УДК 539.374

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Н.Л. Осипов

ОСИПОВ
Николай Леонидович

Доцент, кандидат технических наук. Доцент кафедры сопротивления материалов Московского государственного технического университета «МАМИ». Специалист в области механики деформируемого твердого тела. Области научных интересов: прикладная теория пластичности и ползучести, сопротивление усталости, теория оболочек. Автор более 60 научных трудов.

Введение

Повышение удельной мощности энергетического оборудования наряду с обеспечением качества и надежности его важнейших узлов по критериям прочности и долговечности обусловливает поведение конструкционных материалов в экстремальных условиях при сложном силовом воздействии. Сложные геометрические формы деталей, таких, например, как кривошипные и поршневые головки шатунов, шейки коленчатых валов, крышки двигателей и замковые устройства турбинных лопаток и т.п., способствуют высокой концентрации напряжений в них. Все вместе эти факторы вызывают в локальной зоне этих концентраторов появление пластических деформаций, которые, накапливаясь, приводят при работе двигателя к появлению преждевременных усталостных трещин, существенно снижающих назначенный ресурс. Поэтому своевременный учет возможности появления усталостных трещин в деталях имеет важное значение.

Вопросам средне- и малоцикловой усталости энергетического оборудования посвящено много работ (см. обзор [1]). В настоящей статье предлагаются уточненные и, одновременно, весьма простые соотношения для ориентировочной оценки ресурса конструктивных элементов на начальной стадии проектирования, учитывающие влияние пластических деформаций на долговечность.

Соотношение Нейбера

Для приближенного вычисления упругопластического состояния при монотонном нагружении в локальной зоне концентратора чаще всего используют соотношение Нейбера [2], устанавливающее зависимость между коэффициентами концентрации упругопластических деформаций K_ε и напряжений K_σ в этой зоне и теоретическим (упругим) коэффициентом концентрации напряжений α_σ для данного типа концентратора:

$$K_\sigma K_\varepsilon = \alpha_\sigma^2;\ K_\sigma = \sigma/S;\ K_\varepsilon = \varepsilon/e, \qquad (1)$$

где σ и ε – местные упругопластические напряжение и деформация соответственно; S и e – номинальные однородные упругие напряжение и деформация соответственно (определяются либо по удаленному от концентратора сечению детали, либо, гораздо реже, по ослабленному сечению).

Соотношение (1) записано для случая преобладающего одноосного напряженно-деформированного состояния у вершины концентратора.

Добавим к уравнению (1) выражение кривой статического деформирования:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n, \qquad (2)$$

где E – модуль упругости первого рода; σ_T – предел текучести; A и n – параметры аппроксимации (например, для сталей в среднем $A \cong 0{,}002$; $n \cong 6$–10).

Решая совместно систему (1)–(2), можно рассчитать значения местных напряжений и деформаций. При знакопеременной циклической нагрузке на деталь такие вычисления повторяются в каждой точке изменения направления нагрузки на обратное с соответствующей перестройкой кривой деформирования [3]. Это позволяет моделировать предысторию деформационного процесса возле концентратора. Используемая форма аппроксимации (2) имеет то преимущество, что позволяет с хорошей точностью описать всю диаграмму деформирования материала в виде единой функции, включая линейную и нелинейную ее части, без искусственного разделения (например, используя дельта-функцию).

Однако также хорошо известно [1, 3], что соотношение Нейбера (1) дает завышенные значения местных пластических деформаций, что приводит к существенной погрешности при расчете усталостной долговечности. Были предложены различные варианты уточненных соотношений [3, 4], основанные на принципе усреднения или обширном эмпирическом материале. В данной статье предлагается рассмотреть коррекцию формулы (1), основанную на энергетическом подходе.

Корректированные определяющие уравнения

Допустим сначала существование одноосного напряженного состояния у дна концентратора. При упругом состоянии материала удельная потенциальная энергия деформации в области концентратора W_σ и вдали от него W_S выражается соответственно следующим образом:

$$W_\sigma = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon\,d\varepsilon = E\frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}; \qquad (3)$$

$$W_S = \int_0^e S(e)\,de = \int_0^e Ee\,de = E\frac{e^2}{2} = \frac{S^2}{2E}. \qquad (4)$$

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_σ может быть представлен в энергетической трактовке:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma}{S} = \left(\frac{W_\sigma}{W_S}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Предположим теперь, что перераспределение энергии не будет значительным, если у дна концентратора появится пластическое течение материала. Это предположение основывается на том, что локальный очаг пластического состояния весьма мал и окружен гораздо большим объемом жесткого упругого материала. При этом в области концентратора реализуется жесткое нагружение, контролируемое остальным упруго деформируемым массивом материала детали. Тогда соотношение (5) между коэффициентом концентрации и удельной энергией деформации сохраняется неизменным, а выражение (3) принимает вид:

$$W_\sigma = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} + A\frac{n}{n+1}\sigma\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon^e + \frac{n}{n+1}\sigma\varepsilon^p, \qquad (6)$$

где ε^e и ε^p – упругая и пластическая составляющие деформации соответственно.

Таким образом, при наличии местного пластического течения материала около концентратора уравнение (5) принимает вид:

$$\alpha_\sigma = \left(\frac{\dfrac{\sigma^2}{2E} + A\dfrac{n}{n+1}\sigma\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n}{\dfrac{S^2}{2E}}\right)^{1/2},$$

или

$$\frac{(\alpha_\sigma S)^2}{2E} = \frac{\sigma^2}{2E} + A\frac{n}{n+1}\sigma\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n. \qquad (7)$$

Объединяя уравнения (2) и (7) в систему и решая ее, получаем искомые значения упругопластической деформации ε и напряжения σ.

Разница между соотношениями (1) и (7) состоит в том, что в классическом виде закон Нейбера выражает геометрически уравнение энергий $1/2\varepsilon\sigma = \alpha_\sigma^2(1/2eS)$ в координатных осях σ–ε как равенство площадей треугольников, образованных секущими кривой деформирования, а в корректированном виде – через площадь треугольника $\alpha_\sigma^2(1/2eS)$, которая строго равна площади под кривой статического деформирования. За счет этого деформации и напряжения, рассчитанные на основе энергетического подхода, следует ожидать меньшими, чем рассчитанные по правилу Нейбера.

Регулярное циклическое нагружение. Одноосное состояние

При регулярном циклическом нагружении уравнения (1) и (7) обобщаются и записываются в терминах амплитуд деформации $\Delta\varepsilon/2$ и напряжений $\Delta\sigma/2$, $\Delta S/2$ (символ Δ обозначает соответствующий размах) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\varepsilon}{2} &= \frac{\Delta\sigma}{2E} + A'\left(\frac{\Delta\sigma}{2\sigma_T'}\right)^{n'} \\ \frac{(\alpha_\sigma \Delta S)^2}{4E} &= \frac{\Delta\sigma^2}{4E} + A'\frac{n'}{n'+1}\Delta\sigma\left(\frac{\Delta\sigma}{2\sigma_T'}\right)^{n'} \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

где A', n' – параметры аппроксимации кривой циклического деформирования [5]; σ_T' – условный предел текучести.

На основе сделанных ранее заключений следует ожидать, что и при циклическом нагружении уравнения (8) отвечают более консервативному значению долговечности по сравнению с правилом Нейбера.

Для количественной оценки долговечности детали также используем энергетический подход. При одноосном напряженном состоянии у дна концентратора и регулярном циклическом жестком нагружении петля упругопластического гистерезиса замкнута. Общая деформация в полуцикле равна сумме упругой $\Delta\varepsilon^e$ и пластической $\Delta\varepsilon^p$ деформаций. Помещая начало исходной системы координат σ–ε в точку минимальных или максимальных напряжений и деформаций в цикле, можно описать форму петли гистерезиса функцией [6]:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \Delta\varepsilon^p\left(\frac{\sigma}{\Delta\sigma}\right)^n. \qquad (9)$$

Тогда рассеяние удельной работы деформации за цикл упругопластического деформирования представляется с учетом формулы (9) следующим образом:

$$\Delta W_p = \oint \sigma d\varepsilon^p = \Delta\sigma\Delta\varepsilon^p - 2\int_0^{\Delta\sigma}\varepsilon^p d\sigma = \frac{1-n'}{1+n'}\Delta\sigma\Delta\varepsilon^p. \qquad (10)$$

Для конструкционных сталей показатель циклического упрочнения в среднем равен $n' \approx 0{,}143$.

Предположим, что скалярная мера повреждения $\Delta\omega$ за цикл есть функция рассеянной удельной энергии пластической деформации ΔW_p:

$$\Delta\omega = (\Delta W_p / W^*)^k; \quad W^* = \int_0^{\varepsilon_B}\sigma(\varepsilon)d\varepsilon, \qquad (11)$$

где k – показатель усталостного повреждения; W^* – полная удельная потенциальная энергия, которой располагает материал.

Разрушение материала произойдет, когда мера общего накопленного повреждения $\omega = N \cdot \Delta\omega$ станет равной единице. Таким образом, с учетом выражений (6), (10) и (11) можно записать критерий степени усталостного повреждения в следующем виде:

$$\omega = \frac{N\left(\frac{1-n'}{1+n'}\Delta\sigma\Delta\varepsilon^p\right)^k}{\left(\frac{\sigma_B^2}{2E}+A\frac{n}{n+1}\sigma_B\left(\frac{\sigma_B}{\sigma_T}\right)^n\right)^k} \leq 1, \quad (12)$$

где N – число циклов нагружения; σ_B – временное сопротивление на диаграмме статического деформирования материала.

Отсюда, при $\omega = 1$, вычисляется разрушающее число циклов N_f.

Из формул (11) и (12) следует, что

$$\Delta W_p = N_f^{-1/k}(W^*)^{1/k}$$

или с учетом выражения (10):

$$\frac{1-n'}{1+n'}\Delta\sigma\Delta\varepsilon^p = N_f^{-1/k}(W^*)^{1/k}. \quad (13)$$

Из работы [7] воспользуемся зависимостью:

$$\Delta\sigma = 2\sigma_f N_f^b;\ \sigma_f \approx 2\sigma_B, \quad (14)$$

где b – тангенс угла наклона прямой $\Delta\sigma/2 – N_f$ в логарифмических координатах; σ_f – размах нормального напряжения в образце, испытываемом на растяжение-сжатие.

С учетом этого выражения из (13) следует:

$$\Delta\varepsilon^p = W^*/\ (2(1-n')/(1+n')\sigma_f)\ N^{-1/k-b}. \quad (15)$$

Уравнение (15) соответствует закону Коффина-Мэнсона [7] в форме:

$$\Delta\varepsilon^p = \varepsilon_f N_f^c, \quad (16)$$

где ε_f и c – коэффициент и показатель циклической вязкости соответственно.

Используя средние значения эмпирических коэффициентов, например, для сталей $b \approx 0{,}09$, $c \approx -0{,}756$ [7], можно получить из сравнения уравнений (15) и (16) ориентировочное значение показателя k:

$$-1/k-b = c, \text{ откуда } k \approx 1{,}517.$$

Сложное напряженное состояние. Статическое и циклическое нагружения

При сложном напряженном состоянии у дна концентратора и простом нагружении разрешающие уравнения (2) и (7) для вычисления интенсивностей напряжений и деформаций запишем аналогично тому, как в работе [3]. Для статического нагружения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(\alpha_{\sigma i}S)^2}{2E} &= \frac{\sigma_i^2}{2E} + A\frac{n}{n+1}\sigma_i\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^n \\ \varepsilon_i &= \frac{\sigma_i}{E} + A\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^n \end{aligned}\right\}; \quad (17)$$

$$\alpha_{\sigma i} = \alpha_\sigma\sqrt{1/2\,[(1-a_e)^2+(a_e-b_e)^2+(1-b_e)^2]}; \quad (18)$$

$$a_e = \sigma_2/\sigma_1;\ b_e = \sigma_3/\sigma_1;$$

$$\sigma_i = \sqrt{3/2 s_{ij}s_{ij}};\ \varepsilon_i = \sqrt{2/3\, e_{ij}e_{ij}}; \quad (19)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\,\sigma_{kk}\delta_{ij};\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\,\varepsilon_{kk}\delta_{ij}; \quad (20)$$

$$\varepsilon_{kk} = \sigma_{kk}\,(1-2\nu)/E,$$

где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций возле концентратора соответственно; σ_1, σ_2, σ_3 – главные напряжения (вычисляются для упругого состояния материала); s_{ij}, e_{ij} – девиаторы напряжений и деформаций соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера; ν – коэффициент Пуассона.

Аналогично, по формуле (19) определяется и интенсивность номинальных напряжений S_i, где девиатор напряжений в формуле (20) берется в регулярной зоне вдали от концентратора.

Для простого и регулярного циклического нагружения уравнения (8) обобщаются так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(\alpha_{\sigma i}\Delta S_i)^2}{4E} &= \frac{\Delta\sigma_i^2}{4E} + A'\frac{n'}{n'+1}\Delta\sigma_i\left(\frac{\Delta\sigma_i}{2\sigma_T'}\right)^{n'} \\ \frac{\Delta\varepsilon_i}{2} &= \frac{\Delta\sigma_i}{2E} + A'\left(\frac{\Delta\sigma_i}{2\sigma_T'}\right)^{n'} \end{aligned}\right\}. \quad (21)$$

В выражении (21) интенсивности напряжений и деформаций записываются аналогично формулам (19) и (20), но в размахах. При этом критерий поврежденности (12) принимает следующий вид:

$$\omega = N\left[\frac{1-n'}{1+n'}\Delta\sigma_i\Delta\varepsilon_i^p\Big/\left(\frac{\sigma_B^2}{2E} + A\frac{n}{n+1}\sigma_B\left(\frac{\sigma_B}{\sigma_T}\right)^n\right)\right]^k \leq 1\ . \quad (22)$$

При непропорциональном нагружении уравнения (17) следует записать для учета истории нагружения в дифференциальной форме:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_i &= \frac{\alpha_{\sigma i}^2 S_i}{\sigma_i + AEn\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^n}\, dS \\ d\varepsilon_i &= \left[\frac{1}{E} + \frac{An}{\sigma_i}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^n\right] d\sigma_i \end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

Задавая нагрузку малыми шагами, можно посредством уравнений (23) проследить весь процесс изменения напряженно-деформированного состояния. Чаще всего при ориентировочных расчетах можно обойтись лишь знанием интенсивностей напряжений и деформаций в зоне концентратора, т.е. решением систем уравнений (17), (21) или (23).

При более подробном, хотя и предварительном, исследовании могут потребоваться компоненты тензоров напряжений и деформаций. В этом случае при простом монотонном нагружении запишем физический закон деформирования материала (2) в тензорном виде:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{3}{2}\frac{A}{\sigma_T}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^{n-1} s_{ij}. \qquad (24)$$

Эти шесть уравнений содержат двенадцать неизвестных компонент напряжений и деформаций. Для их определения одного дополнительного соотношения типа Нейбера (1) или (7) недостаточно. Однако, если учесть, что в большинстве случаев на поверхности дна концентратора сосредоточены лишь главные напряжения и деформации, то их можно вычислить, используя аппроксимацию типа Нейбера. Для главных компонент уравнения (24) запишутся так:

$$e_{ii} = \frac{1+\nu}{E} s_{ii} + \frac{3}{2}\frac{A}{\sigma_T}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^{n-1} s_{ii}, \qquad (25)$$

а выражение для интенсивности напряжений – следующим образом:

$$\sigma_i = \sqrt{1/2\,[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}. \qquad (26)$$

Для решения задачи в компонентах главных напряжений и деформаций необходимы еще два дополнительных условия. Из физических соображений можно предположить, что в очаге концентрации в стесненных условиях деформирования отношения главных деформаций $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ и $\varepsilon_3/\varepsilon_1$ остаются в упругом и в упругопластическом состояниях материала неизменными:

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 = C_1,\ \varepsilon_3/\varepsilon_1 = C_2. \qquad (27)$$

Поэтому, проделав лишь упругий расчет детали, можно вычислить константы C_1 и C_2.

Теперь, объединяя и решая совместно уравнения (17), (25)–(27), можно найти главные компоненты упругопластического напряженно-деформированного состояния в очаге концентратора.

При непропорциональном нагружении уравнения (25) и (27) следует записать в дифференциальной форме:

$$de_{ij} = \frac{1+\nu}{E} ds_{ii} + \frac{3}{2}\frac{A}{\sigma_T}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_T}\right)^{n-1} ds_{ii}; \qquad (28)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = C_1;\ \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = C_2. \qquad (29)$$

Объединяя и решая совместно уравнения (23), (26), (28) и (29) на каждом малом шаге нагружения, можно проследить всю историю процесса упругопластического деформирования в очаге концентратора.

Критерий деформационного типа

В общем случае переменного нагружения для оценки степени поврежденности материала более целесообразно использовать критерии деформационного типа. Кинетическое уравнение, определяющее характер накопления повреждения при монотонном активном деформировании, зададим в виде дифференциального закона:

$$\frac{d\omega}{d\varepsilon_i^p} = \beta\,(\varepsilon_i^p)^\gamma;\ \varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p}, \qquad (30)$$

где ω – функция, характеризующая скалярную меру поврежденности материала, которая монотонно возрастает при увеличении пластической деформации (равна нулю при ее отсутствии и единице – при разрушении, т.е. при достижении деформации предельной пластичности); β – нормирующий множитель; γ – физическая константа материала (коэффициент нелинейности); ε_i^p – интенсивность тензора пластических деформаций.

Интегрируя уравнение (30), получим выражение для меры поврежденности:

$$\omega = \int_0^{\varepsilon_i^p} \beta\,(\varepsilon_i^p)^\gamma d\varepsilon_i^p = \frac{\beta}{1+\gamma}(\varepsilon_i^p)^{1+\gamma} + C \le 1, \qquad (31)$$

где C – константа интегрирования.

Из определения функции поврежденности следуют граничные условия: при $\varepsilon_i^p = 0$ имеем $\omega = 0$; при предельном значении пластичности ε_{i*}^p имеем $\omega = 1$.

Из первого условия следует C = 0. С учетом этого из второго условия имеем:

$$\beta = (1 + \gamma) / (\varepsilon_{i*}^p)^{\gamma+1}.$$

Тогда получим:

$$\omega = \left(\frac{\varepsilon_i^p}{\varepsilon_{i*}^p}\right)^{\gamma+1}. \qquad (32)$$

При переменном нагружении в количестве m циклов:

$$\omega = \sum_{l=1}^{m} \omega_l \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon_i^p}{\varepsilon_{i*}^p}\right)_l^{\gamma+1} \leq 1. \qquad (33)$$

Коэффициент нелинейности γ определяется экспериментально. Для ориентировочного выбора его значения рассмотрим накопление поврежденности в процессе жесткого циклического деформирования. Тогда согласно кинетическому уравнению (32) за один цикл величина накопленной поврежденности

$$\Delta\omega_l = (\Delta\varepsilon_i^p / \varepsilon_{i*}^p)^{\gamma+1}.$$

За разрушающее число циклов N_f накопленная поврежденность

$$\sum_{l=1}^{N_f} \omega_l = N_f(\Delta\varepsilon_i^p / \varepsilon_{i*}^p)^{\gamma+1} = 1.$$

Сравнивая это выражение с уравнением Коффина-Мэнсона в форме

$$\Delta\varepsilon_i^p / 2 \cdot N_f^{\zeta} = \text{const},$$

где ζ – физическая константа материала, определяемая экспериментально, можно установить, что $\gamma = 1/\zeta - 1$.

При известном ζ [8, 9, 10] определяется и константа γ. Для сталей в среднем $\gamma \approx 2$.

Предельная пластическая деформация определяется из опытов на простое растяжение образца:

$$\varepsilon_{i*}^p = 2\sqrt{3}\ln(d_0/d),$$

где d_0 – начальный диаметр образца; d – диаметр образца в момент разрушения.

Подставляя в это выражение значение d, находим предельную деформацию.

Заключение

Приведенные в работе уравнения состояния и критерии поврежденности охватывают достаточно широкий диапазон нагружений, встречающихся на практике, и оказываются полезными при более достоверной оценке сопротивления усталости элементов энергетического оборудования. В методическом и познавательном плане изложенный упрощенный подход к решению чрезвычайно трудной общей задачи теории пластичности оказывается весьма удобным для изучения проблемы по принципу «от простого к сложному», так как данные соотношения просты и основаны на ясных физических допущениях.

Список литературы

1. Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
2. Нейбер Г., Хан Г. Проблемы концентрации напряжений в научных исследованиях и технике // В кн.: Механика, периодический сборник переводов. 1967. № 3. С. 96–112.
3. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.
4. Биргер И.А. Прогнозирование ресурса при малоцикловой усталости // Проблемы прочности. 1985. № 10. С. 39–44.
5. Серенсен С.В., Шнейдерович Р.Ш., Гусенков А.П. Прочность при малоцикловом нагружении. Основы методов расчета и испытаний . – М.: Наука, 1975. – 288 с.
6. Halford G.R. The fatigue toughness of metal // A data compilation TAM Report, № 265, Dept. of Theor. And App. Mech. University of Illinois, Urbana Ill., May. 1964. – 217 p.
7. Dean Morrow Jo. Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals // Internal Friction Damping and Cyclic Plasticity, Special Technical Publication, № 378, ASTM, 1965. P. 45–87.
8. Колмогоров В.Л. Напряжение. Деформация. Разрушение. – М.: Металлургия, 1970. – 230 с.
9. Коффин Л.Ф. Циклические деформации и усталость металлов // В кн. Усталость и выносливость металлов. – М.: ИЛ, 1963. С. 257–273.
10. Мэнсон С.С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость. – М.: Машиностроение, 1974. – 344 с.