

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ СФЕРИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

С. В. Хейло

В статье рассмотрен сферический механизм параллельной структуры с тремя степенями свободы, с тремя кинематическими цепями. Исследованы задачи кинематики, решена задача о положениях сферического механизма, составлены уравнения связи. Представлено решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнения связей. Приведен пример расчета обратной задачи о скоростях.

Ключевые слова: механизм параллельной структуры, задачи о положении, задача о скоростях.

Введение

Использование манипуляторов и роботов параллельной структуры привлекает все большее внимание специалистов в области машиностроения, так как эти механизмы воспринимают нагрузку подобно пространственным фермам, что определяет их повышенную точность, надежность и производительность. Среди механизмов параллельной структуры достаточно широко применяются сферические манипуляторы, обеспечивающие ориентирующее движение выходного звена. Данные устройства могут использоваться в качестве ориентирующих механизмов для антенных и измерительных приборов, медицинских инструментов, лазеров, сварочных установок. Подобные механизмы рассматривались в различных работах [1–3].

Однако задача о положении и скоростях не была решена для манипулятора, у которого в начальном положении оси всех кинематических пар расположены вдоль координатных осей x , y , z . Данная работа посвящена вопросам исследования кинематики сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы.

Постановка задачи

Рассматриваемый сферический манипулятор (рис. 1) состоит из трех кинематических цепей с пересекающимися под углом 90° осями. Каждое входное звено цепи соединено с вращательным двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, вращающуюся вокруг трех осей x , y , z в точке O . Выходными координатами являются углы поворота платформы: α , β , γ – повороты вокруг осей x , y , z , соответственно. Обобщенными координатами являются

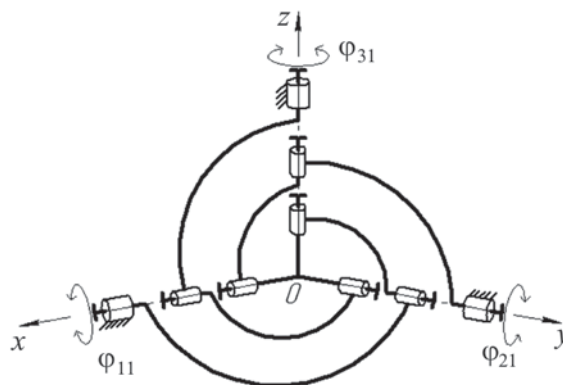


Рис.1 Кинематическая схема сферического манипулятора

ся углы φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} – соответственно углы поворота входных звеньев первой, второй и третьей кинематической цепи.

Особенность механизмов параллельной структуры состоит во взаимосвязанности приводов и наличии особых положений, в которых теряется степень свободы или появляется неуправляемая подвижность.

Для определения скоростей и особых положений манипулятора необходимо решить задачу о положениях [4], т.е. найти взаимосвязь между входными и выходными координатами.

Определение скоростей манипулятора возможно методом винтового исчисления и аналитическим методом, основанном на изучении свойств матрицы Якоби, составленной из частных производных уравнений связи. Аналитический метод не требует специальных знаний винтового исчисления, а полученные матрицы Якоби в дальнейшем можно использовать при определении особых положений. Поэтому в работе расчет проводится аналитическим методом.

Решение задачи о положениях

Выходное звено совершает последовательный поворот вокруг осей z , y , x . Матрицы, описывающие поворот вокруг осей z , y , x соответственно, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, отражающая переход выходного звена от подвижной системы координат к неподвижной, будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3$$

(см. приложение).

В первой кинематической цепи входное звено осуществляет поворот в следующей последовательности: вокруг осей x , y , z . Соответствующие этому матрицы поворота имеют вид:

$$\mathbf{B}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}'_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & \sin \varphi_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}'_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{13} & -\sin \varphi_{13} & 0 \\ \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где φ_{11} – угол поворота входного звена; φ_{12} – угол поворота второго звена; φ_{13} – угол поворота выходного (третьего) звена.

Матрица перехода входного звена от подвижной системы координат к неподвижной можно представить как

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_1 \cdot \mathbf{B}'_2 \cdot \mathbf{B}'_3$$

(см. приложение).

Вектор выходного звена первой цепи

имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ найденные значения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}'$, получим выражение

$$\begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix},$$

из которого можно выразить угол φ_{11} через α , β , γ .

Аналогичным образом составим уравнения связи для второй и третьей цепей. Выходное звено второй кинематической цепи имеет координаты

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, входное звено делает поворот в следующей последовательности: поворот вокруг осей y , z , x .

Матрица перехода от подвижной системы координат к неподвижной входного звена будет иметь вид:

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B}''_2 \cdot \mathbf{B}''_3 \cdot \mathbf{B}''_1,$$

где $\mathbf{B}''_1$ – матрица поворота вокруг оси x ; $\mathbf{B}''_2$ – матрица поворота вокруг оси y ; $\mathbf{B}''_3$ – матрица поворота вокруг оси z (эти матрицы см. в приложении); φ_{21} – угол поворота входного звена;

φ_{22} – угол поворота второго звена; φ_{23} – угол поворота выходного (третьего) звена.

$$\text{Подставив в уравнение связи } \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}'' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

значения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}''$ получаем выражение

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} \\ \sin \varphi_{22} \\ -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} \end{pmatrix},$$

из которого можно выразить угол φ_{21} через α , β , γ .

В третьей кинематической цепи выходное

звено имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а входное звено

осуществляет поворот в следующей последовательности: вокруг осей z , x , y .

Матрица, описывающая переход входного звена от подвижной системы координат к неподвижной, будет иметь вид:

$$\mathbf{B}''' = \mathbf{B}_3''' \cdot \mathbf{B}_1''' \cdot \mathbf{B}_2''',$$

где $\mathbf{B}_3'''$ – матрица поворота вокруг оси z ; $\mathbf{B}_1'''$ – матрица поворота вокруг оси x ; $\mathbf{B}_2'''$ – матрица поворота вокруг оси y .

Представляя ее аналогично ранее описанным матрицам, получим вид, приведенный в Приложении, где φ_{31} – угол поворота первого звена; φ_{32} – угол поворота второго звена; φ_{33} – угол поворота выходного (третьего) звена.

$$\text{Уравнение связи } \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}''' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ после под-}$$

становки найденных значений матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}'''$, примет вид соотношения:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} \end{pmatrix},$$

из которого находится угол φ_{31} , выраженный через α , β , γ .

Задача о положениях заключается в определении взаимосвязи между координатами выходного звена и обобщенными координатами и описывается функцией положения. В неявном виде функция положения механизма выражается уравнением

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}) = 0.$$

Уравнение связи для сферического манипулятора с тремя кинематическими парами можно представить системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}) = 0; \\ F_2(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{21}) = 0; \\ F_3(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{31}) = 0. \end{cases}$$

Углы φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , выраженные через α , β , γ , подставим в уравнения связей:

$$\begin{cases} F_1 = \operatorname{tg} \varphi_{11} - \frac{\cos \gamma \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta + \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 0; \\ F_2 = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \beta} - \operatorname{tg} \varphi_{21} = 0; \\ F_3 = \frac{\cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} + \operatorname{tg} \varphi_{31} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, составлены уравнения связи между углами поворота входных звеньев и углами поворота выходного звена.

Расчет скоростей механизма методом дифференцирования уравнений связи

Для решения задачи о скоростях будем использовать аналитический подход [5], основанный на изучении свойств матрицы Якоби, представленной в общем виде:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{V} = (-\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\omega}_1;$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{C}$ – матрица частных производных от неявной функции по α , β , γ ; $\mathbf{D}$ – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} ; $\mathbf{V}$ – вектор скоростей изменения углов ориентации выходного звена, разложенные на базис не перпендикулярных друг другу осей, которые определяются углами α , β , γ ; $\boldsymbol{\omega}_1$ – обобщенные скорости во вращательных шарнирах (входные скорости).

Скорость выходного звена может быть разложена на оси α , β , γ и на оси x , y , z .

Для решения задачи о скоростях необходимо найти значения проекций скоростей на эти оси. Обозначим проекции скорости $\mathbf{V}$ на оси α , β , γ – $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, а на оси x , y , z – ω_x , ω_y , ω_z . Их соотношение описывается выражениями:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha} \cdot x_\alpha + \dot{\beta} \cdot x_\beta + \dot{\gamma} \cdot x_\gamma; \\ \omega_y &= \dot{\alpha} \cdot y_\alpha + \dot{\beta} \cdot y_\beta + \dot{\gamma} \cdot y_\gamma; \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \cdot z_\alpha + \dot{\beta} \cdot z_\beta + \dot{\gamma} \cdot z_\gamma; \\ \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} &= (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ – координаты кинематической пары третьего звена, равные произведению матрицы поворота выходного звена на координаты выходного звена в начальном положении; $x_\beta, y_\beta, z_\beta$ – координаты кинематической пары второго звена, равные произведению матрицы поворота на угол γ вокруг оси z , умноженные на координаты второго звена в начальном положении; $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ – координаты кинематической пары первого звена, расположенного вдоль оси z .

Запишем матрицы Якоби в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \phi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \phi_{31}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11} \\ \dot{\phi}_{21} \\ \dot{\phi}_{31} \end{pmatrix}.$$

Найдем частные производные от неявной функции по обобщенным и абсолютным координатам (см. Приложение).

Полученные уравнения позволяют решить прямую задачу о скоростях, т.е. определять скорости выходного звена при известных скоростях входного звена, и обратную задачу о скоростях, когда рассчитывается скорость входного звена при известных скоростях выходного звена.

Пример решения задач о скоростях

Решим обратную задачу о скоростях, т.е. определим скорость входного звена для рассматриваемого сферического манипулятора с тремя степенями свободы. Зададим скорости выходного звена: $\omega_x=1$ рад/с; $\omega_y=1$ рад/с; $\omega_z=1$ рад/с. Вычислим скорости изменения углов ориентации выходного звена, разложенные на базис не перпендикулярных друг другу осей, которые

определяются углами α, β, γ – $\dot{\alpha}=2,556$ рад/с; $\dot{\beta}=3,5$ рад/с; $\dot{\gamma}=-0,302$ рад/с.

После дифференцирования уравнения связей матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0,346 & 0,457 & 3,267 \\ 0 & 6,34 & 4,489 \\ 1,068 & 0,312 & -1,007 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,556 \\ 3,15 \\ -0,302 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,061 & 0 & 0 \\ 0 & -9,316 & 0 \\ 0 & 0 & 1,007 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11} \\ \dot{\phi}_{21} \\ \dot{\phi}_{31} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим значения обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{11} &= 1,316 \text{ рад/с}; \dot{\phi}_{21} = 1,312 \text{ рад/с}; \\ \dot{\phi}_{31} &= 0,532 \text{ рад/с}.\end{aligned}$$

Заключение

В данной работе получены уравнения связей между выходными и обобщенными координатами сферического манипулятора с тремя степенями свободы, у которого в начальном положении оси всех кинематических пар расположены вдоль координатных осей x, y, z . Решена задача о положениях сферического механизма. Задача о скоростях решена методом, основанным на дифференцировании уравнений связи.

В дальнейшем результаты работы могут быть использованы для решения задач об особых положениях, задач динамики и задач, связанных с оптимизацией параметров.

Список литературы

1. Gosselin C. Kinematic Analysis Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators: Ph.D. Thesis. – McGill University, Montreal, June 15, 1988.
2. Leguay-Durand S., Reboulet C. Optimal design of a redundant spherical parallel manipulator // Robotica. 1997. No 15(4). P. 399–405.
3. Alizade R.I., Tagiyev N.R., Duffy J. A forward and reverse displacement analysis of an in-parallel spherical manipulator // Mechanism and Machine Theory. 1994. No 29(1). P. 125–137.
4. Глазунов В.А., Колисков А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.: Наука, 1991. – 95 с.
5. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains // IEEE. Transactions on Robotics and Automatics. 1990. V. 6(3). P. 281–290.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{13} & -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & \sin \varphi_{12} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{13} - \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{13} - \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} - \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{11} + \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B}'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{22} & \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{23} - \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{21} + \cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} \\ \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} \cdot \cos \varphi_{23} & -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} \\ -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{23} + \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{23} - \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B}''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} - \sin \varphi_{31} \cdot \sin^2 \varphi_{32} & -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} + \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{23} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \sin^2 \varphi_{32} + \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{23} & \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} - \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{32} \\ -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{32} & \sin \varphi_{23} & \cos^2 \varphi_{23} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = -\frac{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \cos^2 \alpha},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} = \sin \gamma - \frac{\sin \beta \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \alpha}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \cos \alpha},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = \frac{1}{\cos \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \gamma \cdot \cos^2 \beta}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \beta}{\cos^2 \gamma \cdot \cos \beta},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} - \frac{(\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin^2 \alpha},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \beta} = \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} + \frac{\sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin^2 \alpha},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = -\frac{(\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2}{(\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2} - 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} = tg^2 \varphi_{11} + 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} = -tg^2 \varphi_{21} - 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{31}} = tg^2 \varphi_{31} + 1.$$

Материал поступил в редакцию 28.10.2010

ХЕЙЛО
Сергей Валерьевич

E-mail: sheilo@yandex.ru
Тел. +7 (495) 955-37-87

Кандидат технических наук. Доцент кафедры прикладной механики ГОУ МГТУ имени А.Н. Косыгина. Сфера научных интересов – робототехника, манипуляторы параллельной структуры. Автор более 30 научных публикаций.