

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКОРОСТЯХ И ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

С. В. Хейло, В. А. Глазунов, Во Динь Тунг

В статье рассмотрено исследование задачи кинематики для сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы, с тремя кинематическими цепями. Представлено решение задачи о скоростях и найдены особые положения механизма методом винтового исчисления. Приведены примеры расчета прямой и обратной задачи о скоростях.

Ключевые слова: механизм параллельной структуры, задача о скоростях, особые положения, винтовое исчисление.

Введение

Манипуляторы параллельной структуры находят все большее применение в различных областях техники, так как существует необходимость в механизмах с повышенными показателями по грузоподъемности и точности [1–3]. Данные устройства применяются в двигательных, измерительных, технологических или испытательных системах.

Для расчета манипуляторов параллельной структуры используют аппарат теории винтов и винтового исчисления. Этот подход позволяет не только создавать универсальные и компактные алгоритмы анализа механизмов, но и получить качественные характеристики, связанные с особыми положениями, точностью, углами давления. Так как винтовой подход оперирует с геометрическими образами более высокого порядка, чем обычные векторы, то в ряде случаев это дает возможность сделать обобщения и получить результат, не прибегая к сложным выкладкам. Родоначальником теории винтов является Р. Болл [4]. Первым теорию винтов в теории механизмов применил Ф.М. Димент-

берг [5, 6]. Актуальность применения теории винтов и винтового исчисления постоянно растет, поскольку схемы механических систем роботов все более усложняются. В частности, манипуляторы, выполняющие сферические движения, могут быть построены на основе разных конструктивных решений, однако все они обладают одним свойством – их можно представить схемами, в которых оси кинематических пар пересекаются в одной точке. Это соответствует замкнутой трехчленной группе винтов [5, 6].

Сферические манипуляторы применяются в устройствах для ориентирования антенн, телескопов, в испытательных стендах [7–9].

Целесообразно распространить метод винтового исчисления на весь широкий класс рассматриваемых сферических механизмов.

Отметим, что метод дифференцирования уравнений связей позволил решить задачу о скоростях сферического манипулятора [10], однако при определении его особых положений этот расчет вызывает затруднения. Вследствие этого появилась необходимость развития

винтового подхода, который еще недостаточно используется для манипуляторов данного типа. В частности, недостаточно исследована применимость этого подхода для анализа кинематики и особых положений. Развитие этого метода позволит более эффективно решать задачи, связанные с функциональными возможностями устройств этого типа. Данная работа призвана способствовать решению этой проблемы. Здесь с использованием теории винтового исчисления исследована структура сферического механизма с тремя степенями свободы, даны алгоритмы решения задач о скоростях и особых положениях.

Постановка задачи

Сферические манипуляторы параллельной структуры предназначены для осуществления ориентирующих движений рабочего органа.

На рисунке 1, *а* представлен сферический манипулятор с тремя степенями свободы [7], состоящий из трех кинематических цепей с пересекающимися осями пар, выходное звено представляет собой вращающуюся вокруг трех осей платформу. Другой пространственный сферический механизм [1] (рис. 1, *б*) с тремя степенями свободы состоит из основания, выходного звена, трех кинематических цепей с совпадающими осями приводных и неприводных пар различных кинематических цепей, что упрощает решение задач о положениях, но усложняет конструкцию. Схемы сферических механизмов могут быть применены для манипуляторов более сложной конструкции, например с шестью степенями свободы (рис. 1, *в*) [8]. Анализ вращательных движений звеньев таких манипуляторов сводится к сферическим механизмам.

В данной работе рассматривается сферический манипулятор частного вида (рис. 2), в котором углы между осями соседних кинематических пар составляют 90° . Это расположение кинематических пар имеет большой практический смысл, так как для такого механизма упрощается решение задачи о скоростях и положениях, и таким образом можно оптимизировать структуру. Кроме того, к подобной расчетной схеме относится еще целый ряд манипуляторов [9], имеющих другую конструктивную схему.

Каждое входное звено цепи соединено с двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, которая вращается вокруг трех осей, пересекающихся в точке O . Выходными

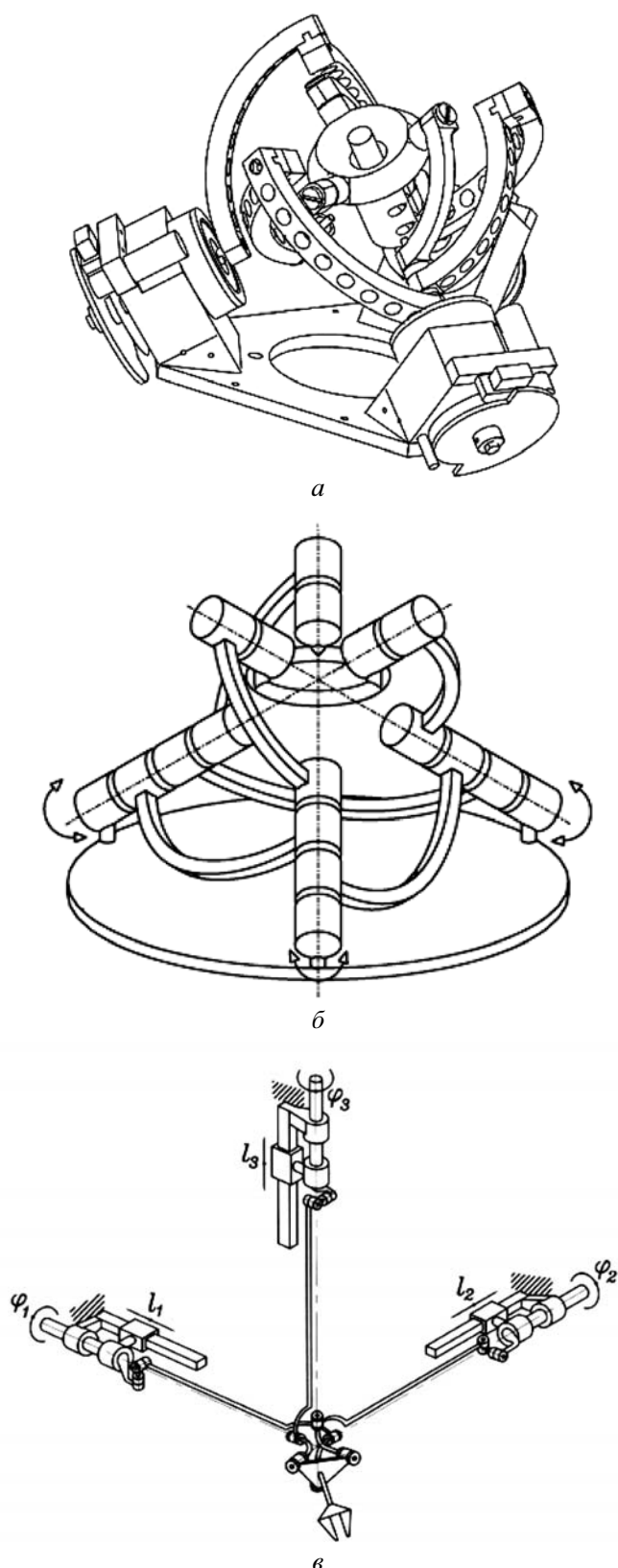


Рис. 1. Сферические манипуляторы параллельной структуры: *а* – с тремя степенями свободы и пересекающимися осями; *б* – с тремя степенями свободы и совпадающими осями шарниров различных кинематических цепей; *в* – с шестью степенями свободы

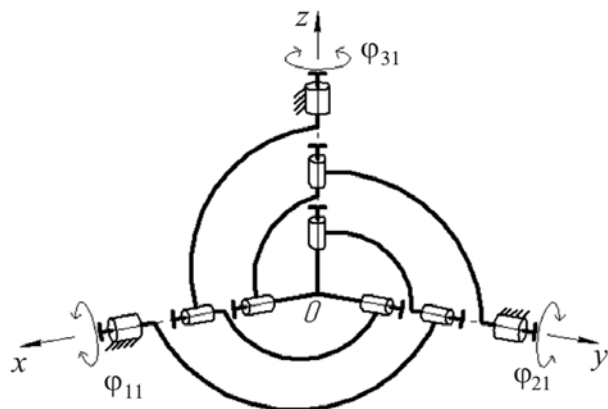


Рис. 2. Кинематическая схема сферического манипулятора

координатами являются углы поворота платформы α, β, γ вокруг осей x, y, z соответственно. Обобщенными координатами являются углы $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}$ — соответственно углы поворота входных звеньев первой, второй и третьей кинематических цепей.

В данной работе решается задача определения скоростей входных и выходных звеньев манипулятора и его особых положений. Исходными данными являются положения входных или выходных звеньев манипулятора.

Для решения задачи о скоростях винтовым методом необходимо найти силовые и кинематические винты для каждой из кинематических цепей и определить их относительный момент. Составленная из относительных моментов система уравнений позволяет решить прямую задачу о скоростях, т.е. определить скорости выходных звеньев при известных скоростях входных звеньев, и обратную задачу, а также выявить условия появления особых положений манипулятора.

Решение обратной задачи о скоростях методом винтового исчисления

Под обратной задачей понимается определение скоростей звеньев входного звена при известных скоростях выходного звена. Для решения задачи скоростей и определения особых положений манипулятора необходимо решить задачу о положениях, т.е. задать углы поворота выходного звена и по ним определить положения входных звеньев $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{31}, \varphi_{32}$.

Решение этой задачи рассмотрено в работе [10].

В частности, положению выходного звена $\alpha=1$ рад, $\beta=1$ рад, $\gamma=1$ рад соответствуют углы поворота входных звеньев: $\varphi_{11}=0,242$ рад; $\varphi_{12}=1,265$ рад; $\varphi_{21}=1,237$ рад; $\varphi_{22}=0,472$ рад; $\varphi_{31}=0,081$ рад; $\varphi_{32}=0,472$ рад. Положение выходного звена задано такое же, как и при решении задачи определения скоростей дифференцированием уравнений связей [10].

Используя аппарат винтового исчисления, можно записать, что угловая скорость выходного звена равна сумме угловых скоростей шарниров звеньев одной цепи. Для первой кинематической цепи составим уравнения:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{11}x_{11} + \omega_{12}x_{12} + \omega_{13}x_{13}; \\ \omega_y &= \omega_{11}y_{11} + \omega_{12}y_{12} + \omega_{13}y_{13}; \\ \omega_z &= \omega_{11}z_{11} + \omega_{12}z_{12} + \omega_{13}z_{13},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости выходного звена на оси x, y, z ; $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ — угловые скорости первого, второго и третьего шарниров первой цепи соответственно; (x_{11}, y_{11}, z_{11}) — плюккеры координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{11}$, расположенного вдоль оси первой пары; (x_{12}, y_{12}, z_{12}) — плюккеры координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{12}$, определяемые произведением матрицы поворота вокруг оси Ox на координаты вектора, расположенного вдоль оси второй пары в ее начальном положении; (x_{13}, y_{13}, z_{13}) — плюккеры координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{13}$, определяемые произведением матрицы поворота выходного звена на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении (значения плюккеревых координат приведены в Приложении).

Зададим угловые скорости выходного звена, такие же, как и при решении задачи определения скоростей дифференцированием уравнений связи [10]: $\omega_x=1$ рад/с, $\omega_y=1$ рад/с, $\omega_z=1$ рад/с, и сравним результаты расчетов этих скоростей входных звеньев.

Плюккеры координаты в уравнениях скоростей (1) преобразуем к матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ 0 & \cos \varphi_{11} & \cos \gamma \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha \\ 0 & -\sin \varphi_{11} & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix},$$

из которой, применяя правило Крамера, определяем скорости шарниров в кинематической цепи. Соответственно угловые скорости шарниров будут равны:

$\omega_{11}=1,316$ рад/с, $\omega_{12}=1,21$ рад/с, $\omega_{13}=2,43$ рад/с.

Составим уравнения скоростей для второй кинематической цепи:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{21}x_{21} + \omega_{22}x_{22} + \omega_{23}x_{23}; \\ \omega_y &= \omega_{21}y_{21} + \omega_{22}y_{22} + \omega_{23}y_{23}; \\ \omega_z &= \omega_{21}z_{21} + \omega_{22}z_{22} + \omega_{23}z_{23},\end{aligned}\quad (2)$$

где ω_{21} , ω_{22} , ω_{23} – угловые скорости соответственно первого, второго и третьего шарниров второй цепи; (x_{21}, y_{21}, z_{21}) – плюккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{21}$, расположенного вдоль оси первой пары; (x_{22}, y_{22}, z_{22}) – плюккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{22}$, определяемые произведением матрицы поворота вокруг оси Oy на координаты вектора, расположенного вдоль оси второй пары в ее начальном положении; (x_{23}, y_{23}, z_{23}) – плюккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{23}$, определяемые произведением матрицы поворота выходного звена на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении (значения плюккеровых координат приведены в Приложении).

Плюккеровы координаты в уравнениях скоростей преобразуем к матричной форме

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\gamma\cos\beta \\ 0 & \cos\varphi_{21} & \cos\beta\sin\gamma \\ 0 & \sin\varphi_{21} & -\sin\beta \end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений, получаем $\omega_{21}=1,312$ рад/с; $\omega_{22}=1,274$ рад/с; $\omega_{23}=-0,785$ рад/с.

Для третьей кинематической цепи уравнения скоростей будут следующие:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{31}x_{31} + \omega_{32}x_{32} + \omega_{33}x_{33}; \\ \omega_y &= \omega_{31}y_{31} + \omega_{32}y_{32} + \omega_{33}y_{33}; \\ \omega_z &= \omega_{31}z_{31} + \omega_{32}z_{32} + \omega_{33}z_{33},\end{aligned}\quad (3)$$

где ω_{31} , ω_{32} , ω_{33} – угловые скорости соответственно первого, второго и третьего шарниров третьей цепи; (x_{31}, y_{31}, z_{31}) – плюккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{31}$, расположенного вдоль оси первой пары; (x_{32}, y_{32}, z_{32}) – плюккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{32}$, определяемые произведением матрицы поворота вокруг оси Oz на координаты вектора, расположенного вдоль оси второй пары в ее начальном положении; (x_{33}, y_{33}, z_{33}) – плюккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{33}$, определяемые произведением матрицы поворота выходного звена на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении (значения плюккеровых координат

приведены в Приложении).

Плюккеровы координаты в уравнениях скоростей преобразуем к матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi_{31} & \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\gamma \\ 0 & \sin\varphi_{31} & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ 1 & 0 & -\cos\beta\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Решая систему уравнений, получаем $\omega_{31}=0,532$ рад/с; $\omega_{32}=1,078$ рад/с; $\omega_{33}=1,029$ рад/с.

Таким образом, определены скорости входных звеньев сферического манипулятора.

Решение прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления

Под решением прямой задачи понимается определение скорости выходного звена при известных скоростях входного звена. При рассмотрении прямой задачи о скоростях необходимо определить силовые и кинематические винты [3]. Силовой винт $\mathbf{R}_i$ с координатами $(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{ix}^0, r_{iy}^0, r_{iz}^0)$ перпендикулярен двум ортам осей $\mathbf{e}_{i2}$, $\mathbf{e}_{i3}$ неприводных пар. Этот винт $\mathbf{R}_i$ уравновешен совокупностью винтов – реакций в парах, соответствующих ортам $\mathbf{e}_{i2}$, $\mathbf{e}_{i3}$.

Относительный момент $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_i)$ – сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго относительно некоторой точки и вектора второго винта на момент первого относительно той же точки, где Ω_i – кинематический винт выходного звена с координатами $(V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$, а V_x, V_y, V_z – линейные скорости выходного звена, м/с.

Кинематический винт выходного звена равен сумме кинематических винтов звеньев цепи $\Omega_i = \Omega_{i1} + \Omega_{i2} + \Omega_{i3}$, где Ω_{i1} , Ω_{i2} , Ω_{i3} – кинематические винты первого, второго, третьего звеньев с координатами $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, x_{i1}^0, y_{i1}^0, z_{i1}^0)\omega_{i1}$, $(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}, x_{i2}^0, y_{i2}^0, z_{i2}^0)\omega_{i2}$, $(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3}, x_{i3}^0, y_{i3}^0, z_{i3}^0)\omega_{i3}$ соответственно.

Тогда $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_{i1} + \mathbf{R}_i, \Omega_{i2} + \mathbf{R}_i, \Omega_{i3})$.

Поскольку силовой винт перпендикулярен ортам неприводных пар, то относительные моменты $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_{i2})=0$ и $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_{i3})=0$. Следовательно, можно записать, что $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_{i1})$. Подставив значения координат силовых и кинематических винтов, получим уравнения относительных моментов:

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_i) = \omega_x r_{ix}^0 + \omega_y r_{iy}^0 + \omega_z r_{iz}^0;$$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i, \Omega_{i1}) = \omega_{i1}(x_{i1}r_{ix}^0 + y_{i1}r_{iy}^0 + z_{i1}r_{iz}^0),$$

где (x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}) – плюккеровы координаты единичных векторов $\mathbf{e}_{i1}$, расположенных вдоль осей первых пар; r_i^0 – моментная часть силового винта с координатами $r_{1x}^0, r_{1y}^0, r_{1z}^0$.

Составим систему уравнений для трех кинематических цепей:

$$\begin{aligned}\omega_x r_{1x}^0 + \omega_y r_{1y}^0 + \omega_z r_{1z}^0 &= \omega_{11}(x_{11} r_{1x}^0 + y_{11} r_{1y}^0 + z_{11} r_{1z}^0); \\ \omega_x r_{2x}^0 + \omega_y r_{2y}^0 + \omega_z r_{2z}^0 &= \omega_{21}(x_{21} r_{2x}^0 + y_{21} r_{2y}^0 + z_{21} r_{2z}^0); \\ \omega_x r_{3x}^0 + \omega_y r_{3y}^0 + \omega_z r_{3z}^0 &= \omega_{31}(x_{31} r_{3x}^0 + y_{31} r_{3y}^0 + z_{31} r_{3z}^0).\end{aligned}\quad (4)$$

Для первой кинематической цепи координаты моментной части силового винта будут рассчитаны следующим образом:

$$r_1^0 = \mathbf{e}_{12} \times \mathbf{e}_{13} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{13} & y_{13} & z_{13} \end{bmatrix} = \bar{i}(y_{12}z_{13} - z_{12}y_{13}) - \bar{j}(x_{12}z_{13} - z_{12}x_{13}) + \bar{k}(x_{12}y_{13} - y_{12}x_{13}).$$

Подставляя значения координат единичных векторов, получим плюккеровы координаты силового винта:

$$r_{1x}^0 = 0,301; r_{1y}^0 = 0,229; r_{1z}^0 = -0,926.$$

Для второй и третьей кинематических цепей координаты моментной части силовых винтов r_2^0 и r_3^0 определяются соответственно:

$$r_2^0 = \mathbf{e}_{22} \times \mathbf{e}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \\ x_{23} & y_{23} & z_{23} \end{bmatrix} = \bar{i}(y_{22}z_{23} - z_{22}y_{23}) - \bar{j}(x_{22}z_{23} - z_{22}x_{23}) + \bar{k}(x_{22}y_{23} - y_{22}x_{23}),$$

$$r_3^0 = \mathbf{e}_{32} \times \mathbf{e}_{33} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{32} & y_{32} & z_{32} \\ x_{33} & y_{33} & z_{33} \end{bmatrix} = \bar{i}(y_{32}z_{33} - z_{32}y_{33}) - \bar{j}(x_{32}z_{33} - z_{32}x_{33}) + \bar{k}(x_{32}y_{33} - y_{32}x_{33}).$$

Значения плюккеровых координат будут равны:

$$r_{2x}^0 = -0,149, r_{2y}^0 = 0,889, r_{2z}^0 = 0,430,$$

$$r_{3x}^0 = 0,037, r_{3y}^0 = -0,454, r_{3z}^0 = 0,891.$$

Зададим значения угловых скоростей входных звеньев, полученные ранее $\omega_{11}=1,316$ рад/с, $\omega_{21}=1,312$ рад/с, $\omega_{31}=0,532$ рад/с. Подставив найденные значения координат моментной части силовых винтов в уравнения (4), получаем значения угловых скоростей выходных звеньев:

$$\omega_x = 1 \text{ рад/с}, \omega_y = 1 \text{ рад/с}, \omega_z = 1 \text{ рад/с}.$$

Полученные винтовым исчислением значе-

ния скоростей совпадают с результатами, полученными дифференцированием уравнений связей [10], что свидетельствует о достоверности расчетов.

Решение задачи об особом положении методом винтового исчисления для каждой из кинематических цепей

Для определения особого положения в первой кинематической цепи подставим в уравнения скоростей (1) плюккеровы координаты $(x_{13}, y_{13}, z_{13})'$ единичного вектора $\mathbf{e}_{13}$, определяемые произведением матрицы поворота выходного звена вокруг первой оси – оси Ox , затем второй оси – оси Oy на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении (значения плюккеровых координат приведены в Приложении).

Плюккеровы координаты в уравнениях (1) преобразуем к матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \varphi_{12} \\ 0 & \cos \varphi_{11} & \cos \varphi_{12} \sin \varphi_{11} \\ 0 & -\sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

Найдем значение угла φ_{12} , при котором определитель матрицы становится равным нулю. Определитель матрицы не зависит от угла φ_{11} , а определяется углом φ_{12} . Определитель равен нулю при $\varphi_{12}=90^\circ$ и $\varphi_{12}=180^\circ$, в этих случаях плоскости расположения первой и второй цепей совпадают (рис. 3).

Особое положение механизма определяется потерей степени свободы, так как три кинематические пары лежат в одной плоскости – все вращения могут происходить вокруг оси, лежащей в одной плоскости, а все вращения вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости, невозможны.

Аналогично определяются особые поло-

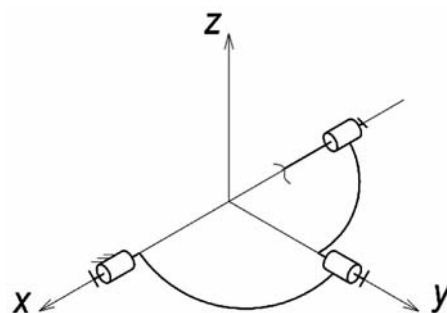


Рис. 3. Особое положение в первой кинематической цепи

жения для второй и третьей кинематических цепей.

Для второй кинематической цепи подставим в уравнения скоростей (2) плуккеровы координаты единичного вектора $\mathbf{e}_{23}$, обозначив их $(x_{23}, y_{23}, z_{23})'$. Они определяются произведением матрицы поворота выходного звена вокруг первой оси – оси Oy , затем второй оси – оси Oz на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении (значения плуккеровых координат приведены в Приложении).

Преобразуем координаты в уравнениях (1) к матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} \cos \varphi_{21} \\ 1 & 0 & \sin \varphi_{22} \\ 0 & \cos \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы не зависит от угла φ_{21} , а определяется углом φ_{22} . Определитель равен нулю при $\varphi_{22}=90^\circ$ и $\varphi_{22}=180^\circ$, в этих случаях плоскости расположения первой и второй цепей совпадают.

Для третьей кинематической цепи подставим в уравнение (3) плуккеровы координаты $(x_{33}, y_{33}, z_{33})'$ единичного вектора $\mathbf{e}_{33}$. Они определяются произведением матрицы поворота выходного звена вокруг первой оси – оси Oz , затем второй оси – оси Ox на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении (значения плуккеровых координат приведены в Приложении).

Координаты в уравнениях скоростей запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi_{31} & -\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} \\ 0 & \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} \\ 1 & 0 & \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы не зависит от угла φ_{31} , а определяется углом φ_{32} . Определитель равен нулю при $\varphi_{32}=90^\circ$ и $\varphi_{32}=180^\circ$, в этих случаях плоскости расположения первой и второй цепей совпадают.

Решение задачи об особых положениях методом винтового исчисления для механизма в целом

Для определения особых положений механизма в целом необходимо исследовать систему уравнений (4) для трех кинематических цепей.

Для первой кинематической цепи координаты моментной части силового винта имеют сле-

дующие значения:

$$r_{1x}^0 = \cos \varphi_{12}; \quad r_{1y}^0 = \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12};$$

$$r_{1z}^0 = \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{12}.$$

Для второй и третьей кинематических цепей моментные части координат силовых винтов определяются:

$$r_{2x}^0 = -\cos \varphi_{21} \sin \varphi_{22}; \quad r_{2y}^0 = -\cos \varphi_{22};$$

$$r_{2z}^0 = -\sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22};$$

$$r_{3x}^0 = -\sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32}; \quad r_{3y}^0 = \cos \varphi_{31} \sin \varphi_{32};$$

$$r_{3z}^0 = \cos \varphi_{32}.$$

Составим матрицу $\mathbf{R}$ из моментной части плуккеровых координат силовых винтов (приведена в Приложении).

Матрица, составленная из плуккеровых координат вырождается, т.е. определитель матрицы равен нулю при следующих комбинациях значений углов:

$$1) \quad \varphi_{12}=0^\circ, \varphi_{22}=90^\circ, \varphi_{32}=90^\circ;$$

$$2) \quad \varphi_{12}=0^\circ, \varphi_{22}=90^\circ, \varphi_{32}=0^\circ;$$

$$3) \quad \varphi_{12}=0^\circ, \varphi_{22}=0^\circ, \varphi_{32}=90^\circ;$$

$$4) \quad \varphi_{12}=90^\circ, \varphi_{22}=0^\circ, \varphi_{32}=90^\circ;$$

$$5) \quad \varphi_{12}=90^\circ, \varphi_{22}=90^\circ, \varphi_{32}=0^\circ.$$

Это соответствует таким положениям, в которых плоскости имеют хотя бы две параллельные нормали (рис. 4).

Потеря управляемости манипулятора определяется тем, что три силовых винта стали компланарными, т.е. параллельными одной плоскости, и вращение вокруг вектора, перпендикулярного к силовым винтам, становится неуправляемым.

Заключение

В данной работе представлено развитие теории сферических механизмов параллельной структуры на основе применения винтового ис-

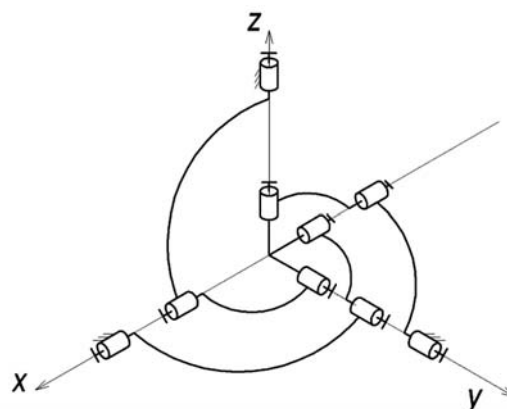


Рис. 4. Особое положение сферического манипулятора

числения. Предложены решения прямой и обратной задач о скоростях и определения особых положений манипулятора. При этом определены силовые винты, перпендикулярные ортам осей неприводных пар, каждой из кинематических цепей.

На основе найденных силовых винтов составлены уравнения, выражающие скорости сферического механизма параллельной структуры.

При этом показано, что потеря управляемости обусловлена линейной зависимостью системы силовых винтов, а потеря одной или нескольких степеней подвижности связана с вырождением систем кинематических винтов соединительных цепей.

Предложенные алгоритмы, основанные на аппарате винтового исчисления, могут быть использованы для решения задач оптимизации параметров манипуляторов. Эти результаты также могут быть использованы для анализа функциональных возможностей манипуляторов.

Список литературы

1. Merlet J.P. Parallel robots. – Kluwer Academic Publishers, 2000. – 372 p.
2. Mohammed M., Duffy J. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators // ASME J. Mech., Trans., Autom. Des. 1985. Vol. 107(2). P. 226–229.
3. Глазунов В.А., Колисков А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.: Наука, 1991. – 95 с.
4. Ball R.S. A Treatise on the Theory of Screws. – Cambridge: Cambridge University Press, 1900. – 544 p.
5. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 327 с.
6. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
7. Kong X., Gosselin C. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. – Springer, 2007. – 275 p.
8. Mianovski K. Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom // 12th IFToMM World Congress, Becasson. 2007. P. 126–132.
9. Huda S., Takeda Y. Dimension synthesis of 3-URU pure rotation parallel mechanism with respect to singularity and workspace // 12th IFToMM World Congress, Becasson, 2007. P. 235–242.
10. Хейло С.В. Решение задачи кинематики сферического манипулятора параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. 2010. № 4. С. 18–22.

Материал поступил в редакцию 14.01.2011

ХЕЙЛО Сергей Валерьевич

E-mail: sheilo@yandex.ru
Тел. +7 (495) 955-37-87

Кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики ГОУ ВПО «МГТУ имени А.Н. Косыгина». Сфера научных интересов – робототехника, манипуляторы параллельной структуры. Автор более 30 научных публикаций.

ГЛАЗУНОВ Виктор Аркадьевич

E-mail: vaglznv@mail.ru
Тел. +7 (495) 924-00-28

Доктор технических наук, доктор философских наук, профессор. Заведующий лабораторией теории механизмов и структуры машин института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Сфера научных интересов – робототехника, манипуляторы параллельной структуры, философия науки. Автор более 160 научных публикаций, в том числе двух монографий, 22 изобретений.

Во Динь Тунг

E-mail: vaglznv@mail.ru
Тел. +7 (495) 924-00-28

Аспирант Национального университета транспорта, г. Хошимин. Сфера научных интересов – робототехника, манипуляторы параллельной структуры. Автор 6 научных публикаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения плюккеровых координат для уравнения (1):

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,971 \\ 0,24 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha \\ \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,954 \\ -0,072 \\ 0,292 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \dots$$

где **A** – матрица, описывающая переход выходного звена от подвижной системы координат к неподвижной [10].

Значения плюккеровых координат для уравнения (2):

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{21} \\ 0 \\ \sin \varphi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,944 \\ 0 \\ 0,327 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \\ \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,292 \\ 0,454 \\ -0,841 \end{pmatrix}.$$

Значения плюккеровых координат для уравнения (3):

$$\begin{pmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ 0,0809 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \beta \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,072 \\ 0,888 \\ 0,455 \end{pmatrix}.$$

Значения плюккеровых координат для уравнения (1):

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & -\sin \varphi_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

Значения плюккеровых координат для уравнения (2):

$$\begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & -\sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} & -\sin \varphi_{22} & 0 \\ \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} \cos \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{22} \\ \cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} \end{pmatrix}.$$

Значения плюккеровых координат для уравнения (3):

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Матрица плюккеровых координат силовых винтов:

$$R = \begin{pmatrix} r_{1x}^0 & r_{1y}^0 & r_{1z}^0 \\ r_{2x}^0 & r_{2y}^0 & r_{2z}^0 \\ r_{3x}^0 & r_{3y}^0 & r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & -\cos \varphi_{21} \sin \varphi_{22} & -\sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12} & -\cos \varphi_{22} & \cos \varphi_{31} \sin \varphi_{32} \\ \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{12} & -\sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$