

# ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

А.С. Горобцов



**ГОРОБЦОВ**  
**Александр Сергеевич**

Профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» Волгоградского технического университета. Специалист в области компьютерного моделирования динамики пространственных механических систем. Автор более 80 научных трудов, в том числе одной монографии.

Современные возможности компьютерных технологий обуславливают интенсивное развитие методов механики, связанных с численными методами анализа динамики механических систем тел. Различные методы представления дифференциальных уравнений движения систем твердых тел рассмотрены в научных трудах *Д.Ю. Погорелова, И.П. Норенкова, В.А. Коноплева, В.В. Величенко, А.Г. Лескова, О.А. Пигилева, В.М. Дмитриева, Е.А. Арайса, A. Shabana, E. Bayo, M.A. Serna* и др.

Все существующие методы анализа можно разделить на две большие группы по принципу выбора обобщенных координат тел, входящих в систему, – с использованием относительных или абсолютных координат.

В первом случае движение описывается в координатах, определяющих положение тел относительно друг друга, что максимально эффективно для механических систем, в которых кинематические цепи образуют разомкнутую структуру типа «дерево». Однако, если кинематические цепи включают в себя замкнутые контуры, то эффективность метода значительно снижается из-за необходимости устранения неопределенностей в замыкающих связях. Различные модификации такого подхода можно найти в работах [1–6].

Во втором случае каждое тело характеризуется независимыми координатами, определяющими его положение и ориентацию в пространстве. В качестве координат используются три поступательных перемещения и три величины углового перемещения, зависящие от ориентации тела. Уравнения движения в этом случае включают три уравнения поступательного движения и три уравнения вращательного движения. Наиболее просто уравнения вращения записываются в квазискоростях – проекциях угловой скорости вращения на оси системы координат, связанной с телом [7]. Уравнения связей записываются в этих координатах или их инвариантах и добавляются в уравнения движения тел с помощью множителей Лагранжа [8]. Основанные на таком представлении методы справедливы для моделей механических систем произвольной структуры. Однако непосредственное интегрирование таких уравнений приводит к необходимости решения системы нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений, что является достаточно сложной задачей. Кроме того, при такой форме уравнений не обеспечивается устойчивость численных методов интегрирования, поскольку соответствующее линеаризованное уравнение для ошибок имеет нулевые собственные значения.

Указанные недостатки преодолеваются методом штрафных функций [9–12], который основан на том, что в правые части уравнений движения тел добавляются силы, пропорциональные невязкам перемещений, скоростей и ускорений в уравнениях связей. Решение скорректированной системы уравнений стремится к решению исходной системы уравнений при увеличении значений коэффициентов пропорциональности [11]. К недостаткам такой схемы следует отнести увеличение жесткости системы дифференциальных уравнений и необходимость уменьшать шаг интегрирования или применять неявные схемы интегрирования.

Как отмечается в работе [11], жесткость системы не возрастает при использовании в качестве штрафных функций инерционных сил,

но при этом увеличивается заполненность матрицы старших производных.

В данной статье рассматривается **представление уравнений движения системы тел с кинематическими цепями произвольной структуры** с учетом упругости отдельных тел. Для этого используются уравнения Лагранжа первого рода [8], где уравнения динамики механической системы включают уравнения свободного движения тел и уравнения связей для кинематических пар (совокупность кинематических пар образует кинематические цепи). Кроме кинематических пар, связи между телами могут задаваться силами от упруго-демпфирующих элементов, соединяющих тела.

Для упрощения численного интегрирования полученных систем уравнений, уравнения кинематических связей записываются через вторые производные, что позволяет использовать явные методы интегрирования без необходимости решать нелинейную систему уравнений относительно переменных состояния. Достоинства рассматриваемого метода – относительная простота составления уравнений для систем твердых и упругих тел, возможность учета произвольной нелинейной характеристики упругих элементов, отсутствие ограничений на структуру расчетной модели. Недостатки метода – избыточное число переменных состояния (это частично компенсируется диагональной структурой матрицы масс), неустойчивость численных алгоритмов решения из-за плохой обусловленности матрицы коэффициентов связей и наличия нулевых корней характеристического уравнения всей системы.

При таком подходе уравнения движения механической системы тел произвольной структуры записываются в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t), \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{M}$  – матрица инерции;  $\mathbf{p}$  – вектор множителей Лагранжа;  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$  – вектор внешних сил, включающий нагрузку, силы от упруго-дем-

пфирующих элементов, и гироскопические силы;  $\mathbf{x}$  – вектор обобщенных координат всей системы размерностью  $n$ ;  $t$  – время;  $\mathbf{D}$  – матрица переменных коэффициентов уравнений кинематических связей размерностью  $k \times n$  ( $k$  – число связей);  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  – вектор правых частей уравнений связей;  $\tau$  – символ транспонирования матрицы.

Рассмотрим **способы описания уравнений движения тел без кинематических связей – свободных тел.**

Для уравнений движения твердого тела (рис. 1) используется представление в квази-скоростях [7]:

$$\begin{cases} \mathbf{m} \ddot{\mathbf{S}}_c = \sum_1^{k_f} \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_c = \sum_1^{k_f} (\mathbf{A}^T \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{r}_i + \sum_1^{k_m} \mathbf{M}_{ei}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{m}$  – диагональная матрица масс тела;  $\mathbf{S}_c = (X, Y, Z)^T$  – вектор координат центра масс тела в неподвижной системе координат;  $k_f$  – количество внешних сил, действующих на тело;  $\mathbf{F}_i$  – трехмерный вектор сосредоточенных внешних сил в неподвижной системе координат;  $\mathbf{J} = \text{diag} (J_x, J_y, J_z)$  – диагональная матрица главных центральных моментов инерции тела;  $\boldsymbol{\omega}_c = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  – вектор проекций угловой скорости тела на оси подвижной системы координат, связанной с телом;  $\mathbf{A}$  – ортогональная матрица поворота (ориентации) для преобразования вектора из подвижной системы координат в неподвижную;  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор точки приложения силы в подвижной системе координат;  $\mathbf{M}_{ei}$  – трехмерный вектор внешних моментов для  $i$ -й точки;  $k_m$  – количество внешних моментов.

Матрица поворота определяется по известным соотношениям с помощью кинематических уравнений Эйлера. В уравнения (2) не входят гироскопические силы.

Для случая плоского движения таких уравнений достаточно для полного описания движения тел. В пространственном случае к уравнениям (2) добавляются кинематические уравнения Эйлера, необходимые для определения матрицы поворота.

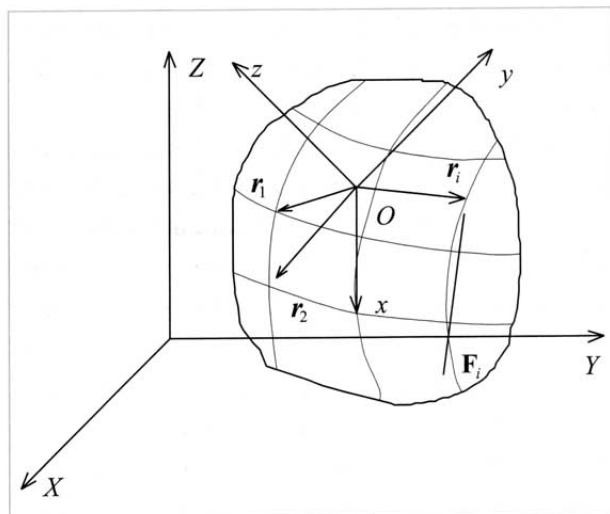


Рис. 1. Система координат тела

В данной работе используются кинематические уравнения Эйлера следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = (\omega_x \cos \psi - \omega_y \sin \psi) / \cos \theta \\ \dot{\theta} = \omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi \\ \dot{\psi} = (\omega_y \sin \psi - \omega_x \cos \psi) \tan \theta + \omega_z. \end{cases}$$

Здесь  $\varphi, \theta, \psi$  – корабельные углы Эйлера [13], т.е. углы последовательных поворотов вокруг осей  $x, y, z$  связанной с телом системы координат;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора угловой скорости тела на оси подвижной системы координат.

Матрица поворота  $\mathbf{A}$  определяется через углы Эйлера:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ -\cos \theta \cos \psi & -\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \theta & -\sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}$$

Уравнения движения упругих тел представляются с использованием дискретных методов, которые хорошо разработаны для решения статических и динамических задач теории упругости. Среди них наиболее широко применяется метод конечных элементов (МКЭ), позволяю-

щий подробно описывать упругие свойства тел произвольной формы в области линейных (малых) деформаций.

Конечно-элементное представление можно использовать и для моделирования больших движений тела, считая, что малые упругие деформации тела происходят относительно жесткого каркаса, совершающего большие движения [14, 15]. (Под большими движениями здесь подразумевается общепринятый термин, означающий точное описание в уравнениях динамики угловой ориентации тела без использования допущения о малости углов поворота.)

Для упругого тела при свободных граничных условиях уравнения движения относительно подвижного жесткого каркаса запишутся в виде:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_f \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_f \mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{F} + \mathbf{M}_f (\mathbf{a}_\omega + \mathbf{a}_c). \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{M}_f$  – матрица инерции тела;  $\mathbf{K}_f$  – матрица коэффициентов демпфирования;  $\mathbf{C}_f$  – матрица жесткости;  $\mathbf{u}$  – вектор узловых координат всего тела, состоящий из векторов координат узлов;  $\mathbf{A}$  – матрица поворота;  $\mathbf{F}$  – вектор узловых сил и моментов;  $\mathbf{a}_\omega$  и  $\mathbf{a}_c$  – векторы вращательного и кориолисова ускорений в узлах тела соответственно.

Вращательное ускорение  $i$ -го узла представляется в виде:

$$\mathbf{a}_{\omega i} = \mathbf{a}_{ni} + \mathbf{a}_{ti}, \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_{ni} = \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_i), \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_{ti} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \mathbf{r}_i. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{a}_{ni}$ ,  $\mathbf{a}_{ti}$  – нормальное и тангенциальное ускорения узла соответственно;  $\boldsymbol{\omega}_0$  – вектор угловой скорости жесткого каркаса;  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  – вектор углового ускорения жесткого каркаса относительно произвольного центра  $O$ ;  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор, соединяющий центр  $O$  и рассматриваемый узел;  $\times$  – символ векторного произведения.

Для определения компонент вектора  $\boldsymbol{\omega}_0$  (проекций на оси координат) можно использовать дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{\omega}_{0x} = \varepsilon_{0x} = \frac{M_{0x}}{J_{0x}}, \dots, \dot{\omega}_{0z} = \varepsilon_{0z} = \frac{M_{0z}}{J_{0z}}. \quad (7)$$

Здесь  $M_{0x}$  – момент внешних сил относительно оси  $Ox$  (в системе координат, связанной с телом);  $J_{0x}$  – момент инерции тела относительно оси  $Ox$ .

При этом система координат жесткого каркаса на упругом теле выбрана так, что координатные оси являются главными центральными осями инерции.

Вектор моментов внешних сил  $\mathbf{M}_0$  определяется как

$$\mathbf{M}_0 = \sum_1^l \mathbf{r}_i \times \mathbf{A}^T \mathbf{F}_i. \quad (8)$$

Здесь  $l$  – количество узлов в конечно-элементной модели;  $\mathbf{F}_i$  – трехмерный вектор узловых сил в неподвижной системе координат.

Кориолисово ускорение  $\mathbf{a}_{ci}$  отдельного узла имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ci} &= 2 \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_{0i}, \\ \mathbf{v}_{0i} &= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{0i}$  – скорость рассматриваемого узла относительно выбранного центра;  $\mathbf{v}_i$  – абсолютная скорость  $i$ -го узла;  $\mathbf{v}_0$  – абсолютная скорость центра.

Матрица поворота  $\mathbf{A}$  упругого тела определяется из кинематических уравнений Эйлера с использованием дифференциальных уравнений вида (7) для определения проекций вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат.

Матричное уравнение (3) точно описывает малые упругие деформации тела совместно с большими перемещениями жесткого каркаса. Однако при его использовании возникают трудности интегрирования из-за большой размерности и жесткости. В связи с этим целесообразно представлять уравнение в нормальных координатах

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\eta\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2\mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{A}^T \mathbf{F} + \Phi^T \mathbf{M}_f (\mathbf{a}_\omega + \mathbf{a}_c). \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  – вектор нормальных координат;  $\eta$  – диагональная матрица коэффициентов демпфирования по формам колебаний;  $\Omega^2$  – диагональная матрица квадратов собственных частот;  $\Phi$  – матрица форм колебаний.

Поскольку уравнение (3) составляется для тела при свободных границах, матрицу  $\Phi$  и вектор  $\mathbf{q}$  можно представить в виде двух частей, соответствующих формам движения тела как твердого и как упругого:

$$\Phi = (\Phi_r \Phi_f)^T, \quad \mathbf{q} = (\mathbf{q}_r \mathbf{q}_f)^T.$$

Здесь  $\Phi_r$  – матрица форм движения твердого тела;  $\mathbf{q}_r$  – вектор нормальных координат, соответствующих формам движения твердого тела;  $\Phi_f$  – матрица форм движения упругого тела;  $\mathbf{q}_f$  – вектор нормальных координат для форм движения упругого тела.

Для определения угловой скорости жесткого каркаса в связанной с телом системе координат можно использовать две любые точки на теле (см. рис. 1), координаты которых известны. Выразив скорости этих точек через нормальные координаты и угловую скорость, можно получить следующее уравнение:

$$\omega_0 = \mathbf{R}^{-1} \Phi_r^* \mathbf{q}_r, \quad (11)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{z1} & r_{y1} \\ r_{z1} & 0 & -r_{x1} \\ -r_{y2} & r_{x2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_r^* = \begin{bmatrix} \Phi_r^{x1} - \Phi_r^{x0} \\ \Phi_r^{y1} - \Phi_r^{y0} \\ \Phi_r^{z2} - \Phi_r^{z0} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\Phi_r^{ui}$  – подматрица коэффициентов форм колебаний твердого тела для  $i$ -го узла по направлению  $u$  ( $i \rightarrow 0, 1, 2$ ;  $u \rightarrow x, y, z$ ).

Уравнения движения системы тел составляются путем объединения уравнений вида (2), (3) и (10) отдельных тел. Суммарный вектор переменных состояния системы (обобщенных координат) состоит из подвекторов переменных состояния отдельных тел. Так, для системы из двух тел (рис. 2) уравнения движения без

учета уравнений связей от кинематических пар имеют вид:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{X}}_s = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{X}}_s, \mathbf{X}_s, t), \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_s = (\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1, \omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}, \dot{X}_2, \dot{Y}_2, \dot{Z}_2, \omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2})^T.$$

Здесь  $\mathbf{M}_s$  – матрица инерции, состоящая из подматриц инерции отдельных тел;  $\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1$  – абсолютные скорости центра масс первого тела в неподвижной системе координат;  $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$  – проекции вектора угловой скорости первого тела на связанные с телом оси координат;  $\dot{X}_2, \dot{Y}_2, \dot{Z}_2$  – абсолютные скорости центра масс второго тела в неподвижной системе координат;  $\omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2}$  – проекции вектора угловой скорости второго тела на связанные с телом оси координат;  $t$  – время.

Вектор правых частей  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{X}}_s, \mathbf{X}_s, t)$  может включать в себя силы от внешних нагрузок, упругих и демпфирующих элементов (например, от пружины АВ на рис. 2). Вид компонентов вектора правых частей уравнения (12) зависит от расчетной схемы системы.

**Составление системы уравнений движения** (1) предполагает использование уравнений связей при наличии в расчетной схеме кинематических пар. Общий принцип составления уравнений связей, позволяющий моделировать широкий класс кинематических пар, заключается в приравнивании проекций ускорений сопрягаемых точек тел на оси какой-либо системы координат. В зависимости от выбора такой системы координат можно получать уравнения связей для кинематических пар различных классов.

Запишем уравнения связей в проекции на вспомогательную систему координат, связанную с одним из тел (см. рис. 2). Считается, что вспомогательная система координат  $\xi\eta\zeta$  связана с первым телом, а кинематическая связь тел представляется сферическим шарниром.

Уравнения связей, задаваемые таким шарниром, могут получаться из равенства соответ-

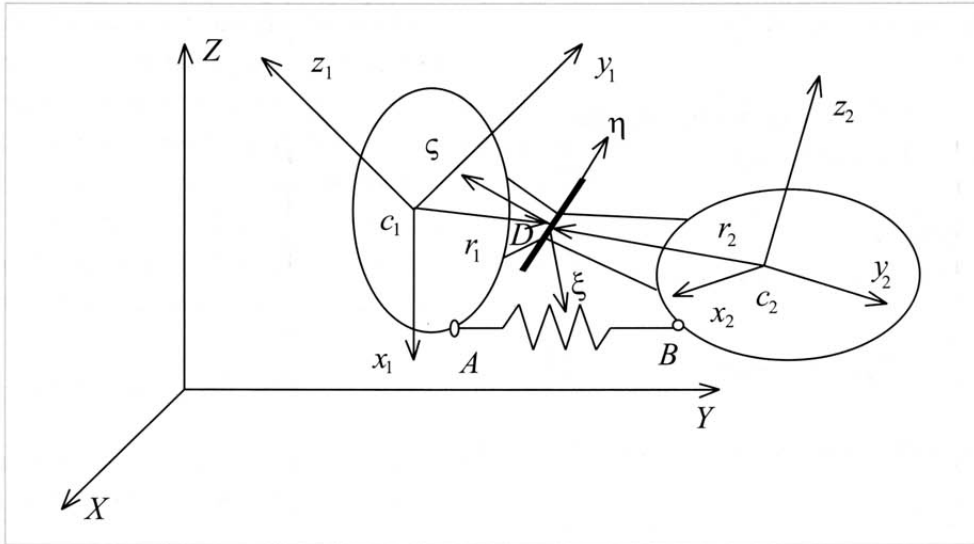


Рис. 2. Расчетная схема системы из двух тел, связанных сферическим шарниром и упругим элементом

ствующих проекций ускорений совпадающих точек тел, в данном случае определяемыми векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , на оси системы координат  $\xi\eta\varsigma$ .

Для определения коэффициентов матриц связей по ускорениям используются выражения для скоростей общей точки шарнира D (см. рис. 2). Рассматриваются следующие матрицы поворотов:  $\mathbf{A}_1$  – матрица преобразования из  $x_1 y_1 z_1$  в XYZ,  $\mathbf{A}_2$  – матрица преобразования из  $x_2 y_2 z_2$  в XYZ,  $\tilde{\mathbf{A}}$  – матрица преобразования из  $\xi\eta\varsigma$  в  $x_1 y_1 z_1$ .

Запишем вектор абсолютной скорости общей точки D в проекции на оси системы координат  $\xi\eta\varsigma$  для различных моделей тел.

Тело 1 – твердое:

$$\mathbf{v}'_1 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}^T (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1). \quad (13)$$

Тело 2 – твердое:

$$\mathbf{v}'_2 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T \dot{\mathbf{s}}_2 + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_2^T (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2). \quad (14)$$

Тело 1 – упругое:

$$\mathbf{v}'_1 = \tilde{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\Phi}_1 \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (15)$$

Тело 2 – упругое:

$$\mathbf{v}'_2 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\Phi}_2 \dot{\mathbf{q}}_2, \quad (16)$$

Здесь  $\mathbf{s}_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)^T$ ,  $\mathbf{s}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)^T$ .

Дифференцируя соотношения (13)–(16) по времени, получим выражения, в которые будут входить члены со вторыми производными обобщенных координат, образующие матрицу связей  $\mathbf{D}$ , и члены с первыми производными и самими переменными, образующие правую часть уравнений связей  $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ . Представим эти составляющие для рассматриваемых моделей тел.

Тело 1 – твердое.

Члены со вторыми производными

$$\mathbf{D}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T (\ddot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{A}_1 (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_1)); \quad (17)$$

правая часть уравнений связей

$$\mathbf{h}_1(\dot{\mathbf{u}}_1, \mathbf{u}_1) = -\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T (\boldsymbol{\Omega}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1^T \mathbf{A}_1 (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1)), \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z1} & \omega_{y1} \\ \omega_{z1} & 0 & -\omega_{x1} \\ -\omega_{y1} & \omega_{x1} & 0 \end{bmatrix}.$$

При получении выражений (17) и (18) использовалось соотношение  $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}$  [13].

Тело 2 – твердое.

Члены со вторыми производными

$$\mathbf{D}_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T (\ddot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{A}_2 (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{r}_2)); \quad (19)$$

правая часть уравнений связей

$$h_2(\dot{u}_2, u_2) = -\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T (\Omega_1^T \dot{\mathbf{s}}_2 + \Omega_1^T \mathbf{A}_2 (\omega_2 \times \mathbf{r}_2) + \mathbf{A}_2 \Omega_2 (\omega_2 \times \mathbf{r}_2)). \quad (20)$$

Тело 1 – упругое.

Члены со вторыми производными

$$\mathbf{D}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{A}}^T \Phi_1 \ddot{\mathbf{q}}_1; \quad (21)$$

правая часть уравнений связей в этом случае равна нулю.

Тело 2 – упругое.

Члены со вторыми производными

$$\mathbf{D}_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{A}_2 \Phi_2 \ddot{\mathbf{q}}_2; \quad (22)$$

правая часть уравнений связей

$$h_2(\dot{u}_2, u_2) = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_1^T (\Omega_1^T \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \Omega_2) \Phi_2 \dot{\mathbf{q}}_2. \quad (23)$$

Для сферического шарнира матрица связей и вектор правых частей уравнений связей имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (\mathbf{D}_1 \ \mathbf{D}_2), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2. \end{aligned}$$

Различными комбинациями соответствующих компонентов матриц и векторов, входящих в формулы (17)–(23), можно получать уравнения связей для различных типов кинематических пар.

Уравнения связей (17)–(23) корректны, если сопрягаемые точки кинематических пар совпадают и неподвижны друг относительно друга, как это имеет место, например, для сферического шарнира.

Если для кинематических пар не выполняется условие взаимной неподвижности сопрягаемых точек, координаты которых входят в уравнения связи (например, цилиндрического шарнира четвертого класса), то необходима корректировка координат одной из сопрягаемых точек.

Кинематические пары, имеющие взаимные перемещения сопрягаемых точек, удобно описывать в системе координат одного из тел с коррекцией тех координат точки этого тела, по которым не накладываются связи, т.е. в зависимостях (17) и (18) компоненты  $\mathbf{r}_1$ , по направлениям которых нет связей, заменять на соответствующие компоненты вектора вида

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{A}_1^T (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{r}_2). \quad (24)$$

Здесь  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор точки тела 1, совпадающей с сопрягаемой точкой тела 2, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}_2$ ;  $\mathbf{s}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ ,  $\mathbf{s}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ .

Такая замена координат первой сопрягаемой точки позволяет обеспечить совпадение точек сопрягаемых тел в тех направлениях, по которым кинематическая пара обладает поступательной подвижностью.

Для описания высших кинематических пар можно использовать схемы замещения, в которые входят только низшие кинематические пары [16]. В качестве примера рассмотрим зубчатую передачу из двух колес и упрощенную схему замещения, построенную без учета профиля колеса (рис. 3).

Уравнения связей такой схемы замещения характеризуются тем, что ограничения необходимо накладывать на точки двух тел, совпадающих в данный момент времени с точкой контакта.

Точка зацепления имеет постоянные координаты в системе координат некоторого третьего тела – базового тела (например, корпуса редуктора, в который входит передача) и переменные координаты в системах вращающихся тел. В этом случае уравнения связей можно записать с использованием уравнений (17)–(23), пересчитывая координаты радиуса-вектора точки зацепления.

Построим уравнения связей точек контакта колес с точкой базового тела в проекции на оси системы координат базового тела. Рассматривается только случай твердого тела. Левые части уравнений связи для первого и

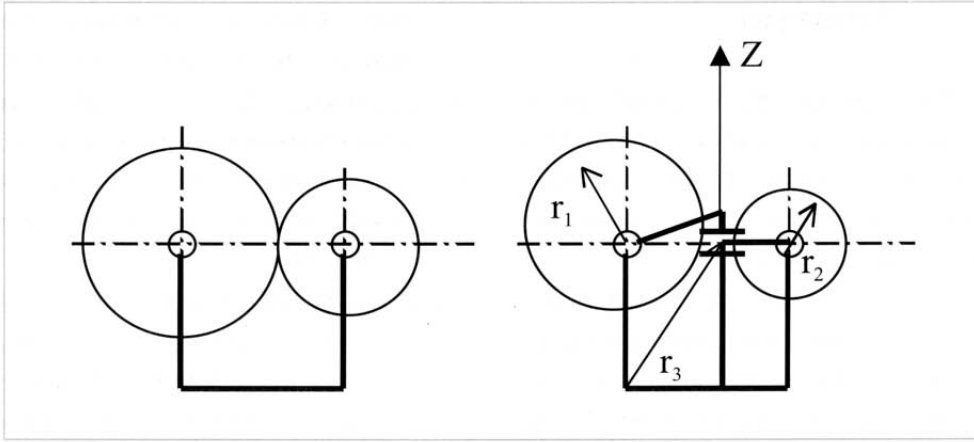


Рис. 3. Кинематическая схема зубчатой передачи – слева и упрощенная схема замещения – справа

второго колес в проекции на оси системы координат тела 3 имеют вид соответственно:

$$\mathbf{D}_3 \ddot{\mathbf{u}}_3 + \mathbf{D}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\ddot{\mathbf{s}}_3 + \mathbf{A}_3 (\dot{\omega}_3 \times \mathbf{r}_3)) - \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\ddot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{A}_1 (\dot{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1^*)), \quad (25)$$

$$\mathbf{D}_3 \ddot{\mathbf{u}}_3 + \mathbf{D}_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\ddot{\mathbf{s}}_3 + \mathbf{A}_3 (\dot{\omega}_3 \times \mathbf{r}_3)) - \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\ddot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{A}_2 (\dot{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2^*)), \quad (26)$$

Радиусы-векторы  $\mathbf{r}_1^*$  и  $\mathbf{r}_2^*$  определяются по выражениям вида (24):

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{A}_3^T (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3 + \mathbf{A}_1 \mathbf{r}_1), \quad (27)$$

$$\mathbf{r}_2^* = \mathbf{A}_3^T (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{r}_2). \quad (28)$$

В качестве величины  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) можно брать радиус-вектор любой точки на окружности колеса, проходящей через точку зацепления. Как можно видеть, в уравнениях (25) и (26) первые слагаемые равны, поэтому, вычитая из одного уравнения другое, получим:

$$\mathbf{D}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{D}_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\ddot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{A}_2 (\dot{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2^*)) - \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\ddot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{A}_1 (\dot{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1^*)). \quad (29)$$

Выражение (29) определяет левую часть уравнений связей для схемы замещения зубчатого зацепления (см. рис. 3). Тогда правая часть уравнений связей запишется в таком виде:

$$\mathbf{h}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}_3^T (\Omega_3^T \dot{\mathbf{s}}_1 + \Omega_3^T \mathbf{A}_1 (\omega_1 \times \mathbf{r}_1^*) + \mathbf{A}_1 \Omega_1 (\omega_1 \times \mathbf{r}_1^*) - \Omega_3^T \dot{\mathbf{s}}_2 - \Omega_3^T \mathbf{A}_2 (\omega_2 \times \mathbf{r}_2^*) - \mathbf{A}_2 \Omega_2 (\omega_2 \times \mathbf{r}_2^*)). \quad (30)$$

Выражения (29 и 30) определяют общий вид уравнений связей для зубчатых зацеплений как системы твердых тел и соответствуют случаю неподвижной относительно колес точки контакта. В этих выражениях необходимо учитывать только одно направление – по касательной к точке контакта (направление Z на рис. 3). Рассмотренное описание зубчатого зацепления справедливо как для цилиндрических, так и конических колес и не зависит от ориентации осей вращения колес. В целом, такой способ получения уравнений связей обладает достаточной общностью и применим к различным видам высших кинематических пар.

Предложенная форма записи уравнений движения механической системы дает возможность формализовать составление уравнений динамики систем твердых и упругих тел. Используемый вид уравнений связей обеспечивает введение в расчетную схему высших и низших кинематических пар различных классов и не накладывает ограничений на структуру расчетной схемы системы. Все это делает их привлекательными для применения в компьютерных методах анализа динамики механизмов и машин.

## Литература

1. Грошева М.В., Ефимов Г.Б. О системах аналитических вычислений на ЭВМ // Алгоритмы и алгоритмические языки. Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. – М.: Наука, 1988. С. 5–30.
2. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. Универсальный механизм – пакет программ для моделирования динамики систем многих твердых тел. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 77. – М.: 1993.
3. Заремба А.Т. Уравнения динамики многозвеного манипулятора с голономными связями // Изв. АН СССР. МТТ. 1989.
4. Иванов В.Н., Пигилев О.А., Суслонов В.М. Пакет прикладных программ для автоматизированного моделирования движения сложных механических систем. – Пермь: Пермский университет, 1986. – 27 с. – Деп. ВИНТИ, 03.04.1986, №2331-86.
5. Коноплев В.А. Конструирование агрегативных моделей механики носителя систем твердых тел. Прикладная математика и механика, 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 24–31.
6. Перминов М.Д., Петров В.Д. Исследование вынужденных колебаний сложных систем методом расчленений // В сб. Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем. – М.: Наука, 1975. С. 9–12.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Т.1. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.
8. Добронравов. В.В. Основы аналитической механики. – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.
9. Курдюк С.А., Шмелев Е.Н. Особенности формирования математических моделей технических объектов средствами программного комплекса PRADIS // Информационные технологии. 1996. № 3. С. 14–19.
10. Шульгин А.М., Кожевников А.Н. Универсальные уравнения движения системы твердых тел в избыточных координатах // Тез. докл. 5-й Всесоюзной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». – Казань, 1987. С. 107–108.
11. Bayo E., Serna M.A. Penalty Formulations for the Dynamic Analysis of Elastic Mechanisms // Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. SEPTEMBER 1989. Vol. 111/321. P. 321-324.
12. Shabana A.A. Dynamics of Multibody Systems, Wiley. – N. Y., 1989.
13. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
14. BauChau O.A., G. Damilano, Theron N.J. Numerical Integration of Non-Linear Elastic Multi-Body Systems // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. V. 38. P. 2727-2751.
15. Shabana A.A., Hwang Y.L., Wehage R.A. Projection Methods in Flexible Multibody Dynamics // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992. V. 35. P. 1927–1966.
16. Фролов К.В. Теория механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.