

УДК 517.587+519.651.3+534.4

АНАЛИЗ ЗВУКОВЫХ И ВИБРАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО СПЕКТРАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА*

А.К. Бритенков, Н.С. Степанов

Описание экспериментальных сигналов с помощью разложения сигналов обобщенными рядами Фурье, в частности, функциями на основе классических полиномов непрерывного аргумента, осложняется проблемами нарушения ортогональности при численной реализации и потери счетной устойчивости. Для устранения указанных явлений предложен метод, точность которого превышает точность аналогичных методов на несколько порядков. Проведены исследования по использованию классических ортогональных полиномов непрерывного аргумента для описания виброакустических сигналов и подавления реверберации в модели распространения звука в слабодиспергирующей среде. Показаны преимущества этого класса ортогональных функций в данных задачах по сравнению с тригонометрическими функциями. Предложенные методы обработки применимы для различных видов сигналов.

Ключевые слова: обобщенный спектрально-аналитический метод, классические ортогональные полиномы и функции, матрица Грама, функции Лагерра, полиномы Эрмита, квадратуры Гаусса, реверберация, слабодиспергирующая среда, гидроакустика.

Введение

На фоне широкого распространения спектрального гармонического Фурье-анализа [1] другие системы ортогональных функций продолжают оставаться малоисследованными, особенно в приложении к вычислительным задачам. Однако традиционно применяемый в обработке сигналов гармонический Фурье-анализ не всегда эффективен для описания коротких импульсных сигналов. При этом тригонометрические ряды Фурье фактически являются частным случаем ортогональных функций. Так, тригонометрические и гиперболические функции могут быть получены как частный случай функций Якоби [2]. Разработка и совершенствование алгоритмов обработки сигналов и потоков данных с помощью ортогональных

базисов на основе классических полиномов непрерывного аргумента расширяет возможности обобщенного спектрально-аналитического метода (ОСАМ), разработанного в конце XX века Ф.Ф. Дедусом [2] для описания процессов, распознавания сигналов [3] и прогнозирования потоков данных. Сходство классических ортогональных базисов ОСАМ с реальными радиотехническими и звуковыми сигналами позволяет эффективно использовать ОСАМ в задачах обработки информации. В задачах виброакустики и исследования подобных сигналов в качестве базисных функций также целесообразно применять ортогональные функции на основе классических полиномов непрерывного аргумента.

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, регистрационный номер 2.1615.2011 НИР «Исследование сложных объектов различной физической природы современными радиофизическими методами».

Обработка информации с помощью разложения сигналов обобщенными рядами Фурье при численной реализации осложняется такими проблемами, как нарушение ортогональности и потеря счетной устойчивости при использовании базисных функций высокого порядка. Увеличение производительности компьютеров не решает эту проблему, а предъявляет специфические требования к алгоритмам построения таких функций для исследования и обработки различных сигналов, что подтверждается работами Дж. Шена [4] и других ученых. Стремление к повышению информативности спектрального анализа [1] привело к возникновению и развитию вейвлет-анализа, пересекающегося в некоторых аспектах с ОСАМ. Например, в работе Б.П. Графова и И.В. Графовой [5] рассматривается использование функций Лагерра в качестве вейвлетов [6], а в работах А.Л. Вировлянского, А.А. Стромкова и других авторов [7] отражено применение эмпирических ортогональных функций, наиболее подходящих для описания и обработки гидроакустических сигналов.

В компьютерной обработке сигналов для получения частотного спектра в подавляющем большинстве случаев используется быстрое преобразование Фурье (БПФ) в сочетании с оконными преобразованиями [8]. Но, как показано в работах В.А. Зверева, характер оконного преобразования при некорректном использовании численных методов приводит к искажению информации [9]. До работ Никифорова А.Ф., Уварова В.Б. [10] (60-70-е годы XX века) классические полиномы и функции непрерывного аргумента, составляющие ядро ОСАМ, называли специальными функциями математической физики [11]. ОСАМ является обобщением проекции функции одного аргумента на любую ортогональную систему функций [12]. Классические полиномы и функции непрерывного аргумента, составляющие набор основных базисов ОСАМ, используются в радиотехнике, оптике, механике и входят в пакеты общепотребительных программ, но системно как класс остаются малоисследованными.

Цель настоящей работы – исследование некоторых особенностей численной реализации базисных функций ОСАМ, таких как нарушение ортогональности и потеря устойчивости вычислительных процедур – связана с поиском решения указанных проблем для практического использования ОСАМ для описания

виброакустических сигналов и моделирования распространения звука в слабодиспергирующей среде со слабым затуханием при наличии дискретных отражений.

Обобщенные ряды Фурье и классические ортогональные базисы

Общий вид ортогонального разложения (ряда Фурье) – проекция интегрируемой в пространстве L^2 с квадратом непрерывной функции – на систему ортогональных (с весом $\rho(t)$) базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$

$$f(t) = \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(t), \quad (1)$$

где постоянные A_n – коэффициенты разложения $f(t)$ по базису $\{\varphi_n(t)\}$, удовлетворяющему условию ортогональности

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle &= 0 \text{ при } i \neq j \\ \text{и } \langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle &\neq 0 \text{ при } i = j \end{aligned} \quad (2)$$

в смысле функционала скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ с весом $\rho(t) > 0$ на отрезке $[a, b]$

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)\rho(t)dt, \quad (3)$$

где $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$.

Коэффициенты A_n в (1) определяются системой уравнений, образующих матрицу Грама, и полученной умножением ряда (1) на систему базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$:

$$\sum_{i=0}^N A_i \langle \varphi_i, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle, \quad n=0, \dots, N. \quad (4)$$

Условие ортогональности (2) базиса $\{\varphi_i(t)\}$ приводит к сокращению числа элементов такой матрицы до единственной диагонали

$$A_n = \frac{\langle f(t), \varphi_n(t) \rangle}{\|\varphi_n(t)\|^2} \text{ для } n=0, \dots, N. \quad (5)$$

Для любого ортогонального разложения в ряд Фурье (1) выполняется неравенство Бесселя (равенство Ляпунова-Стеклова при $N \rightarrow \infty$), характеризующее полноту системы $\{\varphi_j(t)\}$

$$\|f(t)\|^2 \geq \sum_{n=0}^N A_n^2 \|\varphi_n\|^2, \quad (6)$$

где определена норма функции

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}. \quad (7)$$

Формула (1) затрагивает некоторые фундаментальные вопросы теории ортогональных

рядов, а именно, нормировку ортогональных базисов и вычисление коэффициентов Фурье-Эйлера. Для функций f и g , представленных рядами (1), справедливо равенство

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n \|\varphi_n\|^2, \quad (8)$$

которое вводит скалярное произведение в пространстве коэффициентов разложения и устанавливает изоморфизм между исходным функциональным пространством и пространством коэффициентов $\{A_n\}$. Согласно (8) для скалярного произведения (3), коэффициенты разложения в ортогональный ряд (1) являются преобразованием Фурье в пространстве Гильберта [1]:

$$A_n = \|\varphi_n\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) p(t) dt. \quad (9)$$

Решение гипергеометрического уравнения

$$A(t)y'' + B(t)y' + \lambda_k y = 0, \quad (10)$$

в котором коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ не зависят от k , а λ_k не зависит от t , порождает ортогональные полиномы непрерывного аргумента, называемые классическими [11]. Такие полиномы, также как и соответствующие им функции [14], удовлетворяют разностным уравнениям

$$\varphi_{n+1}(t) = (a_n + b_n t) \varphi_n(t) + c_n \varphi_{n-1}(t), \quad (11)$$

где a_n, b_n, c_n – коэффициенты, не зависящие от t .

Значения для таких полиномов начального порядка, вычисляемых согласно (11), следующие:

$$\varphi_{-1}(t) = 0, \quad \varphi_0(t) = 1. \quad (12)$$

Общие свойства классических ортогональных многочленов [12] объединяют их в отдельный класс функций. Удобство использования таких базисов в задачах обработки информации и синтеза сигналов связано с их специфическими качествами, например, формой базис-

ных функций $\{\varphi_n(t)\}$ (рис. 1, 2) и сходством с собственными функциями математических операций (например, преобразования Лапласа). Форма $l_n(t)$ совпадает с импульсной переходной характеристикой линейной системы из R, L, C -элементов, а также хорошо повторяет ЛЧМ-сигнал [9].

На рисунке 2 прослеживается явное сходство формы функции $h_n(t)$ и характерного радиоимпульса.

Описание и синтез виброакустических сигналов

Сравнение спектров (гармонического Фурье-анализа) базисных функций высокого порядка [13] на основе классических полиномов непрерывного аргумента [13, 14] и виброакустических сигналов демонстрирует явное сходство некоторых таких функций [10] с реальными сигналами указанного класса. Многие ортогональные функции [1] напоминают реальные звуки, и на их основе удобно синтезировать подобные им сигналы [15]. Например, показанные на рис. 1 функции Лагерра

$$l_n(t) = \sqrt{m} e^{-0.5mt} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-mt)^k, \quad (13)$$

где $m > 0$ – масштабный коэффициент, изменяющий эффективную длину $l_n(t)$. Эти функции используются для описания процессов в радиотехнических цепях. Кроме того, они удобны для аппроксимации звуков типа звона колокола или выстрела из ружья. Функции Лагерра оптимальны также для представления переходных процессов и сигналов вида $f(t) = 1 - \eta(t)$, где $\eta(t)$ – функция Хевисайда. Напоминающие радиоимпульсы функции Эрмита (рис. 2)

$$h_n(x) = \sqrt{\exp(-x^2)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (14)$$

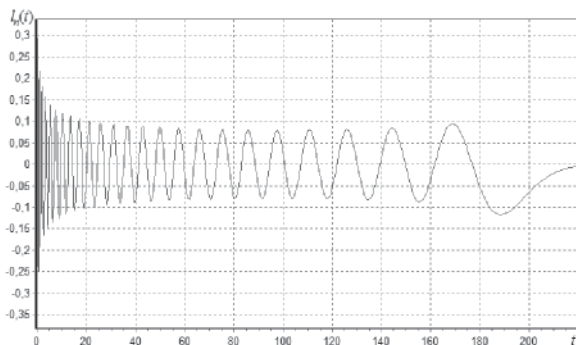


Рис. 1. Функция Лагерра $l_n(t)$ порядка $n=50, m=1$

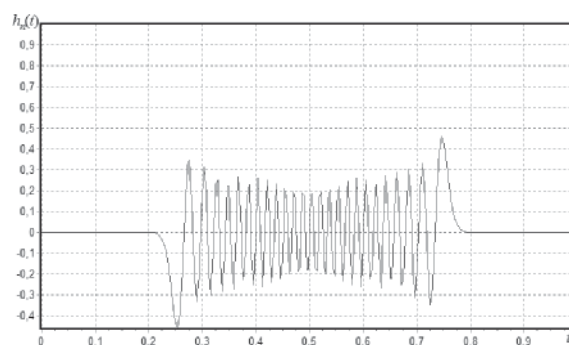


Рис. 2. Функция Эрмита $h_n(t)$ порядка $n=50$

при их акустическом воспроизведении звучат похоже на мяуканье, или речевые фонемы.

Упрощение и оптимизация описания данных предполагает исключение разложения (1) затухающего сигнала возрастающими ортогональными базисами и наоборот (описания возрастающего или осциллирующего сигнала затухающими функциями), а также аппроксимации затухающих или возрастающих сигналов периодическими функциями. Кроме того, согласование длительности сигнала и эффективного радиуса базисной функции [19] сокращает длину ряда (1). Обычно ортогональные базисы (как и реальные сигналы) определены на конечном или полубесконечном интервале. Ортогональные базисы, определенные на $[0, T]$, согласуются с помощью линейной подстановки $T_c = T$. Для базиса $\{\varphi_i(t)\}$, определенного на $[0, \infty]$, нелинейная подстановка вида $x = 1 - 2e^{-mt}$, где x – новый аргумент, и изменение масштабного коэффициента m приводит к сжатию или растяжению «эффективного» диапазона $\{\varphi_i(t)\}$ по оси абсцисс. В обоих случаях правильно выбранный масштабный коэффициент m обеспечивает минимальную длину ряда $N = N_{min}$ при необходимой точности аппроксимации. Такая оптимизация возможна с помощью вычисления относительной интегральной квадратичной ошибки $\theta_N(m)$ как функции масштабного коэффициента m и длины ряда N :

$$\theta_N(m) = \frac{\int_0^T \left[f(t) - \sum_{n=0}^N A_n(m) \varphi_n(mt) \right]^2 \rho(t) dt}{\int_0^T f^2(t) dt}, \quad (15)$$

где $\rho(t)$ – весовая функция базисных функций $\{\varphi_i(t)\}$.

Минимум $\theta_N(m)$ задает оптимальный масштаб $m = m_{opt}$ при заданной длине N ряда (1):

$$\theta_N(m_{opt}) = \min_{m>0} \theta_N(m). \quad (16)$$

Поскольку ошибка $\theta_N(m)$ монотонно убывает при увеличении N (хотя ее зависимость от m является более сложной [1]), при m_{opt} и заданной точности аппроксимации сокращается и длина ряда.

Если рассматривать квадрат функции как плотность распределения, то можно определить средний радиус этого распределения [13]. Так, для функций Лагерра эффективная длительность линейно зависит от N :

$$\int_0^{\infty} t L_N^2(t) e^{-t} dt = 2N + 1. \quad (17)$$

В качестве начального приближения для решения оптимизационной задачи (16) используется значение m , полученное при согласовании эффективных интервалов аппроксимируемой функции и базисной функции максимального порядка. Расчет плотности распределения для функций Эрмита (14) показал, что эффективная длительность имеет более сложную зависимость от n

$$R_n = 2^{2n+1} n! \sum_{k=0}^n \frac{(-0,4)^{k+1}}{k!^3} \left(\Gamma(k+1, 2t) \Big|_0^{\infty} \right), \quad (18)$$

где Γ – гамма-функция [11].

Зависимость (18) позволяет провести подстройку интервала для оптимизации разложения.

Подстройка базиса с помощью таких адаптивных процедур позволяет уменьшить эффективную длину ортогонального ряда до 30 членов для 4500 отсчетов сигнала при описа-

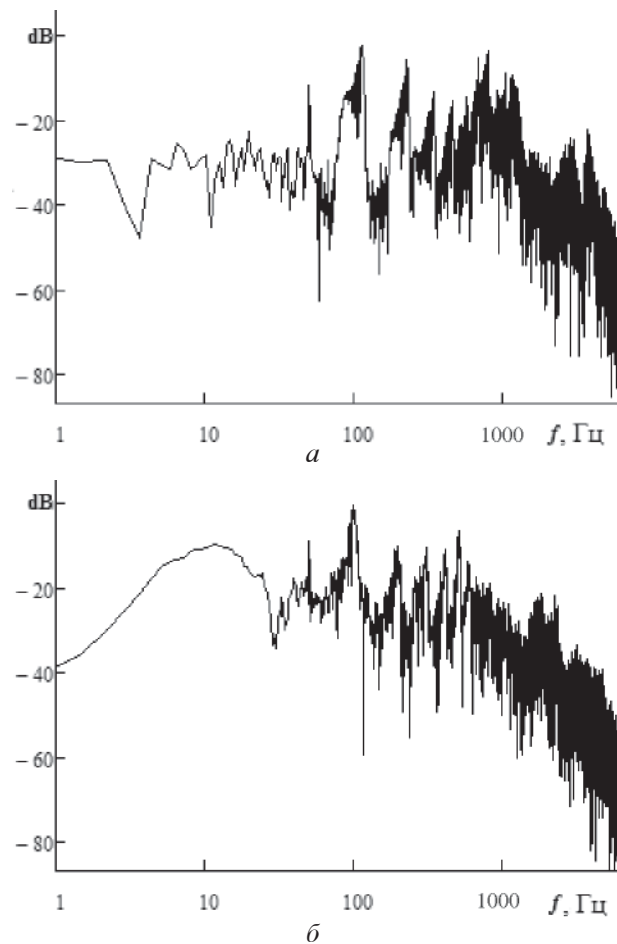


Рис. 3. Гармонический Фурье-спектр звуков а и б

нии речевых фонем и субфонем длительностью до 0,5–1 сек с относительной точностью около 5–8%. Для такого же сигнала гармоническому ряду Фурье потребуется на порядок большее число членов, поскольку речь содержит частоты выше 1,2–3 кГц (рис. 3). Длительность сигналов 1,8 сек, дискретизация и квантование по уровню 12 кГц, 16 бит. Наличие высоких частот (2,5 кГц и выше) в спектре требует большого количества членов при описании тригонометрическими рядами.

Тем не менее, для аппроксимации длительных сигналов с большим количеством гармоник тригонометрические ряды оказываются более эффективны. Можно условно разделить представление звуковых сигналов: музыкальные сигналы компактнее аппроксимируются гармоническими функциями, а речевые и импульсные – классическими ортогональными многочленами и производными от них функциями (Лагерра, Эрмита, Лежандра, Чебышева, Майкснера и т.д.). Наиболее эффективно во втором случае использование функций дискретного аргумента ввиду цифрового (дискретного) представления данных в компьютерной обработке сигналов.

Нарушение ортогональности базисов непрерывного аргумента и потеря счетной устойчивости вычисления функций высокого порядка

При применении ортогональных систем приходится сталкиваться с вычислительными проблемами [13], в частности, с потерей ортогональности при численном интегрировании скалярного произведения (5, 9) $\xi_{n,m} = (\varphi_n(t)\varphi_m(t))$. На рисунке 4 показано, что нарушение ортогональности, вызванное дискретизацией непрерывного аргумента, носит системный характер для функций 5–15 порядка и выше. Интегрирование проведено методом трапеций на отрезке $[0, 1]$, с шагом $d=0,02$.

Описание исследуемых сигналов в виде таблицы $f(t)=\{f_1(t_1), f_2(t_2), \dots, f_m(t_m)\}$ является аналогом функции дискретного аргумента. В задачах обработки экспериментальных данных часто требуется получить численно-аналитическое представление в виде ряда. Квадратурная формула Гаусса [11] аппроксимирует несобственные интегралы для подынтегральной функции вида $e^{-x}f(t)$, поэтому можно определить дискретный аналог скалярного произведения (3),

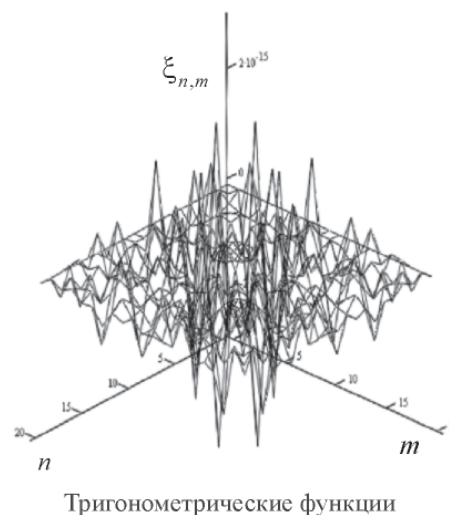
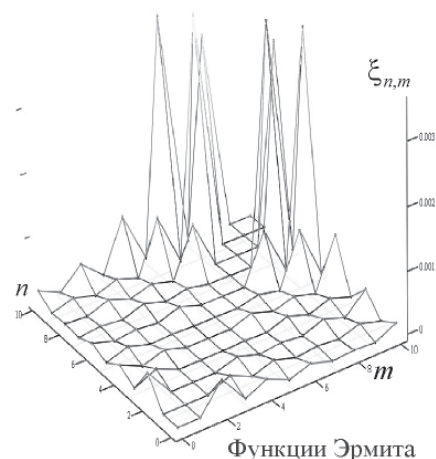
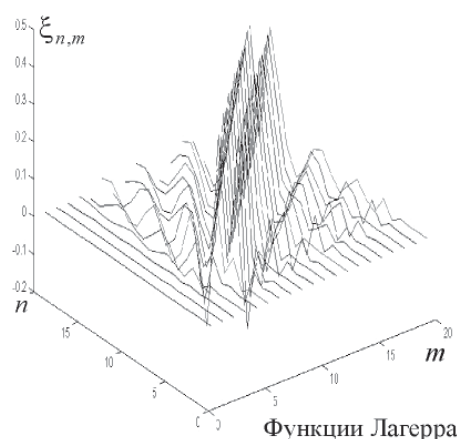


Рис. 4. Исследование нарушения ортогональности функций Лагерра, Эрмита и тригонометрических ($n=1 \div 20$), вызванное дискретизацией

входящего в формулу для вычисления коэффициентов разложения (9) в виде суммы

$$\int_a^b x(t)y(t)p(t)dt = \sum_{i=1}^m x(t_i)y(t_i)w_i \quad (19)$$

на заданной сетке при специальном выборе m узлов t_i и весов w_i , получаемых для базиса на основе ортогонального полинома p_n степени n [10]

$$w_i = \frac{a_n(p_{n-1}(t_i), p_{n-1}(t_i))}{a_{n-1}p'_n(t_i)p_{n-1}(t_i)}, \quad (20)$$

где a_n – коэффициент при старшей степени $p_n(t)$, $n \leq 2m - 1$.

В работе [10] показано, что вычисление узлов t_i происходит как поиск нулей полинома p_n [13]. Переход от первоначального массива значений $\{f_k(t_k)\}$ к неравномерной сетке $\{t_i\}$ можно осуществить с помощью интерполяции степенным многочленом.

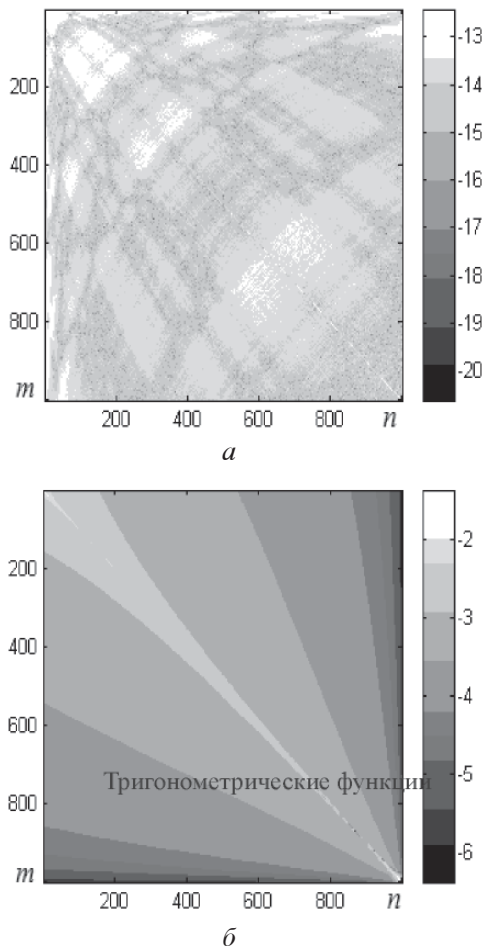


Рис. 5. Порядок ошибки (градации серого) вычисления элементов матрицы Грама для функций Лагерра ($0 \leq n \leq 1000$, $0 \leq m \leq 1000$) методом Гаусса (а) и методом прямоугольников (б). (Справа для каждой матрицы в столбце приведена шкала градации серого, соответствующая порядку ошибки)

Точность вычисления матрицы Грама (меры ортогональности) методом квадратур Гаусса–Лагерра (20) по сравнению с методом прямоугольников для функций на несколько порядков выше. Например, для функции Лагерра эта разница превышает 9 порядков (рис. 5). Фактически вычисление скалярного произведения и аппроксимация выполняется с точностью машинного представления чисел.

Другой актуальной проблемой для всех типов классических полиномов и функций на их основе является проблема вычисления функций высокого порядка [13]. Прямое вычисление базисных функций приводит к возникновению счетной неустойчивости (рис. 6, 7). Проблема существует и в пакетах прикладных программ, где встроены наиболее распространенные специальные функции. Так, функции $l_n(t)$ Лагерра (см. рис. 1) при прямом вычислении по формуле (13) подвержены проблеме счетной устойчивости. Исследования показали, что при таком вычислении, начиная с 33 порядка, на отрезке $[0, 150]$ число нулей $l_n(t)$ превышает порядок функции $l_n(t)$ (рис. 6). Результаты повторяются на разных компьютерных платформах и в общеупотребительных пакетах программ [13]. Согласно (13) значение функции $l_n(t)$ определяется двумя множителями – осциллирующего и неограниченно возрастающего полинома, и значением корня от убывающей весовой функции e^{-t} . Возможно, при больших значениях аргумента t эти множители приводят к переполнению машинного представления чисел и потере устойчивости

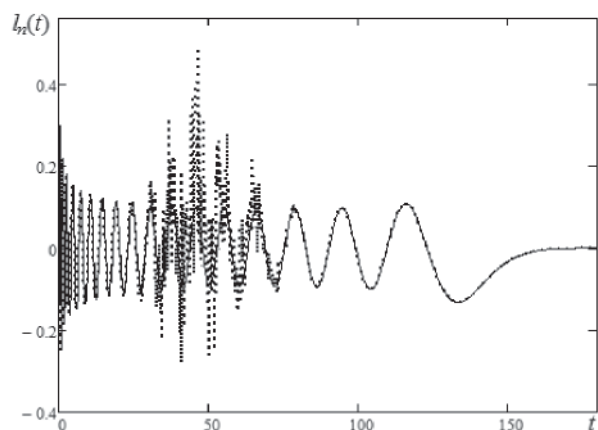


Рис. 6. Функция Лагерра (сплошная кривая) и значения $l_n(t)$, вычисленные по формуле (13) при $n=35$, $m=1$. (Пунктиром показано искажение формы $l_n(t)$ из-за потери счетной устойчивости при вычислении значений $l_n(t)$ «напрямую»)

вычислений. Тем не менее, в работе [13] показано, что их произведение является «хорошей» величиной в машинном представлении.

На рисунке 7 приведен пример вычисления функции Лагерра 40 порядка по явной формуле (13). Хорошо видно, что размах колебаний в области значений аргумента 100–160 превышает значение настоящей функции $l_n(t)$ на 2–3 порядка. На рисунке 8 показано, что функция $l_n(t)$ на основе степенного полинома имеет много больше нулей на малом отрезке $[40, 40+3 \cdot 10^{-12}]$, чем порядок образующего ее полинома $n=40$. Однако после некоторого значения аргумента (например, для $n=35$, $t=150$) вычислительный процесс становится снова устойчивым и, осциллируя, функция $l_n(t)$ затухает пропорционально e^{-t} (см. рис. 6), как это следует из (13). Данный феномен не имеет однозначного объяснения, однако более важно исключить подобные эффекты. Вычисление $l_n(t)$ с помощью соотношений (11), которые для функций Лагерра имеют вид

$$(n+1)l_{n+1}(t) = (2n+1-t)l_n(t) - nl_{n-1}(t), \quad (21)$$

приводит к последовательному накоплению ошибок. Значения $l_n(t)$, полученные по рекуррентным соотношениям (21) с начальными условиями (12) и вычисленные из (13), существенно отличаются уже для $n>30$.

Для устойчивого счета ортогональных функций Лагерра по рекуррентным формулам применен специальный алгоритм [13], когда на каждом шаге итерационного процесса (21) величины $l_n(t)$, $l_{n-1}(t)$ умножаются на $e^{-t/2n}$. За n циклов общий множитель составляет $e^{-1/2}$, т.е. величину множителя весовой функции для

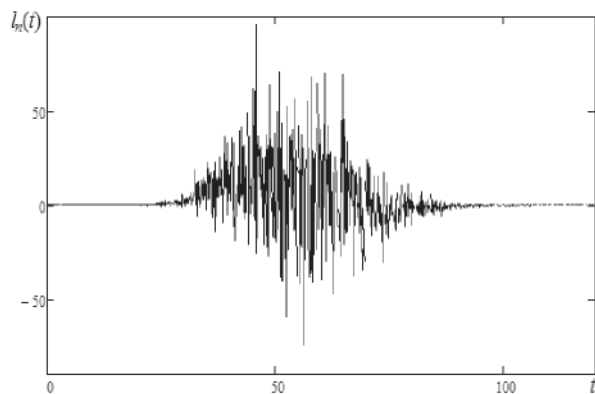


Рис. 7. Искажение формы функции Лагерра $l_n(t)$ из-за потери счетной устойчивости, вычисленной «напрямую» по формуле (13) при $n=40$, $m=1$

определения $l_n(t)$ из (13). Так можно вычислять функции $l_n(t)$ выше 1000-го порядка, и принципиальных ограничений на максимальный порядок не выявлено [13].

Построение эффективных алгоритмов вычисления функций высокого порядка и устранение выявленных эффектов остается актуальной задачей, несмотря на стремительный рост производительности компьютеров. Действительно, одни ортогональные функции на основе классических ортогональных полиномов выражаются через другие, и отмеченные проблемы существуют для всех типов полиномов и функций на их основе.

Реверберация в гидроакустическом канале и тестирование канала передачи данных ортогональными базисами непрерывного аргумента

При распространении волн на большие расстояния [16] реверберация порождает шумы, затрудняющие декодирование получаемой информации [9] и ограничивающие информационные возможности канала передачи данных.

На рисунке 9 приведена модель распростра-

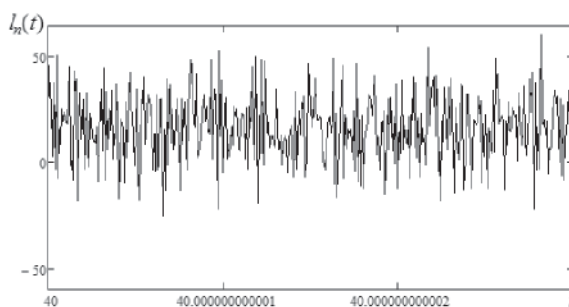


Рис. 8. Функция Лагерра $l_n(t)$ вычисленная «напрямую» на отрезке $[40, 40+\delta]$ по формуле (13) при $n=40$, $m=1$, $\delta=3 \cdot 10^{-12}$. Количество «нулей» функции на небольшом отрезке многократно превышает порядок функции $l_n(t)$

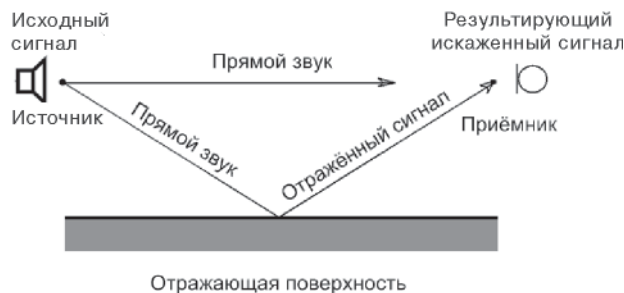


Рис. 9. Распространения гидроакустических волн в тонком слое. Модель свободного пространства с одной отражающей поверхностью

нения звука в слое слабодиспергирующей среды [17], состоящая из свободного пространства и отражающей поверхности. Согласно принятому приближению рассматривается случай мелкой воды – распространение звука в тонком слое. Излучаемый источником акустический сигнал $S(t)$ попадает в приемник, проходя через среду на пути распространения к приемнику, как без отражений, так и после одного или нескольких отражений. Результирующий, т.е. искаженный сигнал $S^*(t)$ в точке приема в этом случае состоит из суммы двух компонент – прямого сигнала $S(t)$ и ослабленного сигнала с задержкой

$$S^*(t) = S(t) + \alpha S(t - \tau), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \tau \ll T, \quad (22)$$

где α – коэффициент потерь; τ – задержка во времени [9].

Такую модель можно усложнить, например, вводя дополнительные отражения

$$S^*(t) = \alpha_0 S(t) + \sum_{i=1}^N \alpha_i S(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^N \alpha_i S(t - \tau_i), \quad (23)$$

где α_0, α_i – коэффициенты потерь; τ_i – задержка во времени одного отражения; N – число прошедших в приемник отражений.

В модели (22) при отсутствии дисперсии можно также учесть эффект Доплера, вызываемый движением границы. Так, деформация (искажение) исходного сигнала в мелкой воде при отражении от движущейся границы и в присутствии шума

$$S_{ш}^*(t) = \alpha_0 S(t) + \sum_{i=1}^N \alpha_i S\left((t - \tau_i)\left(1 + \frac{v_i}{c}\right)\right) + \eta(t), \quad (24)$$

где c – скорость звука в воде; v_i – скорость движения i -той отражающей поверхности в направлении гидроакустического канала (скорость поверхностных волн или скорость приповерхностного течения); $\eta(t)$ – аддитивный шум.

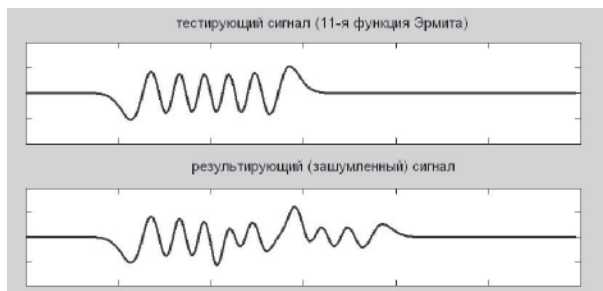


Рис. 10. Моделирование распространения сигнала в форме функции Эрмита (14) в плоском слое слабодиспергирующей среды согласно (22)

Важно отметить, что модель (24) справедлива лишь при отсутствии дисперсии D среды [16], т.е. при $D=0$. Описание (23) допускает обобщение и на случай непрерывного распределения задержек, когда в результате предельного перехода

$$\Delta\tau = (\tau_{i-1} - \tau_i) \rightarrow d\tau \quad (25)$$

сумма $\alpha_i S(t - \tau_i)$ в модели (23) стремится к интегральному распределению [9].

Выделение полезного сигнала на фоне помехи возможно только при заданных α и τ . Для решения этой задачи можно воспользоваться методом тестовых импульсов, пропуская через среду специальные сигналы до передачи $S(t)$, распространенным в гидро- и виброакустике [7, 17]. В качестве тестовых импульсов удобно использовать ортогональные базисные функции высокого порядка (рис. 11). Достаточно высокий порядок базисных функций необходим для локализации рабочего участка спектра (в смысле тригонометрического спектра Фурье) в области низкой дисперсии среды [15]. Для дисперсии D звука в морской воде

$$D = \frac{c_\infty - c_0}{c_0}, \quad (26)$$

где скорости для границ акустического диапазона c_0 и c_∞ отличаются незначительно, величина $D \leq 0,01$ [18]. Кроме того, ниже частоты релаксации $f_p = 120$ кГц [16]

$$c(\omega) = \sqrt{c_0^2 + \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} (c_\infty^2 - c_0^2)}, \quad (27)$$

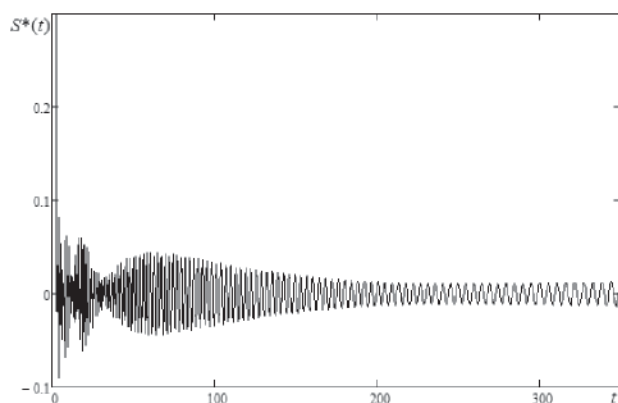


Рис. 11. Распространение в тонком слое слабодиспергирующей среды сигнала в форме функции Лагерра $L_n(t)$, $m=1$, $n=500$ (слева), описываемое моделью (22), и сигнала виде $L_n(t)$, $m=1$, $n=500$, зашумленного розовым шумом (справа), с учетом движения отражающей поверхности (24), $v/c=0,05$

где $c(\omega)$ – зависимость скорости звука в среде от частоты; τ – время релаксации, за которое величина возмущения среды уменьшается в e раз, можно применять базисные функции ОСАМ в качестве локационных импульсов.

Заранее определенный вид тестового импульса позволяет извлечь информацию из принятого сигнала о времени реверберации и затухании. Спектр тестовых импульсов целесообразно выбрать в полосе с минимальным естественным шумовым фоном. В гидроакустике эта полоса практически совпадает с частотой минимальной дисперсии от 200 Гц и выше [18].

Тестирование среды, описываемой моделью (23) сигналом $\varphi_n(t)$ в виде базисной функции ОСАМ, приводит к тому, что полученный приемником сигнал (см. рис. 9) содержит исходный $\varphi_n(t)$ и N отраженных сигналов:

$$\varphi_n^*(t) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_n(t - \tau_i). \quad (28)$$

Левая часть (28) может быть представлена разложением в ряд (1) с коэффициентами A_k по системе ортогональных (2) функций $\{\varphi_n(t)\}$. После скалярного умножения $\varphi_n(t)$ на (28) и разложения $\varphi_n^*(t)$ в ряд (1), согласно (2)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(t) \varphi_n(t) \rho(t) dt = \\ = \int_{t_0}^T \sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_n(t - \tau_i) \varphi_n(t) \rho(t) dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение (29) имеет пределы интегрирования $[t_0, T]$, вытекающие из соображений физичности (23) – отклик не может прийти раньше сигнала, а на бесконечности сигнал затухает из-за ограниченной энергии, излучаемой источником. В силу условия ортогональности (2) функций $\{\varphi_n(t)\}$ и в соответствии с определением нормы функции (7) интеграл в левой части (29) при $k=n$ равен квадрату нормы $\varphi_n(t)$

$$\begin{aligned} A_n \int_{t_0}^T \varphi_n^2(t) \rho(t) dt = A_n \|\varphi_n\|^2 = \\ = \sum_{i=0}^N \alpha_i \int_{t_0}^T \varphi_n(t - \tau_i) \varphi_n(t) \rho(t) dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно определению функции корреляции $K_{\varphi\varphi}^n(\tau)$ и ее симметрии интеграл в правой части (29) после замены переменных представляет собой автокорреляционную функцию

$R_{\varphi\varphi}^n(\tau)$ для ортонормального базиса:

$$A_n \|\varphi_n\|^2 = (T - t_0) \sum_{i=0}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^n(\tau_i),$$

$$\text{где } K_{\varphi\varphi}^n(\tau) = R_{\varphi\varphi}^n(\tau). \quad (31)$$

С учетом определения нормы функции (7) аналогично (28), (29) выражение (31) с использованием функции корреляции можно записать как

$$(T - t_0) \sum_{i=0}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^n(\tau_i) = \|\varphi_n\|^2 + (T - t_0) \sum_{i=1}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^n(\tau_i) \quad (32)$$

и далее привести к виду:

$$(A_n - 1) \|\varphi_n\|^2 = (T - t_0) \sum_{i=1}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^n(\tau_i). \quad (33)$$

В уравнении (33) содержится $2N$ неизвестных (в случае N отражений). После тестирования среды $2N$ базисными функциями $\varphi_n(t)$, например, с n по $2N$ порядка включительно, можно получить систему $2N$ нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} (A_n - 1) \|\varphi_n\|^2 = (T - t_0) \sum_{i=1}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^n(\tau_i) \\ (A_{n+1} - 1) \|\varphi_{n+1}\|^2 = (T - t_0) \sum_{i=1}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^{n+1}(\tau_i) \\ \dots \\ (A_{n+2N} - 1) \|\varphi_{n+2N}\|^2 = (T - t_0) \sum_{i=1}^N \alpha_i R_{\varphi\varphi}^{n+2N}(\tau_i) \end{cases} \quad (34)$$

Решениями такой системы являются N коэффициентов потерь α_i и N временных задержек τ_i . Использование ортогональных классических базисных функций [12] приводит к аналитическим решениям правых частей (34). Вычисление нормы в левой части этой системы также не представляет принципиальных сложностей [19] в силу свойств ОСАМ [2, 12].

Для восстановления сигнала на фоне реверберационной помехи (после определения коэффициента потерь α и задержки τ) с помощью обратного преобразования

$$S(t) = S^*(t) - \alpha S(t - \tau) \quad (35)$$

в рамках модели (22) с одной отражающей поверхностью (см. рис. 10), можно воспользоваться кепстральным анализом [9], последовательной итерационной методикой [19] или применить преобразование Лапласа. В последнем случае образ $F(p)$ сигнала $S(t)$ входит в интеграл Лапласа

$$F^*(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} S^*(t) dt, \quad (36)$$

где $F^*(p)$ – образ Лапласа искаженного сигнала; p – комплексная переменная.

В соответствии с выражением для образа, смещенного на время τ сигнала

$$S(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-p\tau} F(p). \quad (37)$$

В случае модели (22) для среды с одной отражающей поверхностью справедливо выражение

$$S^*(t) \Leftrightarrow (1 - \alpha e^{-p\tau}) F(p), \quad (38)$$

и для восстановления $S(t)$ согласно формуле Меллина обратное к (22) преобразование (35)

$$S^{**}(t) = \frac{t}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (39)$$

где $S^{**}(t)$ – сигнал после восстановления на основе значений τ и α , а также полученного образа $F(p)$ из известного «искаженного образа» $F^*(p)$

$$F(p) = \frac{F^*(p)}{1 + \alpha e^{-p\tau}} \quad (40)$$

и

$$S^{**}(t) = \frac{t}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{1 - \alpha e^{-p\tau}} F^*(p) dp. \quad (41)$$

Для корректного восстановления сигнала $S(t)$ точность определения τ должна составлять несколько процентов от $1/f_{\max}$, или, другими словами, $\tau \ll 1/f_{\max}$, где $f_{\max}$ – максимальная частота в спектре $S(t)$ (в смысле гармонического Фурье-разложения [1]). Если аналогично (15) ввести функционал интегральной ошибки $\theta_{\alpha, \tau}$ восстановления сигнала $S(t)$

$$\theta_{\alpha, \tau} = \|S(t) - S^{**}(t)\|^2, \quad (42)$$

то можно показать, что погрешность определения α в пределах 10–15% согласно упрощенной модели (22) с одной отражающей поверхностью позволяет обеспечить приемлемую точность восстановления сигнала $S(t)$. Это предоставляет возможность использования такого метода в качестве дополнительного инструмента в задачах подавления реверберации.

Заключение

Предложенные в работе алгоритмы расчета функций Лагерра высокого порядка и разложения произвольных сигналов на специально выбранной сетке с помощью квадратурных

формул Гаусса обеспечивают эффективное использование ОСАМ в вычислительных задачах, например, для синтеза и распознавания виброакустических сигналов. Показано, что речевые и импульсные звуковые сигналы наиболее компактно могут быть описаны классическими ортогональными многочленами и производными от них функциями. Модель гидроакустического канала и тестирование с помощью классических ортогональных функций непрерывного аргумента слабодиспергирующей среды с малым затуханием при условии дискретных отражений для поиска параметров реверберации имеет возможность обобщения на другие случаи реверберационных искажений при использовании ОСАМ для подавления мультипликативных помех.

Кроме задач виброакустики и аппроксимации переходных радиотехнических сигналов, указанные классы функций находят применение и в других областях, например, в оптике. Так, с задачей генерации световых полей тесно связана задача их спектрального анализа и разложения по набору мод (ортогональному базису). При прохождении через линейные оптические системы, описываемые функциями Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра, модовые пучки с точностью до масштаба сохраняют свою конфигурацию на любом расстоянии [20]. Ограниченность функций Эрмита и Лагерра определяет конечный эффективный радиус описываемых пучков и обеспечивает их точное воспроизведение в оптических системах.

Эффективность использования классических функций высокого порядка подтверждается работами, посвященными решению дифференциальных уравнений [4], исследованию случайных процессов и развитию вейвлет-анализа [5]. Потенциальные возможности, заложенные в обобщенном спектрально-аналитическом методе, позволяют успешно использовать его для решения задач, связанных с обработкой различного класса сигналов: в радиофизике – акустических [21], импульсного ядерного магнитного резонанса [22], модовых световых полей [20] и нелинейной оптики [23]; в биофизике – лазерной доплеровской флоуметрии [24]; в биологии – геномных тандемах [25]; в энергетике – потребление электроэнергии промышленным предприятием [26, 27].

Список литературы

1. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Изд-во: «Либроком», 2009. – 240 с.
2. Дедус Ф.Ф., Махортых С.А., Устинин М.Н., Дедус А.Ф. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. – М.: Машиностроение, 1999. – 357 с.
3. Dedus A.F., Dedus F.F., Makhortykh S.A., Ustinin M.N. Analytical description of multidimensional signals for solving problems of pattern recognition and image analysis // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. Vol. 3. P. 459–469.
4. Shen J. Stable and Efficient Spectral Methods in Unbounded Domains Using Laguerre Functions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2000. Vol. 38. No. 4. P. 1113–1133.
5. Grafov B.P., Grafova I.B. Theory of the wavelet analysis for electrochemical noise by use of Laguerre functions // Electrochemistry communications. 2000. Vol. 2. P. 386–389.
6. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1998. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
7. Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Любавин Л.Я., Стромков А.А. Эмпирические ортогональные функции в гидроакустических экспериментах // Методы и средства измерения физических величин: тез. докл. 3-й Всероссийской науч.-техн. конф. Нижний Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1998. С. 33.
8. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные преобразования. – Новосибирск: Наука, 1983. – 232 с.
9. Зверев В.А., Стромков А.А. Выделение сигналов из помехи численными методами. – Нижний Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2001. – 188 с.
10. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
12. Панкратов А.Н. О реализации алгебраических операций над рядами ортогональных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 12. С. 2121–2127.
13. Britenkov A.K., Pankratov A.N. Stable algorithms of adaptive approximation for acoustic signals description by orthohonal polynomials // Physics of Wave Phenomena. 2004. Vol. 12. No. 3 P. 168–174.
14. Kazuhiko A., Michitake K. Theory of Hypergeometric Functions // Springer Monographs in Mathematics. – Berlin–N.Y: Springer Verlag, 2011. Vol. P. 305 – 317.
15. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физматлит, 1959. – 572 с.
16. Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртенов В.М., Нечаев А.Г., Хилько А.И. Акустическая томография океана. – Нижний Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. – 256 с.
17. Зверев В.А., Никитина Н.Е. Измерение параметров трассы распространения импульса в среде с помехами, дисперсией и селективным поглощением // Акустич. журнал. 2006. № 4. С. 480–484.
18. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. – М.: Мир, 1984. – 336 с.
19. Бритенков А.К., Панкратов А.Н. Подавление мультипликативных помех с помощью обобщенного спектрально-аналитического метода в условиях дискретных отражений // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Серия «Радиофизика». 2006. Вып. №1(4). С. 50–57.
20. Шевин А.О., Хонина С.Н. Исследование влияния искажений на свойства лазерных полей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. С.П. Королева. 2008. № 2. С. 101–111.
21. Бритенков А.К., Романова И.В. Психоакустика и сжатие аудиоданных на основе разложения сигналов по модифицированным классическим ортогональным базисам // XXVIII Гагаринские чтения: тез. докл. Междунар. молодежной науч. конф. М.: Из-во МАТИ, 2002. Т. 2. С. 15.
22. Дероум Э. Современные методы ЯМР для химических исследований – М.: Мир, 1990. – 265 с.
23. Шварцбург А.Б. Оптика нестационарных сред // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. № 8. С. 833–861.
24. Панкратов А.Н., Быстрова Н.К. Обработка сигналов лазерной доплеровской флоуметрии, получаемых при зондировании микроциркуляторного русла кожи // Волновые явления в неоднородных средах: труды Всероссийской школы-семинара. Краснови́дово, Моск. обл., 2000. Т. 1. С. 16.

25. Дедус Ф.Ф., Куликова Л.И., Махортых С.А., Назипова Н.Н., Панкратов А.Н., Тетуев Р.К. Аналитические методы распознавания повторяющихся структур в геномах // ДАН. 2006. Т. 411. № 5. С. 599–602.

26. Бритенков А.К. Прогнозирование потребления электроэнергии промышленного предприятия с учетом особенностей обобщенного спектрально-аналитического метода // Прикладная механика и технология машиностроения: сборник научных трудов /

Под ред. В.И. Ерофеева и С.И. Смирнова. Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис», 2012. №1 (20). С. 152–161.

27. Бритенков А.К., Дедус Ф.Ф. Прогноз временных последовательностей с использованием обобщенного спектрально-аналитического метода // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Серия «Математическое моделирование. Оптимальное управление». 2012. Вып. № 5(2). С. 28–32.

Материал поступил в редакцию 17.03.14

**БРИТЕНКОВ
Александр
Константинович**

E-mail: jkd@yandex.ru
Тел. +7-(831) 462-32-90

Магистр физики, инженер кафедры общей физики радиофизического факультета Национального исследовательского университета «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского». Сфера научных интересов: системный анализ, морфологические методы и решение неформализованных задач, радиофизика, акустика, обработка сигналов, информационные технологии. Соавтор трех монографий, автор более 40 научных статей.

**СТЕПАНОВ
Николай Сергеевич**

E-mail: stepanov@rf.unn.ru
Тел. 7 (831) 462-32-74

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики радиофизического факультета Национального исследовательского университета «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», заслуженный деятель науки РФ. Сфера научных интересов: волновые процессы в нестационарных средах, физика плазмы, лазерная физика, акустика, обработка сигналов. Автор свыше 200 научных статей.