования подтвердили универсальность, адекватность и работоспособность разработанного математического аппарата при решении многопараметрических задач оптимизации безопасности СТС, что позволяет формализовать процессы принятия решений с применением современных информационных технологий.

Заключение

Разработанные математические модели позволяют учитывать ситуационные особенности потенциально опасных объектов и проводить оптимизацию показателей безопасности сложных систем путем соизмерения эксплу-атационных затрат с прогнозируемым риском аварий и катастроф. Показан способ решения задачи оптимизации показателей безопасности СТС по критерию минимума суммарных затрат (15) методом множителей Лагранжа. Разработанные модели позволяют автоматизировать процесс решения задач оптимизации требований к безопасности сложных систем с помощью программных комплексов MATHCAD и MATLAB, которые интуитивно понятны для программирования, имеют большой набор встроенных функций и простой графический редактор. Универсальность, адекватность, эффективность и чувствительность моделей к исходным данным и параметрам оптимизации подтверждена результатами компьютерного моделирования.

Список литературы

1. *Майструк А.В.* Управление безопасностью эксплуатации сложных технических систем: Математические методы и практика их применения. – М.: ВА РВСН им. Петра Великого, 2007. – 256 с.
2. *Острейковский В.А.* Теория надежности: учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2003. – 463 с.
3. *Северцев Н.А.* Системный анализ и моделирование безопасности: учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2006. – 462 с.
4. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Политехника, 2000. – 248 с.
5. *Корниенко В.П.* Методы оптимизации: учебник. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.
6. *Майструк А.В., Майструк А.А., Боркин В.С.* Моделирование безопасности эргатических систем // Изв. МГИУ. Естественные и технические науки. № 3(26). 2012. С. 53–58.
7. *Майструк А.А., Майструк А.В., Резчиков Е.А.* Моделирование безопасности сложных систем статистическими методами // Проблемы безопасности XXI века и пути их решения: Сб. тр. Международных научных чтений «Белые ночи – 2012». – Киев: УНО МАНЭБ, 2012. С. 276–288.

Материал поступил в редакцию 03.06.13.

Исходные данные

$Cy := 867935 \quad R\Delta := 23569 \quad P10 := 0.999 \quad P20 := 0.91 \quad P1 := 0.7, 0.725 .. 0.999$

$C\Delta 1 := 32500 \quad C\Delta 2 := 13500 \quad C1 := 372509 \quad C2 := 147250 \quad P2 := 0.5, 0.525 .. 0.91$

Математическая модель ФОС СТС

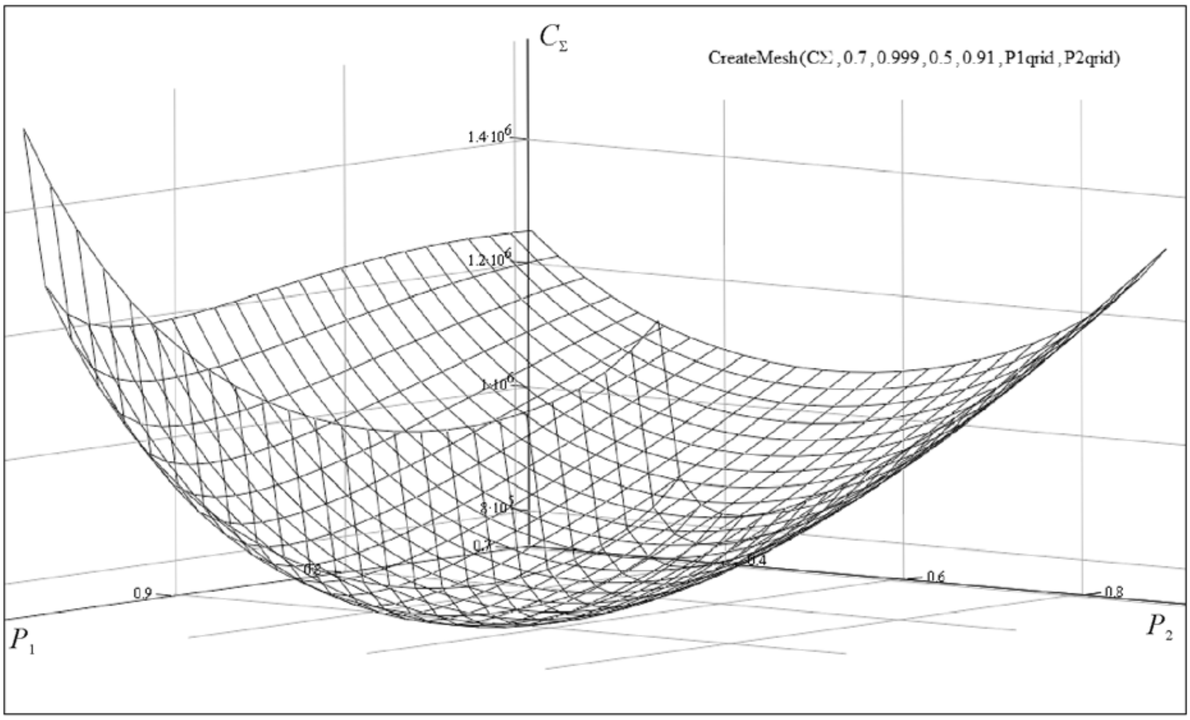
Принятые допущения $\quad P1 := P5 \quad P2 := P3 \quad P2 := P4$

$$Qc(P1,P2) := (1-P2)^3 + 2(1-P1) - 2(1-P1)\cdot(1-P2)^3 - (1-P1)^2 - (1-P1)^2\cdot(1-P2)^3$$

$$Qc0 := (1-P20)^3 + 2(1-P10) - 2(1-P10)\cdot(1-P20)^3 - (1-P10)^2 - (1-P10)^2\cdot(1-P20)^3$$

$$C\Sigma(P1,P2) := 2\left(C\Delta 1 + C1\cdot\frac{\ln(1-P1)}{\ln(1-P10)}\right) + 3\left(C\Delta 2 + C2\cdot\frac{\ln(1-P2)}{\ln(1-P20)}\right) + \left[R\Delta + Cy\cdot(1-Pc0)\cdot\frac{\ln(Pc(P1,P2))}{\ln(Pc0)}\right]$$

$$Qc(P1,P2) := (1-P2)^3 + 2(1-P1) - 2(1-P1)\cdot(1-P2)^3 - (1-P1)^2 - (1-P1)^2\cdot(1-P2)^3 \qquad Pc(P1,P2) := 1 - Qc(P1,P2)$$



CreateMesh(CΣ, 0.7, 0.999, 0.2, 0.91, 25, 25)

Given

$0.7 < P1 \le 0.99$

$0.6 < P2 \le 0.81$

$$0.1 \ge (1-P2)^3 + 2(1-P1) - 2(1-P1)\cdot(1-P2)^3 - (1-P1)^2 - (1-P1)^2\cdot(1-P2)^3$$

Результаты оптимизации

$$\text{Minimize}(C\Sigma, P1, P2) = \begin{pmatrix} 0.9667853 \\ 0.66620427 \end{pmatrix}$$

$$C\Sigma(P1,P2) = 9.075 \times 10^5$$

Фрагмент программы

Рис. 4. Результаты оптимизации показателей безопасности элементов сложных систем как функции многих переменных (фрагмент, полученный с помощью системы MATHCAD)

МАЙСТРУК
Александр
Владимирович
E-mail: **maisav2981958@mail.ru**
Тел. **(499) 232-36-61**
Моб.: **(906) 034-01-01**

Доктор технических наук, профессор кафедры безопасности жизнедеятельности и промышленной экологии ФГБОУ ВПО МГИУ, лауреат премии Министерства обороны РФ. Действительный член Академии военных наук РФ, академик Международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности. Сфера научных интересов – системный анализ и моделирование сложных технических систем, опасных процессов в техносфере. Автор более 150 научных работ, в том числе одной монографии.

МАЙСТРУК
Александр
Александрович
E-mail: **maisav2981958@mail.ru**
Тел. **(495) 620-37-19**

Аспирант ФГБОУ ВПО МГИУ. Сфера научных интересов – охрана труда и промышленная безопасность. Автор 7 научных публикаций.

РЕЗЧИКОВ
Евгений Алексеевич
E-mail: **rea4@mail.msiu.ru**
Тел. (**495) 620-37-19**

Кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности и промышленной экологии ФГБОУ ВПО МГИУ. Академик Международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности. Сфера научных интересов – обеспечение промышленной безопасности, охрана труда и проектирование литейных цехов. Автор более 350 публикаций, в том числе трех монографий.