

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДА

О.А. Русанов

В статье изложен подход на основе метода конечных элементов к решению физически и геометрически нелинейных динамических задач для оценки напряженно-деформированного состояния тонкостенных металлических конструкций. Сравнение результатов решения модельных задач показало, что разработанные алгоритмы обеспечивают достаточную точность и устойчивую сходимость в нелинейном анализе тонких оболочек.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции, нелинейное деформирование, метод конечных элементов, динамический анализ.

Введение

Тонкостенные металлические конструкции, используемые во многих отраслях машиностроения, часто имеют относительно низкую жесткость. В этом случае для оценки их статической прочности, устойчивости и предельной несущей способности применения только линейных методов анализа недостаточно. Отклонение от линейных законов в процессах деформирования может происходить под действием даже относительно небольшой нагрузки вследствие существенного изменения формы объекта по сравнению с первоначальной, а также из-за перехода металла в пластическое состояние при изгибе тонких стенок. Сами процессы в оболочке при потере устойчивости и последующем закритическом деформировании нередко имеют выраженный динамический характер (эффект прохлопывания), и тогда они должны изучаться с позиций нелинейной динамики. Современный уровень развития компьютерной техники позволяет получить численное решение многих прикладных задач деформирования тонкостенных металлических конструкций в нелинейной постановке.

В данной работе изложен подход на основе метода конечных элементов (МКЭ) к решению физически и геометрически нелинейных динамических задач для оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из тонких оболочек.

Математическая постановка задачи нелинейного деформирования

В общем случае НДС нелинейной системы зависит от истории ее нагружения. Весь путь деформирования системы – от начального к конечному ее состоянию – можно представить в виде последовательности достаточно близко расположенных друг к другу равновесных состояний. Движение по данному пути с некоторым шагом позволяет моделировать процессы статического и динамического нагружения. Это движение можно рассматривать как совокупность переходов из одного положения равновесия в другое смежное через приращения характеристик состояния объекта (нагрузки, перемещений, деформаций, напряжений).

В основу разработанной методики анализа в приращениях с учетом физически и геометрически нелинейных свойств динамической системы положен вариационный принцип, использующий модифицированный подход Лагранжа [1].

Оболочка представлена в общем случае как деформируемое твердое тело, находящееся в состоянии равновесия под действием совокупности распределенных объемных и поверхностных нагрузок. На ее недеформированной конфигурации введена декартова система координат, оси x , y , z которой связаны с материальными точками тела.

Рассматривается равновесие системы в некоторой промежуточной точке на пути нагружения под действием накопленных на предыдущих

* Статья подготовлена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, проект № 16.740.11.0134

шагах значений объемной b_i и поверхностной p_i нагрузок. Для рассмотрения этого состояния вводится отсчетная конфигурация (соответствующая деформированному телу) с объемом тела V , ограниченного поверхностью S . Для описания положения точек тела в отсчетной конфигурации используются декартовы координаты X, Y, Z , отличающиеся от координат x, y, z тех же точек в недеформированном состоянии на величины перемещений u, v, w соответственно.

Действующим на тело объемной b_i и поверхностной p_i нагрузкам на текущем шаге нагружения даются дополнительные приращения $\Delta b_i, \Delta p_i$. Вариационная формулировка, соответствующая модифицированному подходу Лагранжа, выражается следующим уравнением:

$$\int_V \left[(\sigma_{ij}^E + \Delta \sigma_{ij}^*) \delta (\Delta e_{ij}^*) - (b_i + \Delta b_i) \delta (\Delta u_i) \right] dV - \int_S (p_i + \Delta p_i) \delta (\Delta u_i) dS = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}^E + \Delta \sigma_{ij}^*$ – модифицированный тензор напряжений Кирхгофа, состоящий из суммы компонент σ_{ij}^E тензора напряжений Эйлера (для отсчетной конфигурации) и компонент $\Delta \sigma_{ij}^*$ модифицированного тензора приращений напряжений Кирхгофа относительно отсчетной конфигурации; Δe_{ij}^* – модифицированный тензор приращений деформаций Коши – Грина (определяются через производные приращений перемещений по координатам X, Y, Z); $(b_i + \Delta b_i), (p_i + \Delta p_i)$ – суммарные объемные и поверхностные нагрузки, достигнутые на шаге нагружения; Δu_i – приращения перемещений на шаге нагружения (варьируемые параметры); δ – символ вариации; Δ – символ приращения величины на шаге нагружения.

Объемные и поверхностные нагрузки (b_i, p_i) отнесены к единичным объему и поверхности тела в деформированном состоянии, соответствующем отсчетной конфигурации.

Конечно-элементная формулировка задачи нелинейного деформирования

В формулировке МКЭ для анализа нелинейных систем в приращениях на основе уравнения (1) использована векторная символика. Введен вектор конечных деформаций $\mathbf{e}$, объединяющий компоненты тензора e_{ij} .

На пути нагружения рассмотрены два соседних состояния равновесия, из которых более раннее описывается векторами узловых

перемещений $\mathbf{U}^e$, напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, деформаций $\mathbf{e}$, узловых нагрузок $\mathbf{R}^e$ (включает в себя приведенные к узлам поверхностные и объемные нагрузки). Переход в последующее смежное состояние равновесия задается приращениями перечисленных векторов ($\Delta \mathbf{U}^e, \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \mathbf{e}, \Delta \mathbf{R}^e$) и изменением конфигурации деформируемого тела.

Постулируется связь между приращениями деформаций и напряжений:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{e}. \quad (2)$$

Разработанные методы расчета предназначены для исследования деталей из широко применяемых в машиностроении конструкционных материалов – сталей и сплавов. Гиперупругие материалы не рассматриваются. Для линейно упругого материала матрица упругости $\mathbf{D}_{EP}$ в соотношениях (2) рассчитывается по известным соотношениям упругости и заданным константам материала – модулю Юнга и коэффициенту Пуассона. Для материала с упругопластическими свойствами матрица $\mathbf{D}_{EP}$ формируется на основе теории пластического течения по методике, описанной в работе [2].

Методика нелинейного конечно-элементного анализа изложена применительно к элементам тонкой пластины с использованием гипотез Кирхгофа. В недеформированном состоянии срединная плоскость пластины совпадает с плоскостью xOy декартовой системы координат. Ось z является нормалью к пластине. Перемещения в направлении осей x, y, z обозначены как u, v, w соответственно.

Вектор конечных деформаций $\mathbf{e}$ слоя пластины с координатой z можно представить в виде суммы трех составляющих $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}, \boldsymbol{\aleph}$:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} + z \boldsymbol{\aleph}, \quad (3)$$

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\aleph} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}.$$

Аналогично для отсчетной конфигурации в векторе приращения конечных деформаций $\Delta \mathbf{e}$ выделены составляющие и сгруппированы в отдельные векторы $\Delta \mathbf{\epsilon}$, $\Delta \mathbf{\epsilon}_{NL}$, $\Delta \mathbf{\varsigma}$. При этом вместо абсолютных перемещений u , v , w используются их приращения Δu , Δv , Δw , а дифференцирование выполняется по координатам X , Y , Z . Тогда справедливо равенство:

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{\epsilon} + \Delta \mathbf{\epsilon}_{NL} + z \Delta \mathbf{\varsigma}. \quad (4)$$

С учетом соотношения (2) приращение напряжений можно представить в виде:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{e} = \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{\epsilon} + \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{\epsilon}_{NL} + z \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{\varsigma}. \quad (5)$$

В вариационном подходе вводятся виртуальные перемещения, под которыми понимаются любые удовлетворяющие граничным условиям перемещения узлов. Перемещения сгруппированы в векторе δ ($\Delta \mathbf{U}^e$). Виртуальным перемещениям соответствуют деформации в системе:

$$\delta(\Delta \mathbf{e}) = \delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + \delta(\Delta \mathbf{\epsilon}_{NL}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma}). \quad (6)$$

Вариационное уравнение модифицированного подхода Лагранжа в приращениях (1) можно переписать для конечного элемента в векторной форме:

$$\int_{V^e} \delta(\Delta \mathbf{e})^T (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) dV - \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T (\mathbf{R}^e + \Delta \mathbf{R}^e) = 0. \quad (7)$$

После подстановки уравнений (4), (5), (6) в уравнение (7) и перегруппировки слагаемых последнее может быть переписано в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & \int_{V^e} \left\{ [\delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma})]^T \mathbf{D}_{EP} [\Delta \mathbf{\epsilon} + z \Delta \mathbf{\varsigma}] + \right. \\ & \left. + \delta(\Delta \mathbf{\epsilon}_{NL})^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) \right\} dV = \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \Delta \mathbf{R}^e + \\ & + \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \mathbf{R}^e - \int_{V^e} [\delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma})]^T \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \int_{V^e} [\delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma})]^T \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{\epsilon}_{NL} dV. \quad (8) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в левой части равенства (8)

$$\begin{aligned} & \int_{V^e} [\delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma})]^T \mathbf{D}_{EP} [\Delta \mathbf{\epsilon} + z \Delta \mathbf{\varsigma}] dV = \\ & = \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \cdot \mathbf{K}_T^e \cdot \Delta \mathbf{U}^e \end{aligned}$$

отражает геометрически линейные компоненты мембранной и изгибной жесткости элемента и позволяет сформировать матрицу жесткости элемента оболочки, в которой применительно к физически нелинейным задачам учтено взаимное влияние компонент мембранной и изгибной жесткости при несимметричном (относительно срединной поверхности) проявлении текучести в слоях, параллельных срединному слою.

Второе слагаемое в левой части равенства (8)

$$\int_{V^e} \delta(\Delta \mathbf{\epsilon}_{NL})^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) dV = \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \cdot \mathbf{K}_G^e \cdot \Delta \mathbf{U}^e,$$

где $\mathbf{K}_T^e$, $\mathbf{K}_G^e$ – матрицы касательной жесткости и геометрической жесткости элемента в конфигурации деформирования, соответствующей предыдущему шагу нагружения (отсчетной конфигурации). Учитывает изменение жесткости системы вследствие предварительного напряжения и является основой для получения матрицы геометрической жесткости.

Слагаемые в правой части равенства

$$\begin{aligned} & \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \mathbf{R}^e - \int_{V^e} [\delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma})]^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \int_{V^e} [\delta(\Delta \mathbf{\epsilon}) + z \delta(\Delta \mathbf{\varsigma})]^T \mathbf{D}_{EP} \Delta \mathbf{\epsilon}_{NL} dV = \delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \mathbf{R}_N \end{aligned}$$

позволяют рассчитать неуравновешенную на предыдущих шагах нагружения часть внешней нагрузки и по предварительно вычисленным приведенным к узлам силам по изгибным и мембранным степеням свободы элемента от накопленных ранее напряжений, а также нелинейных компонент деформаций.

Объемные и поверхностные интегралы берутся по объему и поверхности деформированного тела в конфигурации, соответствующей равновесному состоянию начала шага нагружения.

В окончательном виде конечно-элементная формулировка модифицированного подхода Лагранжа в приращениях (1) для элемента записывается следующим образом:

$$\delta(\Delta \mathbf{U}^e)^T \cdot [(\mathbf{K}_T^e + \mathbf{K}_G^e) \cdot \Delta \mathbf{U}^e - \Delta \mathbf{R}^e - \mathbf{R}_N] = 0,$$

где $\mathbf{R}_N$ – вектор неуравновешенной части внешней нагрузки для предыдущего шага нагружения.

После вычисления приращений перемещений, напряжений и деформаций на текущем шаге нагружения для перехода к следующему шагу нагружения осуществляется суммирование перемещений, преобразование конфигурации объекта (коррекция координат узлов), а также преобразование суммарных напряжений применительно к новой отсчетной конфигурации.

Приведенные общие соотношения использованы для разработки основных матриц и векторов треугольного плоского конечного элемента тонкой оболочки с тремя узлами и 18-ю степенями свободы применительно к геометрически и физически нелинейному анализу оболочек.

Исследования неустановившихся колебаний оболочечных конструкций во времени

Равновесие в момент времени $t + \Delta t$ динамической системы МКЭ (ансамбля конечных элементов) с учетом инерционных и диссипативных сил (пропорциональных ускорениям и скоростям движения точек соответственно), нелинейных свойств (пластичность материалов, конечные перемещения и деформации) описывается матричным уравнением в приращениях:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_G) \cdot \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t} + \mathbf{R}_{Nt}, \quad (9)$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ – глобальные матрицы масс и демпфирования системы МКЭ; $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ – векторы скоростей и ускорений узлов модели; $\Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}$ – вектор приращения перемещений ($\Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t$) на шаге по времени от t к $t + \Delta t$; $\Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t}$ – вектор приращения внешней нагрузки ($\Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t$).

В нелинейном анализе матрица жесткости содержит в качестве составляющих вычисленные в отсчетной конфигурации касательную матрицу жесткости конструкции $\mathbf{K}_T$ и матрицу геометрической жесткости $\mathbf{K}_G$, рассчитанную по напряжениям, накопленным на предыдущих шагах нагружения. Вектор неуравновешенных сил $\mathbf{R}_{Nt}$ представляет неуравновешенную внутренними усилиями часть внешней нагрузки в момент времени t .

Для интегрирования уравнения (9) по времени выбран метод Хоуболта (Houbolt) [3], реализующий прямую неявную схему интегрирования, рассматривающую равновесие модели в момент времени $t + \Delta t$, для которого состояние пока неизвестно, в предположении, что в более ранние моменты времени это состояние полностью определено. В данном методе используется приведение системы дифференциальных уравнений (9) к системе алгебраических уравнений с помощью разностного представления производных по времени (скоростей $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ и ускорений $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$), выраженного через приращения перемещений $\Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}$ и перемещения $\mathbf{U}_t$, $\mathbf{U}_{t-\Delta t}$, $\mathbf{U}_{t-2\Delta t}$ на предыдущих временных шагах по следующей схеме:

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11 \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} - 7 \mathbf{U}_t + 9 \mathbf{U}_{t-\Delta t} - 2 \mathbf{U}_{t-2\Delta t});$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2 \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} - 3 \mathbf{U}_t + 4 \mathbf{U}_{t-\Delta t} - \mathbf{U}_{t-2\Delta t}). \quad (10)$$

В результате для определения приращений перемещений $\Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}$ на шаге интегрирования

$t + \Delta t$ получается система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} \cdot \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}, \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}_T + \mathbf{K}_G, \\ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} &= \Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t} + \mathbf{R}_{Nt} - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} (-3 \mathbf{U}_t + 4 \mathbf{U}_{t-\Delta t} - \mathbf{U}_{t-2\Delta t}) - \\ &\quad - \frac{1}{6\Delta t} \mathbf{C} (-7 \mathbf{U}_t + 9 \mathbf{U}_{t-\Delta t} - 2 \mathbf{U}_{t-2\Delta t}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}$, $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}$ – соответственно эффективная матрица касательной жесткости и эффективный вектор приращения нагрузки на шаге интегрирования по времени $t + \Delta t$.

Система (11) решалась методом $\mathbf{LDL}^T$ разложения для последовательных моментов времени, в результате чего определяли временные зависимости параметров динамического состояния объекта. На каждом шаге по времени нелинейные перемещения уточнялись методом Ньютона. Изложенная методика реализована в виде программных модулей в комплексе программ методов конечных и граничных элементов [4] и прошла проверку при решении тестовых задач.

Тестовые расчеты тонкостенных оболочных конструкций

Цилиндрическая панель под действием сосредоточенной силы. Рассмотрена задача деформирования цилиндрической панели, нагруженной в центре сосредоточенной силой, меняющейся во времени [5]. По прямым торцам панель имеет шарнирные закрепления, криволинейные торцы свободны. Деформирование панели при росте нагрузки сопровождается эффектом прохлопывания. Решение получено в геометрически нелинейной постановке. Материал панели – линейно упругий с модулем упругости $E = 3102,75$ МПа, коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

Панель имеет следующие размеры (рис. 1): $R = 2540$ мм, $h = 12,7$ мм, $l = 508$ мм, $\theta = 0,1$ рад, $a = R \sin \theta = 253,6$ мм.

Принимая во внимание пологую симметричную форму панели и способ ее нагружения, сделали допущение о возможности учета в расчетной схеме только $1/4$ части панели. Конечно-элементная сетка $1/4$ части панели содержит 400 элементов. Значение сосредоточенной силы, приходящейся на $1/4$ часть

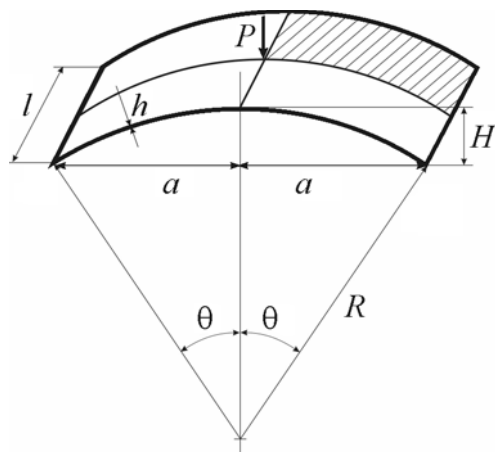


Рис. 1. Схема цилиндрической панели

панели, принято линейно возрастающим от 0 до $P_{\max} = 3$ кН на интервале времени от 0 до 0,2 с. Выполнен нелинейный анализ деформирования при статическом нагружении с различными шагами приращения нагрузки, а также при динамическом нагружении при прохлопывании панели с различными шагами интегрирования по времени.

Предварительно определена наименьшая частота собственных колебаний недеформированной панели 97,4 Гц, позволившая выбрать в качестве ориентира для шага интегрирования значение $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ с, соответствующее приблизительно 50 шагам на период. При этом учтено, что после прощелкивания панели ее собственные частоты должны возрастать вследствие увеличения жесткости системы за счет внутренних напряжений.

На рис. 2 приведены графики изменения вертикального перемещения в центре пластины (точки приложения силы) в зависимости от времени. Расчеты при статическом пошаговом нагружении выполнены с приращением нагрузки, соответствующим временным шагам 0,01 и $2 \cdot 10^{-4}$ с. Расчеты динамических процессов методом Хоуболта выполнены со значениями шага по времени $1 \cdot 10^{-4}$ с и $5 \cdot 10^{-5}$ с. Представленные результаты хорошо коррелируют между собой.

После прощелкивания колебательный процесс вокруг линии статического равновесия происходит с постепенным увеличением частоты колебаний, что объясняется увеличением жесткости в системе с ростом нагрузки. Рост жесткости в зависимости от величины прогибов также является причиной неодинаковых раз-

махов динамических процессов в положительную и отрицательную сторону относительно статически равновесного состояния. Причиной возникновения колебаний и наличия в системе кинетической энергии является высвобождение энергии деформирования при прощелкивании панели – скачкообразном переходе ее к новой точке равновесия на линии равновесных конфигураций.

В выполненном нелинейном анализе метод Хоуболта показал высокую устойчивость, о чем свидетельствует практически полное совпадение графиков процессов, полученных с разными шагами интегрирования.

На рис. 2 представлено сравнение решений с помощью разработанных нелинейных алгоритмов и решения [5] этой же задачи на основе анализа равновесных конфигураций (кривая 5), не учитывающего динамических факторов. Анализ равновесных конфигураций весьма интересен в теоретическом аспекте. На практике прощелкивание тонкостенной конструкции является выраженным динамическим процессом, исследование которого требует применения динамического подхода. Результаты, полученные с помощью разработанных алгоритмов, согласуются с результатами работы [5] и в дополнение к ним позволяют изучать эффекты нелинейного деформирования тонкостенных конструкций с иных позиций.

Сферический купол под действием сосредоточенной силы. Рассмотрена задача деформирования жестко заделанного по контуру сферического купола сосредоточенной в его вершине силой переменной величины [6]. Задача решается в геометрически нелинейной постановке. Материал линейно упругий со следующими характеристиками: $E = 68\,947,6$ МПа, $\mu = 0,3$. Купол имеет следующие геометрические параметры (рис. 3):

$$\begin{aligned} R &= 120,9 \text{ мм}, h = 0,4 \text{ мм}, \theta = 0,19 \text{ рад}, \\ H &= R(1 - \cos \theta) = 2,181 \text{ мм}, \\ a &= R \sin \theta = 22,86 \text{ мм}. \end{aligned}$$

По условиям симметрии принято допущение о возможности учета в расчетной схеме $1/4$ части оболочки, которая смоделирована конечно-элементной сеткой из 536 элементов. Сосредоточенная сила, действующая на $1/4$ часть купола, линейно возрастает от 0 до $P_{\max} = 100,08$ Н на интервале времени от 0 до 0,01 с. Выполнен анализ статического нагружения, а также

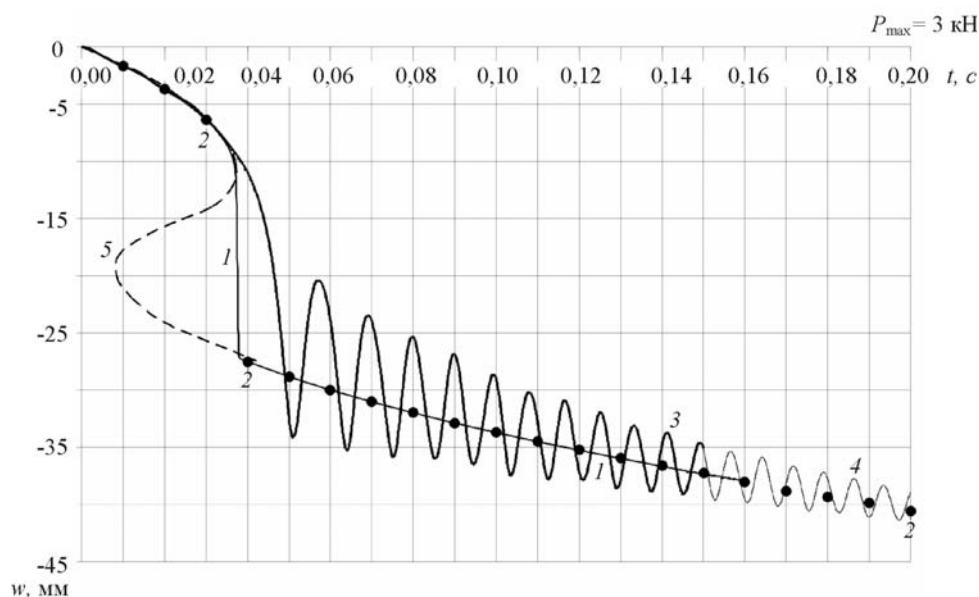


Рис. 2. Зависимость прогиба w в центре пластины от времени:

- 1 – статический анализ, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ с; 2 – статический анализ, $\Delta t = 0,01$ с;
3 – динамический анализ, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ с; 4 – динамический анализ, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ с;
5 – результаты расчетов работы [5]

исследованы во времени (методом Хоуболта) динамические процессы при деформировании купола.

Как и в предыдущем примере, выбор шага интегрирования осуществлен на основе предварительного анализа собственных колебаний купола. Наименьшая частота его собственных колебаний составила 8699 Гц.

Дополнительно в линеаризованной постановке выполнен расчет на устойчивость (в рамках решения задачи на собственные значения) и определена критическая нагрузка $P_{кр} = 53,58$ Н. Этому значению соответствует момент времени 0,005358 с, который может рассматриваться при анализе динамических процессов как приближенный ориентир для начала существенных изменений в системе.

На рис. 4 приведены графики зависимостей вертикального перемещения w в центре купола (в точке приложения силы) от времени. Нелинейные расчеты выполнены при статическом пошаговом нагружении с приращением нагрузки, соответствующим временному шагу 10^{-5} с. Такой же шаг интегрирования принят для исследования динамических процессов.

Разработанный алгоритм статического нелинейного анализа продемонстрировал сходимость в интервале времени от 0 до 0,0055 с, далее расхождение. Динамический анализ методом Хоуболта показал хорошую сходимость во всем рассматриваемом временном интервале.

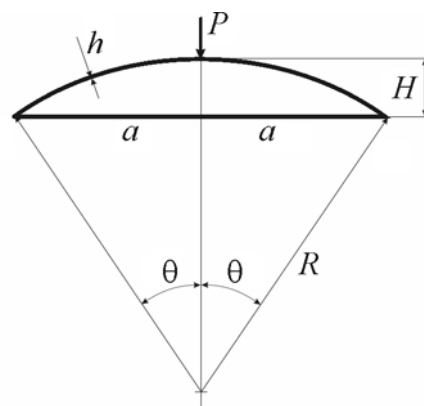


Рис. 3. Схема сферического купола

Расчетные результаты работы [6] хорошо согласуются с результатами выполненного численного анализа (см. рис. 4). Разработанные алгоритмы в целом обеспечивают достаточную точность и устойчивую сходимость при нелинейном анализе оболочечных конструкций и могут быть использованы для решения более сложных и практически значимых задач.

Полусферический сосуд давления с радиальным патрубком. Результаты экспериментального исследования НДС данного соединения под действием внутреннего давления приведены в работе [7]. Размеры испытанной модели показаны на рис. 5, а. Материал оболочки имеет следующие характеристики: $E = 200,8$ ГПа, $\mu = 0,3$, предел текучести материала $\sigma_T = 279,5$ МПа.

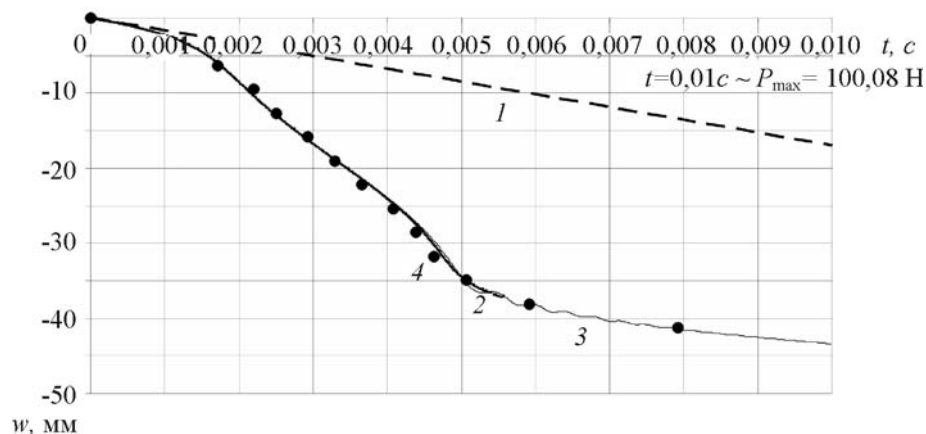


Рис. 4. Зависимости прогиба в центре купола от времени:
1 – линейный статический анализ; 2 – нелинейный статический анализ;
3 – нелинейный динамический анализ; 4 – результаты работы [6]

Рассматриваемая задача является осесимметричной. По принятому допущению в расчетной модели отражена только четверть сосуда. В расчетах учтены физически и геометрически нелинейные особенности деформирования системы. Упругопластические свойства материала смоделированы на основе теории пластического течения. Диаграмма деформирования материала соответствует идеальному упругопластическому материалу.

Оболочка имеет закрепления, отвечающие условиям симметрии. Дополнительно запрещены вертикальные перемещения по нижнему контуру полусферы.

Конечно-элементная модель содержит 9693 треугольных конечных элемента, которые расположены в срединной поверхности оболочки. Повышение жесткости в зоне сварного узла (вследствие увеличения общей толщины оболочки за счет наплавленного металла сварного шва) отражено в модели изломом в меридиональном направлении образующей срединной поверхности, в которой находятся элементы, и увеличением толщины элементов, близко расположенных к шву.

Внутреннее давление, как фактор нагружения, линейно возрастает от 0 до $P_{\max}=10$ МПа (с шагом 0,1 МПа) в интервале времени от 0 до 1 с. Проанализировано статическое нагружение оболочки.

Зависимости вертикальных перемещений v зоны сварного узла (в точке А, см. рис. 5) от времени представлены на рис. 6. Кривая 1 соответствует линейному решению МКЭ, кривая 2 – физически и геометрически нелинейному

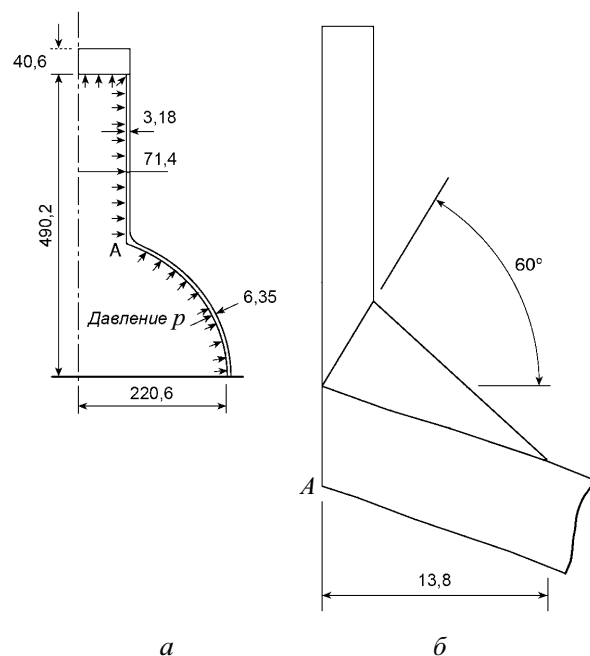


Рис. 5. Схема полусферического сосуда давления с радиальным патрубком:
а – размеры соединения;
б – геометрия сварного шва

решению МКЭ по разработанной методике, кривая 3 (обозначенная кружками) – экспериментальным данным, приведенным в работе (нелинейного анализа) [7]. Наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Заключение

В статье изложен динамический подход на основе метода конечных элементов к решению физически и геометрически нелинейных

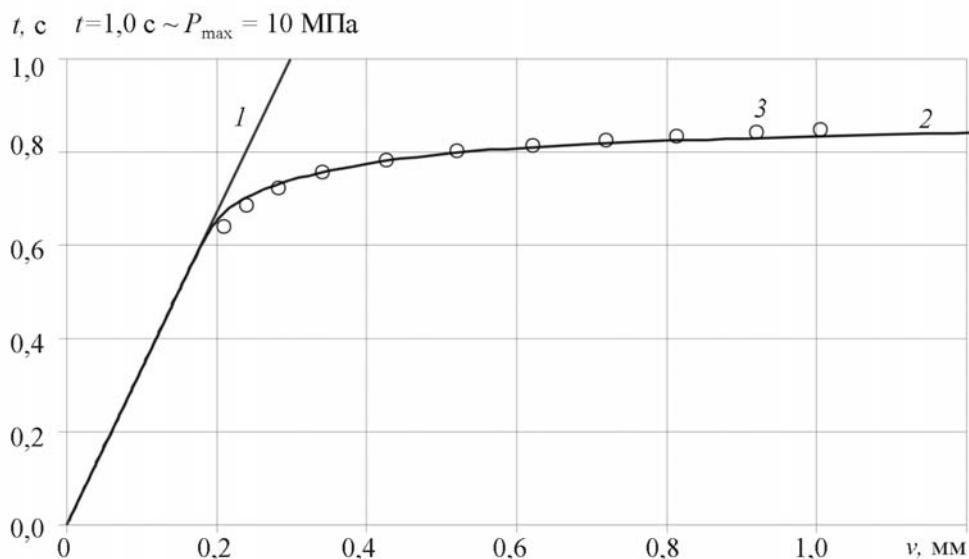


Рис. 6. Зависимость вертикального перемещения v точки A сосуда от давления:
1 – линейный расчет; 2 – нелинейный расчет; 3 – данные испытаний [7]

динамических задач для оценки напряженно-деформированного состояния тонкостенных металлических конструкций. Разработанные алгоритмы реализованы в виде вычислительных программ и прошли проверку при решении модельных задач. Сравнение результатов показало, что эти алгоритмы обеспечивают достаточную точность и устойчивую сходимость в нелинейном анализе тонких оболочек и могут быть применены на практике в исследованиях конструкций машин и оборудования.

Список литературы

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Л.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
4. Дмитриченко С.С., Русанов О.А. Опыт расчетов на прочность, проектирования и доводки сварных металлоконструкций мобильных машин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2006. № 1. С. 8–13.
5. Yang T. Y., Saigal S. A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1985. Vol. 21. No. 4. P. 617–635.
6. Pica A., Wood R. D. Postbuckling behaviour of plates and shells using a Mindlin shallow shell formulation // Computers & Structures. 1980. Vol. 12. No. 5. P. 759–768.
7. Dinno K. S., Gill S. S. An experimental investigation into the plastic behaviour of flush nozzles in spherical pressure vessels // International Journal of Mechanical Sciences. 1965. Vol. 7. No. 12. P. 817–820.

Материал поступил в редакцию 16.05.2011

**РУСАНОВ
Олег
Александрович**

E-mail:
newmalina@rambler.ru
Тел.: +7 (495) 620-39-89

Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник НИО, доцент кафедры сопротивления материалов ФГБОУ ВПО «МГИУ». Область научных интересов – численные методы статического и динамического анализа машиностроительных конструкций, расчеты на прочность несущих систем машин. Автор более 60 научных работ.