УДК 539.3:05.13.18

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Н. А. Роганова, Г. З. Шарафутдинов

РОГАНОВА Наталья Анатольевна

Старший преподаватель кафедры общей и прикладной математики МГИУ. Основное направление научной работы – теория упругости, механика деформируемого твердого тела. Автор четырех научных работ.

Введение

Современные технологии создания и эксплуатации машин, конструкций, различного рода сооружений требуют адекватного учета характеристик реальных материалов, в частности их неоднородных свойств. Неоднородность материалов возникает при их изготовлении, например, при неравномерном охлаждении металлических отливок или застывании бетона; под влиянием окружающей среды (термическое влияние, радиационное излучение, воздействие агрессивных сред и в ряде других случаев). Неоднородность прочностных характеристик материалов может возникать также в процессе деформации [1–6].

В общем случае изотропного неоднородного тела все упругие характеристики материала являются функциями координат, однако независимых среди них всего две — остальные однозначно выражаются через выбранную пару [1]. В статье в качестве такой пары выбирается модуль сдвига μ и коэффициент Пуассона ν. При решении конкретных задач, несомненно, должны быть использованы реальные характеристики материалов, однако во многих случаях возникает проблема их определения, и по этой причине они выбираются, как правило, в упрощенном виде. В частности, в аналитических исследованиях неоднородные модули упругости

ШАРАФУТДИНОВ Геннадий Николаевич

Доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов – теория упругости, механика деформируемого твердого тела. Автором опубликовано более 100 научных работ, в том числе одна монография и 15 учебных пособий.

принимаются в виде линейной, экспоненциальной или степенной функции [1–4]; в последнем случае, как правило, невысокой степени.

Основные соотношения и постановка задачи

Рассмотрим задачу плоской деформации неоднородного упругого тела. Компоненты вектора перемещений $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид: $u_1 = u_1(x_1, x_2),\ u_2 = u_2(x_1, x_2),\ u_3 = 0$.

Уравнения равновесия $\sigma_{ij},_j = 0$ при отсутствии массовых сил принимают вид:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0,$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Компоненты ε_{ij} тензора деформаций определяются соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Условия совместности деформаций в этом случае сводятся к единственному уравнению

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{1}$$

В целях упрощения изложения граничные условия будем рассматривать в виде $\sigma_{ij} l_j \big|_L = p_i$, где L – граница некоторой односвязной области S; l_j – направляющие косинусы нормали к границе; p_i — компоненты вектора напряжений.

Неоднородность материала зададим в таком виде:

$$\nu = \text{const}, \quad \mu = \mu_0 M(x_1, x_2),$$
$$0 \le M(x_1, x_2) \le 1,\ (x_1, x_2) \in S,$$

где μ_0 — размерный множитель [6, 7].

Введем безразмерные компоненты тензора напряжений τ_{ij}, связанные с размерными компонентами σ_{ij} этого тензора соотношениями

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2) = 2\mu(x_1, x_2)\tau_{ij}(x_1, x_2) = 2\mu_0 M(x_1, x_2)\tau_{ij}(x_1, x_2).$$

Закон Гука в этом случае запишем в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] = (1-\nu)\tau_{11} - \nu\tau_{22};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right] = (1-\nu)\tau_{22} - \nu\tau_{11}; \tag{2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = \tau_{12},$$

где E – модуль Юнга.

Будем считать все рассматриваемые здесь функции непрерывными вместе с производными требуемого порядка.

Уравнения равновесия и граничные условия, выраженные относительно величин τ_{ij}, принимают вид [7]:

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2} = -\tau_{11}\frac{\partial \ln M(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \tau_{12}\frac{\partial \ln M(x_1, x_2)}{\partial x_2};$$

$$\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2} = -\tau_{12}\frac{\partial \ln M(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \tau_{22}\frac{\partial \ln M(x_1, x_2)}{\partial x_2};$$

(3)

$$2\mu_0 M(x_1, x_2)\tau_{ij} l_j \big|_L = p_i.$$

С учетом закона Гука (2) и уравнений равновесия (3) условие совместности (1) получит вид [7]:

$$(1-\nu)\nabla^2(\tau_{11} + \tau_{22}) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tau_{11}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \tau_{12}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}\right] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\tau_{12}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \tau_{22}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}\right], \tag{4}$$

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – двумерный оператор Лапласа.

Приближенное решение задачи плоской деформации

Рассматриваемая задача сводится к нахождению компонент тензора напряжений, удовлетворяющих уравнениям (3) и (4) и соответствующим статическим граничным условиям. Система уравнений (3), (4) может быть численно решена различными методами, в том числе и методом последовательных приближений. Заметим, что применение этого метода определяется видом рассматриваемой системы уравнений. Запишем указанную систему в следующем виде [7]:

$$\frac{\partial\tau_{11}^{(k+1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{12}^{(k+1)}}{\partial x_2} = -\tau_{11}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} - \tau_{12}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2};$$

$$\frac{\partial\tau_{12}^{(k+1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{22}^{(k+1)}}{\partial x_2} = -\tau_{12}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} - \tau_{22}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}; \tag{5}$$

$$(1-\nu)\nabla^2\left(\tau_{11}^{(k+1)} + \tau_{22}^{(k+1)}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tau_{11}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \right.$$
$$\left. + \tau_{12}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\tau_{12}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \tau_{22}^{(k)}\frac{\partial \ln M}{\partial x_2}\right].$$

Очевидно, что правые части всех уравнений могут обращаться в нуль как в случае однородного материала, так и при задании нулевого приближения $\tau_{ij}^{(0)} = 0$. Не конкретизируя выбор нулевого приближения, будем считать правые части всех трех уравнений равными нулю. В любом случае приходим к системе уравнений для однородного тела:

$$\frac{\partial\tau_{11}^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{12}^{(1)}}{\partial x_2}=0;\ \dots\ \frac{\partial\tau_{12}^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{22}^{(1)}}{\partial x_2}=0;$$

$$\dots\ \nabla^2\left(\tau_{11}^{(1)}+\tau_{22}^{(1)}\right)=0.$$

Первые два уравнения тождественно удовлетворяются путем введения функции напряжений $\Phi_1(x_1,x_2)$:

$$\tau_{11}^{(1)}=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_2^2},\quad \tau_{22}^{(1)}=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_1^2},\quad \tau_{12}^{(1)}=-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_1\partial x_2}.\qquad(6)$$

Таким образом, задача сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции напряжений $\Phi_1(x_1,x_2)$. Допустим, что эта функция определена, в результате чего получено первое приближение рассматриваемой задачи. В общем случае, применяя схему [7], для произвольного номера $k=0,1,2,\dots$ имеем

$$\tau_{11}^{(k+1)}=\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{\ln^n M}{n!}\frac{\partial^2\Phi_{k-n+1}}{\partial x_2^2};$$

$$\tau_{22}^{(k+1)}=\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{\ln^n M}{n!}\frac{\partial^2\Phi_{k-n+1}}{\partial x_1^2};\qquad(7)$$

$$\tau_{12}^{(k+1)}=\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+1}\frac{\ln^n M}{n!}\frac{\partial^2\Phi_{k-n+1}}{\partial x_1\partial x_2};$$

$$(1-\nu)\nabla^4\Phi_{k+1}=(1-\nu)\nabla^2\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{\ln^{n+1}M}{(n+1)!}\nabla^2\Phi_{k-n}+$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{\ln^{n+1}M}{(n+1)!}\frac{\partial^2\Phi_{k-n}}{\partial x_1\partial x_2}\right]-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{\ln^{n+1}M}{(n+1)!}\frac{\partial^2\Phi_{k-n}}{\partial x_2^2}\right]-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{\ln^{n+1}M}{(n+1)!}\frac{\partial^2\Phi_{k-n}}{\partial x_1^2}\right].\qquad(8)$$

Исходя из выражений для безразмерных компонент тензора напряжений получим

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_2^2}=\tau_{11}^{(1)};\ \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x_2^2}=\tau_{11}^{(2)}+\ln M\tau_{11}^{(1)};$$

$$\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_2^2}=\tau_{11}^{(3)}+\ln M\tau_{11}^{(2)}+\frac{\ln^2 M}{2!}\tau_{11}^{(1)};$$

$$\dots\quad \frac{\partial^2\Phi_{k+1}}{\partial x_2^2}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}\tau_{11}^{(k-n+1)}.$$

Аналогично представим:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_1^2}=\tau_{22}^{(1)};\ \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x_1^2}=\tau_{22}^{(2)}+\ln M\tau_{22}^{(1)};$$

$$\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_1^2}=\tau_{22}^{(3)}+\ln M\tau_{22}^{(2)}+\frac{\ln^2 M}{2!}\tau_{22}^{(1)};$$

$$\dots\quad \frac{\partial^2\Phi_{k+1}}{\partial x_1^2}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}\tau_{22}^{(k-n+1)}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_2^2}=\nabla_2^2\Phi_1=\tau_{11}^{(1)}+\tau_{22}^{(1)};$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x_2^2}=\nabla_2^2\Phi_2=\tau_{11}^{(2)}+\tau_{22}^{(2)}+\ln M\left(\tau_{11}^{(1)}+\tau_{22}^{(1)}\right);$$

$$\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_2^2}=\nabla_2^2\Phi_3=\tau_{11}^{(3)}+\tau_{22}^{(3)}+\ln M\left(\tau_{11}^{(2)}+\tau_{22}^{(2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\ln^2 M\left(\tau_{11}^{(1)}+\tau_{22}^{(1)}\right).$$

Итоговое уравнение принимает вид:

$$\nabla_2^2\Phi_{k+1}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}\left(\tau_{11}^{(k-n+1)}+\tau_{22}^{(k-n+1)}\right).$$

Так как сумма $(\tau_{11}^{(k-n+1)}+\tau_{22}^{(k-n+1)})$ удовлетворяет третьему уравнению (5), то в силу принципа максимума модуля она по абсолютному значению не будет превосходить суммы напряжений на границе односвязной области. Обозначая

$$A=\max\left\{\frac{|\sigma_{11}|}{2\mu_0 M},\quad \frac{|\sigma_{22}|}{2\mu_0 M},\quad \frac{|\sigma_{11}+\sigma_{22}|}{2\mu_0 M}\right\}$$

на границе односвязной области S, имеем следующие оценки:

$$\frac{\partial^2\Phi_{k+1}}{\partial x_2^2}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}\tau_{11}^{(k-n+1)}\le\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}A=MA\le A;$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{k+1}}{\partial x_1^2}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}\tau_{22}^{(k-n+1)}\le\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}A=MA\le A;$$

$$\nabla_2^2\Phi_{k+1}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}\left(\tau_{11}^{(k-n+1)}+\tau_{22}^{(k-n+1)}\right)\tau_{11}^{(k-n+1)}\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{k}\frac{\ln^n M}{n!}A=MA\le A.$$

Применяя, к примеру, первую из полученных оценок к первому соотношению (7), видим, что его сходимость равносильна факториальной сходимости ряда вида

$$1-\frac{\ln M}{1}+\frac{\ln^2 M}{2!}-\frac{\ln^3 M}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{\ln^n M}{n!}+\dots,\qquad(9)$$

сходящегося при $|\ln M|<\infty$.

Применение функций комплексного переменного при реализации последовательных приближений

Уравнение (8) достаточно сложно для аналитического или численного решения, однако его решение может быть несколько упрощено при помощи функций комплексного переменного [8, 9]. Кроме того, такой подход позволяет получить аналитические формы первого, второго и других приближений. В его основе лежит приведение оператора Лапласа в (8) к другой канонической форме, позволяющей достаточно просто произвести интегрирование этого уравнения для случая односвязной области, используя рациональные аналитические функции [8].

Перейдем к комплексным переменным $z = x_1 + ix_2$ и $\overline{z} = x_1 - ix_2$, где i – мнимая единица. Заменив операторы дифференцирования по формулам

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}\right); \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}},$$

последнее из уравнений (8) запишем в виде:

$$4(1-\nu)\frac{\partial^4 F_{k+1}(z,\overline{z})}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = f_k(z,\overline{z}), \qquad (10)$$

где

$$f_k(z,\overline{z}) = 2(1-2\nu)\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} C_{1k}(z,\overline{z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} C_{2k}(z,\overline{z}) + \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2} C_{3k}(z,\overline{z});$$

$$C_{1k}(z,\overline{z}) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\left(\ln M(z,\overline{z})\right)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^2 F_{k-n}(z,\overline{z})}{\partial z \partial \overline{z}};$$

$$C_{2k}(z,\overline{z}) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\left(\ln M(z,\overline{z})\right)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^2 F_{k-n}(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}^2};$$

$$C_{3k}(z,\overline{z}) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\left(\ln M(z,\overline{z})\right)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^2 F_{k-n}(z,\overline{z})}{\partial z^2}.$$

Здесь обозначено $F_k \equiv F_k(z,\overline{z}) = \Phi_k(x_1, x_2)$.

Используя представления компонент тензора напряжений через комплексные потенциалы [8], получим комбинации этих величин:

$$\tau_{11}^{(k+1)} + \tau_{22}^{(k+1)} = 4\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\ln^n M(z,\overline{z})}{n!} \frac{\partial^2 F_{k-n+1}(z,\overline{z})}{\partial z \partial \overline{z}};$$

$$\tau_{22}^{(k+1)} - \tau_{11}^{(k+1)} + 2i\tau_{12}^{(k+1)} = 4\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\ln^n M(z,\overline{z})}{n!} \frac{\partial^2 F_{k-n+1}(z,\overline{z})}{\partial z^2}. \qquad (11)$$

Соответствующие комбинации для размерных компонент тензора напряжений запишутся в виде:

$$\sigma_{11}^{(k+1)} + \sigma_{22}^{(k+1)} = 2\mu(z,\overline{z})\left(\tau_{11}^{(k+1)} + \tau_{22}^{(k+1)}\right);$$

$$\sigma_{22}^{(k+1)} - \sigma_{11}^{(k+1)} + 2i\sigma_{12}^{(k+1)} = 2\mu(z,\overline{z})\left(\tau_{22}^{(k+1)} - \tau_{11}^{(k+1)} + 2i\tau_{12}^{(k+1)}\right), \qquad (12)$$

а при использовании конформного отображения

$$z = \varpi(\varsigma), \varsigma = \rho e^{i\vartheta} \qquad (13)$$

получим в такой форме:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k+1)} = \sigma_{11}^{(k+1)} + \sigma_{22}^{(k+1)};$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k+1)} - \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} + 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(k+1)} = \left[\sigma_{22}^{(k+1)} - \sigma_{11}^{(k+1)} + 2i\sigma_{12}^{(k+1)}\right]\frac{\varsigma^2 \overline{\varpi'(\varsigma)}}{\rho^2 \overline{\varpi'(\varsigma)}}.$$

Как уже указывалось выше, в качестве нулевого приближения можно выбрать либо тривиальное решение, либо считать материал однородным [1]. Для определенности введем нулевое приближение комплексной функции напряжений $F_0(z,\overline{z}) \equiv 0$. В силу этого $f_0(z,\overline{z}) = 0$, а уравнение (10) приводится к виду:

$$\frac{\partial^4 F_1(z,\overline{z})}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = 0.$$

Его решение, выраженное через комплексные потенциалы ϕ_1 и χ_1, дается формулой Гурса [8]

$$2F_1(z,\overline{z}) = \overline{z}\phi_1(z) + z\overline{\phi_1(z)} + \chi_1(z) + \overline{\chi_1(z)}.$$

Исходя из этого решения имеем

$$\tau_{11}^{(1)} + \tau_{22}^{(1)} = 4\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \overline{z}} = 2\left[\phi_1'(z) + \overline{\phi_1'(z)}\right];$$

$$\tau_{22}^{(1)} - \tau_{11}^{(1)} + 2i\tau_{12}^{(1)} = 4\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = 2\left[\overline{z}\phi_1''(z) + \chi_1''(z)\right].$$

С учетом зависимости $z=re^{id}$ для полярных координат (r,d) и соотношения $\sigma_{ij} = 2\mu\tau_{ij}$, получаем

$$\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)} = 4\mu(z,\overline{z})\left[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}\right];$$

$$\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1)} + 2i\sigma_{12}^{(1)} = 4\mu(z,\overline{z})\left[\overline{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\right]; \qquad (14)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} - i\sigma_{r\alpha}^{(1)} = 2\mu(z,\overline{z})\left\{\left[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}\right] - e^{2i\alpha}\left[\overline{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\right]\right\},$$

где $\Phi_1(z) = \phi_1'(z)$, $\Psi_1(z) = \psi_1'(z) = \chi_1''(z)$, а $\sigma_{rr}^{(1)}$ и $\sigma_{r\alpha}^{(1)}$ — компоненты напряжения в полярных координатах [8].

Используя отображение (13), соотношения (14) приведем к виду:

$$\sigma_{11}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1)}=4\mu^0(\varsigma,\overline{\varsigma})\left[\Phi_1^0(\varsigma)+\overline{\Phi_1^0(\varsigma)}\right];$$

$$\sigma_{22}^{(1)}-\sigma_{11}^{(1)}+2i\sigma_{12}^{(1)}=4\mu^0(\varsigma,\overline{\varsigma})\left[\overline{\varsigma}\Phi_1^{0/}(\varsigma)+\Psi_1^0(\varsigma)\right];\quad(15)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}-i\sigma_{\rho\vartheta}^{(1)}=2\mu^0(\varsigma,\overline{\varsigma})\left\{\left[\Phi_1^0(\varsigma)+\overline{\Phi_1^0(\varsigma)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\varsigma^2\varpi^/(\varsigma)}{\rho^2\overline{\varpi^/(\varsigma)}}\left[\overline{\varsigma}\Phi_1^{0/}(\varsigma)+\Psi_1^0(\varsigma)\right]\right\},$$

где верхний нулевой индекс означает указанную функцию, выраженную относительно комплексного переменного ς.

Допустим теперь, что вид комплексных потенциалов $\Phi_1^0(\varsigma),\Psi_1^0(\varsigma)$ каким-либо способом [8] определен. Тогда, используя отображение, обратное отображению (13), и выражения (14) для комбинаций компонент тензора напряжений, находим их искомые значения.

Для получения второго приближения в первую очередь необходимо найти $f_1(z,\overline{z})$, что связано с определением функции напряжений $F_2(z,\overline{z})$:

$$f_1(z,\overline{z})=2(1-2\nu)\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}C_{11}(z,\overline{z})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}C_{21}(z,\overline{z})+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^2}C_{31}(z,\overline{z}).$$

В соответствии с (10) она выражается через $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, полученные в процессе первого приближения.

Уравнение (10) уже для второго приближения, т.е. при $k=1$ является неоднородным уравнением, общее решение которого состоит из общего решения соответствующего бигармонического уравнения и любого частного решения исходного неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения определяется формулой Гурса [8], а частное решение неоднородного уравнения находится при помощи непосредственного интегрирования. В связи с этим выберем $M(z,\overline{z})$ так, чтобы функция $\ln M(z,\overline{z})$ представляла собой некоторую рациональную функцию.

Таким образом, общее решение уравнения (10) относительно функции $F_2(z,\overline{z})$ имеет вид:

$$2F_2(z,\overline{z})=\overline{z}\phi_2(z)+z\overline{\phi_2(z)}+\chi_2(z)+\overline{\chi_2(z)}+$$

$$+\frac{1}{2(1-\nu)}\left[2(1-2\nu)T_{11}(z,\overline{z})+T_{21}(z,\overline{z})+T_{31}(z,\overline{z})\right],\quad(16)$$

$$T_{k1}(z,\overline{z})=\iint C_{k1}(z,\overline{z})dzd\overline{z},\ k=1,2,3.$$

Безразмерные компоненты тензора напряжений находятся из системы, следующей из (11) при учете общего решения (16):

$$\tau_{11}^{(2)}+\tau_{22}^{(2)}=4\frac{\partial^2F_2}{\partial z\partial\overline{z}}-4\ln M(z,\overline{z})\frac{\partial^2F_1}{\partial z\partial\overline{z}}=$$

$$=2\left[\Phi_2(z)+\overline{\Phi_2(z)}\right]-2\ln M\left[\Phi_1(z)+\overline{\Phi_1(z)}\right]+$$

$$+\frac{1}{1-\nu}\left[2(1-2\nu)S_{11}(z,\overline{z})+S_{21}(z,\overline{z})+S_{31}(z,\overline{z})\right];\quad(17)$$

$$\tau_{22}^{(2)}-\tau_{11}^{(2)}+2i\tau_{12}^{(2)}=4\frac{\partial^2F_2}{\partial z^2}-4\ln M(z,\overline{z})\frac{\partial^2F_1}{\partial z^2}=$$

$$=2\left[\overline{z}\Phi_2^/(z)+\Psi_2(z)\right]-2\ln M\left[\overline{z}\Phi_1^/(z)+\Psi_1(z)\right]+$$

$$+\frac{1}{1-\nu}\left[2(1-2\nu)S_{41}(z,\overline{z})+S_{51}(z,\overline{z})+S_{61}(z,\overline{z})\right],\quad(18)$$

$$\Phi_2(z)=\phi_2^/(z);\quad\Psi_2(z)=\psi_2^/(z)=\chi_2^{//}(z);$$

$$S_{11}(z,\overline{z})=\frac{\partial^2T_{11}(z,\overline{z})}{\partial z\partial\overline{z}};\quad S_{21}(z,\overline{z})=\frac{\partial^2T_{21}(z,\overline{z})}{\partial z\partial\overline{z}};$$

$$S_{31}(z,\overline{z})=\frac{\partial^2T_{31}(z,\overline{z})}{\partial z\partial\overline{z}};\quad(19)$$

$$S_{41}(z,\overline{z})=\frac{\partial^2T_{11}(z,\overline{z})}{\partial z^2};\quad S_{51}(z,\overline{z})=\frac{\partial^2T_{21}(z,\overline{z})}{\partial z^2};$$

$$S_{61}(z,\overline{z})=\frac{\partial^2T_{31}(z,\overline{z})}{\partial z^2}.$$

При помощи соотношений (17) и (18) и отображения (13) составим комбинацию, необходимую для учета граничных условий:

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(2)}-i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2)}}{2\mu^0(\varsigma,\overline{\varsigma})}=\left[\Phi_2^0(\varsigma)+\overline{\Phi_2^0(\varsigma)}\right]-\frac{\varsigma^2\varpi^/(\varsigma)}{\rho^2\overline{\varpi^/(\varsigma)}}\left[\overline{z}\Phi_2^{0/}(\varsigma)+\Psi_2^0(\varsigma)\right]-$$

$$-\ln M\left\{\left[\Phi_1^0(\varsigma)+\overline{\Phi_1^0(\varsigma)}\right]-\frac{\varsigma^2\varpi^/(\varsigma)}{\rho^2\overline{\varpi^/(\varsigma)}}\left[\overline{z}\Phi_1^{0/}(\varsigma)+\Psi_1^0(\varsigma)\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2(1-\nu)}\left\{2(1-2\nu)\left[S_{11}^0(\varsigma,\overline{\varsigma})-\frac{\varsigma^2}{\rho^2}S_{41}^0(\varsigma,\overline{\varsigma})\right]+\right.$$

$$\left.+\left[S_{21}^0(\varsigma,\overline{\varsigma})+S_{31}^0(\varsigma,\overline{\varsigma})\right]-\frac{\varsigma^2\varpi^/(\varsigma)}{\rho^2\overline{\varpi^/(\varsigma)}}\left[S_{51}^0(\varsigma,\overline{\varsigma})+S_{61}^0(\varsigma,\overline{\varsigma})\right]\right\}.\quad(20)$$

Подставляя известные граничные условия, находим, например, при помощи рядов Фурье или интегралов типа Коши [8] комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$.

На примере второй итерации легко понять принцип получения последовательных приближений, в силу чего нет необходимости описывать дальнейшую процедуру их определения.

В качестве примера рассмотрим применение данного приближенного метода к решению двух задач плоской деформации. Для удобства анализа получаемых результатов далее все величины используются в безразмерной форме. В обоих случаях односвязная область *S*, занимаемая деформируемым телом, представляет собой неоднородное упругое пространство с круговой цилиндрической полостью радиуса *R* бесконечной протяженности. Границей *L* данной области является боковая поверхность цилиндра.

Действие равномерного давления на внутреннюю поверхность цилиндрической круговой полости в неоднородном пространстве

Для данной задачи получено точное аналитическое решение [10], результаты которого сравним с первым, вторым и третьим приближениями, полученными при помощи описанной выше процедуры.

Пусть на границе полости действует равномерное давление *P*. На бесконечности напряжения полагаем равными нулю. Начало прямоугольной декартовой системы координат расположим в центре кругового отверстия. Здесь же установим начало цилиндрической системы координат (r, α, x_3). При этом $z = re^{i\alpha}$. Ось Ox_3 направим вдоль оси цилиндра.

Таким образом, задача сводится к решению указанных выше уравнений при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\alpha}\Big|_{r=R} = -P; \quad \sigma_{ij}\Big|_{\infty} = 0. \tag{21}$$

Будем считать материал несжимаемым и его неоднородность зададим при помощи двухпараметрического семейства функций вида

$$\mu(x_1, x_2) = \frac{\mu_0}{m} M(x_1, x_2);$$

$$M(x_1, x_2) = \exp q\left(\frac{R^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^3;$$

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \geq R^2, \tag{22}$$

где μ_0 — размерный модуль сдвига; m и q — параметры, определяющие вид неоднородности материала.

Для определенности параметр m зададим в виде

$$m = \begin{cases} e^q, & q > 0, \\ 1, & q \leq 0. \end{cases}$$

Зависимости безразмерного модуля сдвига M от текущего радиуса r при $R = 2$ (рис. 1) показывают, что, несмотря на свою ограниченность, предположения, принимаемые с целью упрощения вычислений, дают возможность моделировать упругие свойства достаточно широкого класса неоднородных материалов.

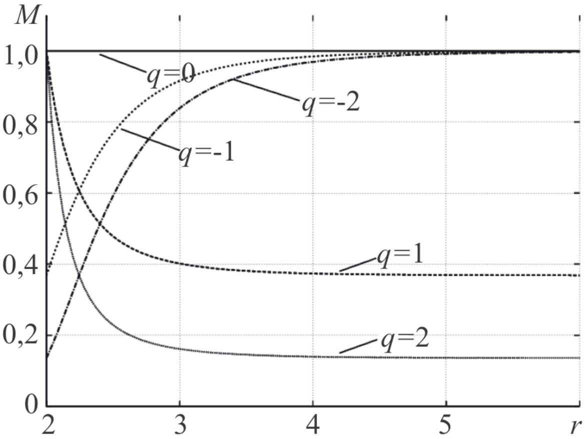

Рис. 1. Зависимости безразмерного модуля сдвига M от радиуса r при различных значениях параметра q

При $q = 0$ получим $M(r) \equiv 1$, что соответствует однородному материалу.

Рассматриваемая задача сводится к определению комплексных потенциалов, которые находятся, как правило, в форме определенных разложений или при помощи интеграла типа Коши [8].

Выбирая, как и указано выше, тривиальное нулевое приближение, первое приближение определим, используя граничные условия (21). С этой целью первое из них представим согласно (14) в виде:

$$\sigma_{rr}^{(1)} - i\sigma_{r\alpha}^{(1)}\Big|_{r=R} = -P = 2\mu(R)\Big\{\Big[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}\Big] - e^{2i\alpha}\Big[\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\Big]\Big\}\Big|_{r=R}.$$

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ являются голоморфными в области *S*; в силу второго условия (21) эти функции могут быть представлены [8] в виде рядов:

$$\Phi_1(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \ldots;$$

$$\Psi_1(z) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \ldots \tag{23}$$

Таким образом, граничное условие на контуре кругового отверстия приводится к следующему соотношению:

$$\frac{A_1}{R}e^{-i\alpha}+\frac{A_2}{R^2}e^{-2i\alpha}+\ldots+\frac{\overline{A_1}}{R}e^{i\alpha}+\frac{\overline{A_2}}{R^2}e^{2i\alpha}+\ldots+\frac{A_1}{R}e^{-i\alpha}+$$

$$+2\frac{A_2}{R^2}e^{-2i\alpha}+\ldots-\frac{B_1}{R}e^{i\alpha}-\frac{B_2}{R^2}-\frac{B_1}{R}e^{-i\alpha}\ldots=-\frac{P}{2\mu(R)}.$$

Отсюда находим, что все коэффициенты сумм (23), за исключением $B_2=0{,}5PR^2/\mu(R)$, тождественно равны нулю. Следовательно,

$$\Phi_1(z)=0,\quad \ldots\quad \Psi_1(z)=\frac{PR^2}{2\mu(R)z^2},\tag{24}$$

и размерные компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r)=-2\mu(r)\frac{PR^2}{2\mu(R)r^2};\quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(r)=2\mu(r)\frac{PR^2}{2\mu(R)r^2};$$

$$\sigma_{r\alpha}^{(1)}(r)=0.$$

Данные соотношения позволяют также получить решение соответствующей задачи для однородного тела (полагая в них постоянным модуль сдвига):

$$\sigma_{rr}^{(h)}(r)=-P\frac{R^2}{r^2};\quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(h)}(r)=P\frac{R^2}{r^2};\quad \sigma_{r\alpha}^{(h)}(r)=0.$$

При учете соотношений (14) и (24) имеем

$$4\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial\overline{z}}=0;\quad 4\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}=\frac{PR^2}{2\mu(R)z^2}.$$

Принимая во внимание выражение

$$\ln M(z,\overline{z})=q\frac{R^6}{z^3\overline{z}^3}\tag{25}$$

и используя (10), получаем

$$C_{11}(z,\overline{z})=0;\quad C_{21}(z,\overline{z})=\frac{qPR^8}{4\mu(R)z^3\overline{z}^5};$$

$$C_{31}(z,\overline{z})=\frac{qPR^8}{4\mu(R)z^5\overline{z}^3}.$$

Теперь, используя (16), определяем $T_{11}(z,\overline{z})$, $T_{21}(z,\overline{z})$, $T_{31}(z,\overline{z})$ и при помощи (19) находим:

$$S_{11}(z,\overline{z})=0;\quad S_{21}(z,\overline{z})=\frac{3qPR^8}{16\mu(R)z^4\overline{z}^4};$$

$$S_{31}(z,\overline{z})=\frac{3qPR^8}{16\mu(R)z^4\overline{z}^4};\quad S_{41}(z,\overline{z})=0;$$

$$S_{51}(z,\overline{z})=\frac{qPR^8}{4\mu(R)z^5\overline{z}^3};\quad S_{61}(z,\overline{z})=\frac{qPR^8}{4\mu(R)z^5\overline{z}^3}.\tag{26}$$

Таким образом, выражения (24) и (26) получены для комбинаций основных величин, необходимых при реализации граничных условий. В результате, определим комплексные потенциалы для второго приближения

$$\Phi_2(z)=0;$$

$$\Psi_2(z)=\left[\frac{P}{2\mu(R)}+\frac{3qP}{16(1-\nu)\mu(R)}+\frac{(1-2\nu)qP}{4(1-\nu)\mu(R)}\right]\frac{R^2}{z^2}=$$

$$=U_1\frac{R^2}{z^2},\tag{27}$$

после чего при помощи (17), (18) найдем компоненты тензора напряжений.

В той же последовательности действий будем искать третье приближение. Удовлетворяя граничному условию (21) на контуре кругового отверстия, получаем выражения для комплексных потенциалов, соответствующих третьему приближению:

$$\Phi_3(z)=0;\quad \Psi_3(z)=W_1\frac{R^2}{z^2},\tag{28}$$

где

$$W_1=\left(1+q+\frac{q^2}{2}\right)\frac{P}{2\mu(R)}-\frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{1-2\nu}{3}a_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}b_1+\frac{2}{7}b_2\right);\quad a_1=\frac{3q^2P}{32(1-\nu)\mu(R)};$$

$$b_1=\left[1+\frac{q(7-8\nu)}{8(1-\nu)}\right]\frac{qP}{4\mu(R)};\quad b_2=\frac{q^2\nu P}{8(1-\nu)\mu(R)}.$$

Далее находим компоненты тензора напряжений в третьем приближении. Они определяются путем решения системы уравнений относительно выражений $\tau_{11}^{(3)}+\tau_{22}^{(3)}$ и $\tau_{22}^{(3)}-\tau_{11}^{(3)}+2i\tau_{12}^{(3)}$, которые получили при помощи (11).

Для рассматриваемой неоднородной задачи было получено также точное аналитическое решение [10]. В расчетах принималось $\mu_0=1$, $R=2$, $P=1$, $q=1$. Графики на рис. 2 и 3 показывают, что уже третье приближение практически совпадает с точным решением.

Одноосное растяжение неоднородного пространства с круговой цилиндрической полостью

Допустим, что в неоднородном упругом пространстве имеется круговая цилиндрическая полость бесконечной протяженности и что пространство подвергается одноосному растяжению в направлении, перпендикулярном продольной оси цилиндрического выреза заданны-

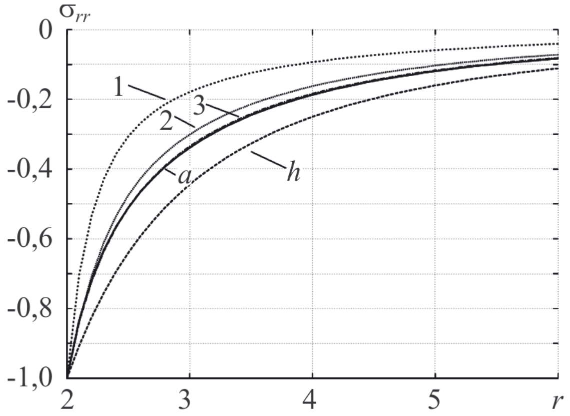

Рис. 2. Зависимости радиальных напряжений $\sigma_{rr}(r)$ *при* $q=1$:
1, 2, 3 – кривые для первого, второго и третьего приближений соответственно;
a – аналитическое решение; h – точное решение для однородного материала

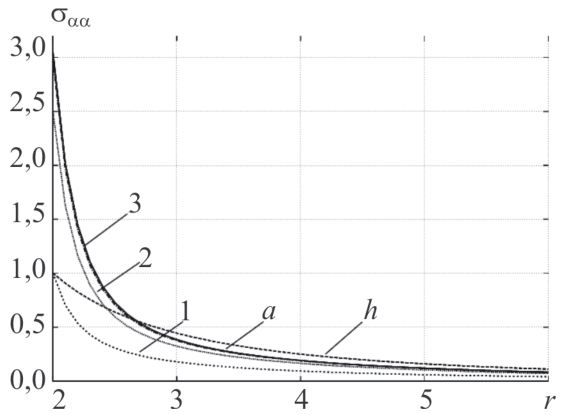

Рис. 3. Зависимости окружных напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}(r)$ *при* $q=1$:
1, 2, 3 – кривые для первого, второго и третьего приближений соответственно;
a – аналитическое решение; h – точное решение для однородного материала

ми на бесконечности напряжениями.

Введем цилиндрическую систему координат (r, α, x_3) таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вдоль оси цилиндрического выреза. Граничные условия для данной задачи в указанных системах координат примут вид:

$$\sigma_{11}\big|_{\infty} = P; \quad \sigma_{rr} - i\sigma_{r\alpha}\big|_{r=R} = 0. \qquad (29)$$

Конформное отображение, взаимно однозначно отображающее область $|z| \geq R$ комплексной плоскости z на область $|\varsigma| \geq 1$ комплексной плоскости ς, задается соотношением $z = R\varsigma$, где $\varsigma = \rho e^{i\vartheta}$.

Неоднородность материала зададим при помощи переменного модуля сдвига $\mu(x_1, x_2)$, определяемого соотношением (22), и постоянного коэффициента Пуассона.

Эта задача, как и предыдущая, решается методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения выберем тривиальное решение. Однако в этом случае при определении комплексных потенциалов удобно применить интеграл типа Коши. Компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r)$ и $\sigma_{\alpha\alpha}(r)$ были рассчитаны для $P=1$, $\mu_0=1$, $R=2, \nu=0{,}33$, $q=1$ вдоль радиуса $\alpha=\pi/2$ (рис. 4 и 5). Как и в предыдущей задаче, здесь наблюдается удовлетворительная сходимость, именно, вторые и третьи приближения в обоих случаях практически совпадают.

Обратим внимание на увеличение коэффициента концентрации окружного напряжения на контуре отверстия более чем в два раза по сравнению с однородным материалом (см. рис. 5). Этот эффект связан с перераспределением деформаций по всему телу в случае неоднородного материала. Поскольку в рассматриваемых условиях значения модуля сдвига (как и модуля Юнга) в окрестности отверстия превосходят их значения на бесконечности, то это обстоятельство приводит к увеличению концентрации окружных напряжений в неоднородной задаче с заданной зависимостью модуля сдвига от координаты. Расчеты также показывают, что при уменьшении модуля сдвига материала в окрестности цилиндрической круговой полости, по сравнению с его значением на бесконечности, наблюдается снижение коэффициента концен-

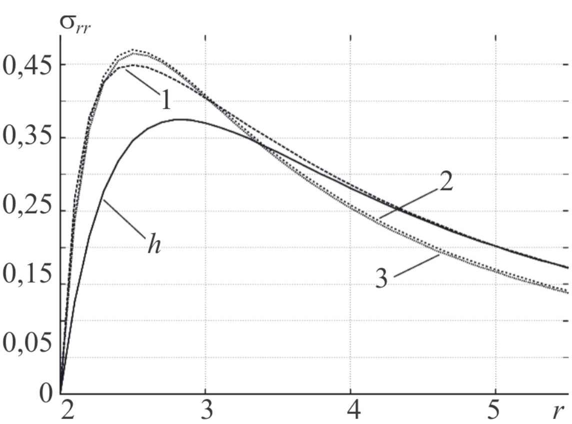

Рис. 4. Зависимости радиальных напряжений $\sigma_{rr}(r)$ *при* $q=1$:
1, 2, 3 – кривые для первого, второго и третьего приближений соответственно;
h – решение для однородного материала

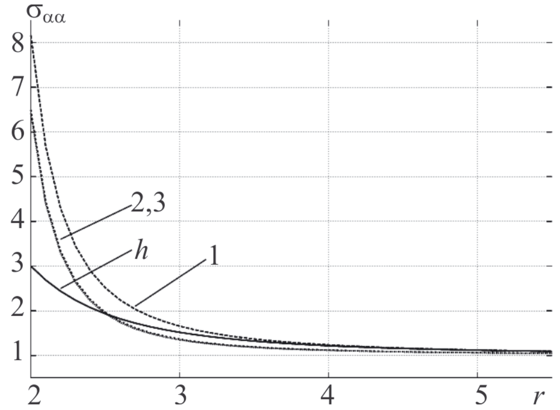

Рис. 5. Зависимости окружных напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}(r)$ *при* $q=1$:
1, 2, 3 – кривые для первого, второго и третьего приближений соответственно;
h – решение для однородного материала

трации окружных напряжений в отличии от однородного материала.

Заключение

В статье предложен метод решения задачи плоской деформации упругого тела для определенного вида неоднородности материала при помощи функций комплексного переменного, позволяющий получить последовательные приближения в аналитической форме. Сходимость метода обеспечивается факториальной сходимостью используемых разложений. Приведены решения конкретных задач. Результаты данной работы могут быть использованы при непосредственной оценке напряженно-деформированного состояния в конструкциях или сооружениях (например, в тоннелях, горных выработках и др.).

Список литературы

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Московского государственного университета, 1976. –367 с.
2. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. – М.: Мир, 1964. – 156 с.
3. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
4. Sadd M.H. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. – Amsterdam,…,Tokyo: Elsevier. 2005. – 461 p.
5. Трелоар Л. Физика упругости каучука. – М.: ИЛ, 1953. – 240 с.
6. Шарафутдинов Г.З. Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала // Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 108–120.
7. Роганова Н.А., Шарафутдинов Г.З. Применение функций комплексного переменного в задачах плоской деформации неоднородных тел // Известия МГИУ. Информационные технологии. 2008. № 1(10). С. 75–84.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Мишику М., Теодосу К. Решение при помощи функций комплексного переменного статической плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел // Прикладная математика и механика. 1966. Вып. 2. Т. 30, С. 379–387.
10. Шарафутдинов Г.З. Некоторые осесимметричные задачи для упругой неоднородной толстостенной трубы // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика, механика. 2008. № 2. С. 34–39.