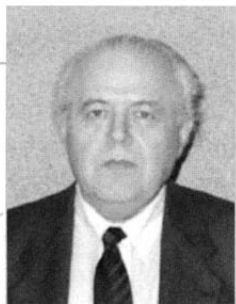


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В АГРЕССИВНОЙ СРЕДЕ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Часть 1

А.М. Локощенко, Д.О. Платонов



ЛОКОЩЕНКО
Александр Михайлович

Доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии естественных наук. Заместитель директора НИИ механики. Основная область научных интересов – математическая теория ползучести металлов в различных условиях и ее экспериментальное обоснование. Автор 140 научных трудов.

Введение

Предел длительной прочности металлов характеризует напряжение, которое металл выдерживает в условиях высокотемпературной ползучести вплоть до разрушения в течение

времени t^* . Длительная прочность металлов исследуется, как правило, в условиях простого растяжения, так как проведение высокотемпературных испытаний при сложном напряженном состоянии связано со значительными техническими трудностями. Основная задача данного исследования заключается в определении критерия длительной прочности металлов, нахо-



ПЛАТОНОВ
Денис Олегович

Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры Общей и прикладной математики ГОУ МГИУ. Инженер института механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор 16 научных трудов.

дящихся при высокой температуре в условиях сложного напряженного состояния. Критерий длительной прочности характеризует зависимость времени разрушения t^* от компонент тензора напряжений. Знание критерия длительной прочности позволяет установить эквивалентные напряжения σ_e (являющиеся функциями компонент тензора напряжений), приводящие к разрушению материала за одно и то же время t^* , и определить значение t^* с помощью испытания при простом растяжении.

1. Критерий длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии*

Исследование длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния обычно проводится на тонкостенных трубчатых образцах, нагруженных осевой силой P , крутящим моментом M и внутренним давлением q в различных комбинациях. В настоящее время известно относительно неболь-

шое количество надежных опытных данных. В табл. 1 приведены характеристики испытаний металлических образцов [1–20] с указанием марки металла или сплава, температуры испытаний T и количества образцов, испытанных при разных видах нагружения.

Здесь N – общее количество образцов в каждой серии испытаний, а в последующих столбцах таблицы приведены количества испытаний при соответствующих видах нагружения. Под номерами 1–16 в таблице указаны характеристики испытаний трубчатых образцов при комбинированном нагружении растяжения и кручения ($P + M$) (рис. 1, а), под номерами 17–28 – характеристики испытаний при комбинированном нагружении растяжения и внутреннего давления ($P + q$) (рис. 1, б). От всех остальных серий испытаний отличаются экспериментальные данные под номером 25, которые соответствуют испытаниям прямоугольных пластин при одноосном и двухосном растяжении [19].

Таблица 1

Характеристики испытаний металлов на длительную прочность при сложном напряженном состоянии

	Авторы	Материал	$T^{\circ}\text{C}$	N	P	M	$(P+M)$	q	$(P+q)$
1	Johnson A.E. и др. [1]	Медь	250	9	2	1	6	–	–
2	Сдобырев В.П. [2]	Никелевый сплав ЭИ437Б	700	23	9	6	8	–	–
3	Зверьков Б.В. [3]	Сталь ЭИ694	700	19	14	5	0	–	–
4	Сдобырев В.П. [4]	Никелевый сплав ЭИ437Б	700	17	5	8	4	–	–
5	Johnson A.E. и др. [5]	Алюминивый сплав RR59	200	6	0	2	4	–	–
6	Трунин И.И. [6]	Сталь 15X1M1Ф	570	15	6	4	5	–	–
7	Трунин И.И. [6]	Сталь 1X18H12T	610	21	5	6	10	–	–
8	Сдобырев В.П. [7]	Сплав ЭИ787	700	17	6	2	9	–	–
9	Соснин О.В. и др. [8]	Дуралюминовый сплав Д16Т	250	12	6	6	0	–	–
10	Локощенко А.М. и др. [9]	Нержавеющая сталь X18H10T	850	53	29	0	24	–	–
11	Павлов П.А. и др. [10]	Сталь ЭП182	525	41	17	0	24	–	–
12	Голубовский Е.Р. [11]	Сплав ЭИ698ВД	650	36	13	0	23	–	–
13	Голубовский Е.Р. [11]	Сплав ЭИ698ВД	700	17	8	0	9	–	–
14	Голубовский Е.Р. [11]	Сплав ЭИ698ВД	750	30	11	0	19	–	–
15	Голубовский Е.Р. и др. [12]	Сплав ЖС(Ni)	900	15	4	5	6	–	–
16	Голубовский Е.Р. и др. [12]	Сплав ЖС(Ni)	1000	19	11	4	4	–	–
17	Kooistra L.F. и др. [13]	Сталь SA210	510	7	0	–	–	7	0
18	Кац Ш.Н. [14]	Сталь 20	500	19	7	–	–	12	0
19	Кац Ш.Н. [15]	Сталь 1X18H9T(A)	650	15	6	–	–	9	0
20	Кац Ш.Н. [15]	Сталь 1X18H9T(Б)	650	16	10	–	–	6	0
21	Зверьков Б.В. [3]	Сталь ЭИ694	700	30	14	–	–	16	0
22	Лагунцов И.Н. и др. [16]	Сталь 12ХМФ	590	10	5	–	–	5	0
23	Кац Ш.Н. [17]	Сталь 12МХФ	595	16	0	–	–	0	16
24	Лебедев А.А. [18]	Сталь IX18H9T	520	21	5	–	–	3	13
25	Hayhurst D.R. [19]	Сплав Al–Mg–Si	210	24	13	–	–	2	9
26	Локощенко А.М. и др. [9]	Нержавеющая сталь X18H10T	850	45	29	–	–	4	12
27	Brown L.J. и др. [20]	Сталь 12CMVW	575	10	5	–	–	3	2
28	Brown L.J. и др. [20]	Сталь 1СМ	575	12	6	–	–	4	2

* Исследование, изложенное в данном разделе, проведено с участием аспиранта МГИУ В.В. Назарова.

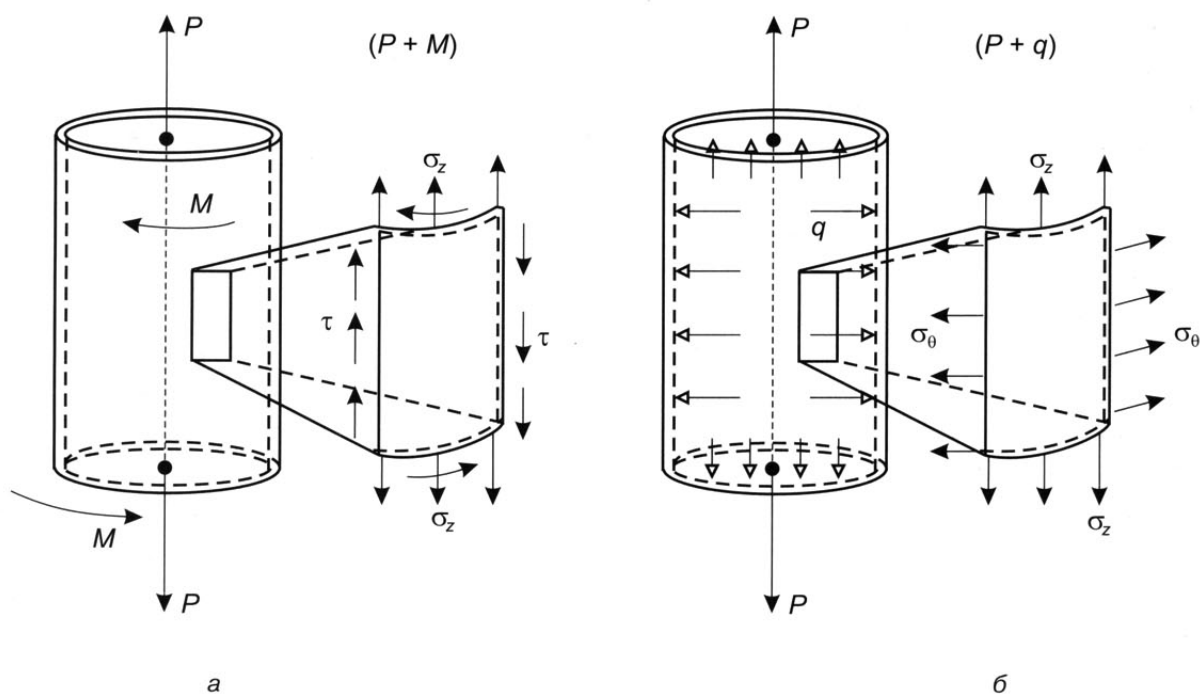


Рис. 1. Виды комбинированного нагружения трубчатых образцов:
а – нагружение растягивающей силой и крутящим моментом ($P + M$);
б – нагружение растягивающей силой и внутренним давлением ($P + q$)

В данной работе рассматриваются пять вариантов критерия длительной прочности (зависимостей времени разрушения t^* от эквивалентного напряжения σ_e) – степенная зависимость и четыре варианта дробной зависимости:

$$t^*(\sigma_e) = C \sigma_e^{-n}; \quad (1)$$

$$t^*(\sigma_e) = K \frac{\sigma_B - \sigma_e}{\sigma_e}; \quad (2)$$

$$t^*(\sigma_e) = A \frac{\sigma_B - \sigma_e}{\sigma_e - \sigma_0}; \quad (3)$$

$$t^*(\sigma_e) = D \left[\frac{\sigma_B - \sigma_e}{\sigma_e} \right]^n; \quad (4)$$

$$t^*(\sigma_e) = D \left[\frac{\sigma_B - \sigma_e}{\sigma_e - \sigma_0} \right]^n, \quad (5)$$

где C, n, K, A, D – константы; σ_B – предел кратковременной прочности (напряжение, характеризующее мгновенное разрушение); σ_0 – предел ползучести (максимальное напряжение, при котором отсутствует ползучесть металла).

Основной целью исследования является выявление эффективности различных вариантов дробной модели (2)–(5) длительной прочности по сравнению со степенной моделью (1), а также установление предпочтительного вида эквивалентного напряжения σ_e при анализе рас-

считываемых в табл. 1 серий испытаний металлов на длительную прочность при сложном напряженном состоянии [21–24].

В качестве эквивалентных напряжений σ_e в данной работе рассматриваются четыре комбинации главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$): максимальное главное напряжение σ_{e1} , интенсивность напряжений $\sigma_{e2} = \sigma_i$, их полусумма σ_{e3} (соотношение В.П. Сдобырева) и разность максимального и минимального главных напряжений σ_{e4} . Рассмотрим значения эквивалентных напряжений отдельно для тонкостенных и толстостенных трубчатых образцов.

При обработке результатов испытаний тонкостенных образцов предполагается, что радиальное напряжение равно нулю, в этом случае эквивалентные напряжения принимают следующий вид:

при нагружении ($P + M$)

$$\sigma_{e1} = \sigma_1, \sigma_{e2} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2}, \\ \sigma_{e3} = 0,5 (\sigma_{e1} + \sigma_{e2}), \sigma_{e4} = \sigma_1 - \sigma_3;$$

при нагружении ($P + q$)

$$\sigma_{e1} = \sigma_1, \sigma_{e2} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}, \\ \sigma_{e3} = 0,5 (\sigma_{e1} + \sigma_{e2}), \sigma_{e4} = \sigma_1. \quad (6)$$

В ряде случаев (работы [3, 14–17]) указанные в табл. 1 испытания на длительную прочность проводились на трубчатых образцах с достаточно большим отношением внешнего диаметра D к внутреннему диаметру d ($1 < \beta = D/d \leq 1,3$). Основную часть времени до разрушения под действием внутреннего давления q или крутящего момента M такие образцы находятся в состоянии установившейся ползучести.

В случае обработки результатов испытаний толстостенных труб под внутренним давлением q характеристики неоднородного напряженного состояния, определяемые при решении задачи об установившейся ползучести трубы, заменяются средними по поперечному сечению значениями окружного $\bar{\sigma}_\theta$, осевого $\bar{\sigma}_z$ и радиального $\bar{\sigma}_r$ напряжений [21]. В случае степенного закона установившейся ползучести с показателем степени эти средние значения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_\theta &= \frac{q}{(n-1)} \left[\frac{n-2}{\beta^2-1} + \frac{1}{\beta^{2/n}-1} \right], \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{q}{(\beta^2-1)}, \quad \bar{\sigma}_r = 2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\theta,\end{aligned}\quad (7)$$

где n принимает значения от 1 до $+\infty$.

Из выражения (7) следует, что напряжение $\bar{\sigma}_z$ не зависит от n , а зависимость $\bar{\sigma}_\theta$ от n очень слабая. Ниже при вычислении средних напряжений (7) принимается значение $n = 3$, при этом средние эквивалентные напряжения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{e1} &= \bar{\sigma}_\theta, \quad \sigma_{e2} = \sqrt{3}(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z), \\ \sigma_{e3} &= \frac{1}{2}(\sigma_{e1} + \sigma_{e2}), \quad \sigma_{e4} = 2(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z).\end{aligned}\quad (8)$$

В случае толстостенных труб, нагруженных внутренним давлением q и растягивающей силой P , средние значения главных напряжений и эквивалентные напряжения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_z &= \frac{q}{(\beta^2-1)} + \frac{4P}{\pi d^2(\beta^2-1)}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{\beta^2-1} + \frac{1}{\beta^{2/3}-1} \right], \\ \bar{\sigma}_r &= \frac{q}{2} \left[\frac{3}{\beta^2-1} - \frac{1}{\beta^{2/3}-1} \right], \quad \sigma_{e1} = \max(\bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_\theta), \\ \sigma_{e2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\theta)^2 + (\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r)^2 + (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r)^2},\end{aligned}$$

$$\sigma_{e3} = \frac{1}{2}(\sigma_{e1} + \sigma_{e2}), \quad \sigma_{e4} = \sigma_{e1} - \bar{\sigma}_r. \quad (9)$$

При кручении толстостенных образцов среднее касательное напряжение и эквивалентные напряжения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= 12 \cdot \frac{M}{\pi d^3(\beta^3-1)}, \quad \sigma_{e1} = \sigma_{e4} = \bar{\tau}, \\ \sigma_{e2} &= \bar{\tau}\sqrt{3}, \quad \sigma_{e3} = 0,5(1+\sqrt{3})\bar{\tau}.\end{aligned}\quad (10)$$

В отличие от работы [21] для оценки суммарного расхождения экспериментальных значений времени разрушения t^* и теоретических значений $t^*(\sigma_{em})$, соответствующих степенной зависимости (1) и эквивалентному напряжению σ_{em} , введем величину

$$S_{im} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{t^* - t^*(\sigma_{em})}{t^* + t^*(\sigma_{em})} \right]_k^2, \quad (11)$$

где N – количество испытаний в каждой серии, а $m = 1, 2, 3, 4$ характеризует один из четырех видов эквивалентного напряжения. Аналогичные суммарные расхождения, полученные при использовании дробных моделей (2)–(5) с различным количеством констант, назовем соответственно $S_{2m}, S_{3m}, S_{4m}, S_{5m}$.

В табл. 2 приведены значения S_{im} , где $m = 1, 2, 3, 4$ соответствует всем рассматриваемым видам эквивалентного напряжения, а $i = 1, 2, 3, 4, 5$ характеризует суммарный разброс S_{im} при использовании степенной модели и четырех вариантов дробной модели длительной прочности.

Для каждого вида зависимости $t^*(\sigma_e)$ (1)–(5) введем в рассмотрение минимальную величину суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений t^* :

$$S_i = \min_m S_{im} (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (12)$$

где S_i характеризует тот вид эквивалентного напряжения, который приводит к наилучшему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен разрушения при одной и той же зависимости $t^*(\sigma_e)$.

Для сравнения эффективности применения различных вариантов дробной модели длительной прочности (2)–(5) по отношению к степенной модели (1) введем коэффициенты a_i :

$$a_i = S_i/S_1, \quad i = 2, 3, 4, 5,$$

где S_1 – характеристика минимального суммарного разброса для степенной модели длительной прочности.

В табл. 3 приведены результаты анализа всех рассмотренных экспериментальных данных с помощью предложенного метода, указаны значения S_1 , a_2 , a_3 , a_4 и a_5 . Из таблицы следует, что средние значения a_2 и a_3 больше 1, а a_4 и a_5 – меньше 1. Таким образом, варианты (2) и (3) дробной модели длительной прочности хуже описывают опытные данные, чем степенная зависимость (1), а варианты (4) и (5) – лучше.

Сравнение результатов описания опытных данных с помощью (4) и (5) показывает, что введение в (5) дополнительной материальной константы (предела ползучести σ_0) не вызывает существенного уменьшения параметра разброса S_5 по сравнению с S_4 .

Из табл. 3 следует, что в качестве зависимости времени разрушения металлов t^* от эквивалентного напряжения σ_e следует принимать степенную модель (1) длительной прочности или дробную модель (4) с тремя константами, одна из которых – σ_a является механической характеристикой материала – пределом кратковременной прочности при температуре испытаний.

На рис. 2 приведено изменение a_4 для всех 28 серий испытаний, изложенных в работах [1–28]. Для тех испытаний, в которых значения a_4 имеют порядок 1, можно с одинаковым основанием применять модели (1) и (4). В испытаниях, которым соответствуют значения a_4 существенно меньшие 1 (работы [1, 5, 17, 19, 27]), предпочтительно применение дробной модели (4).

Для определения существенности различий значений суммарных расхождений S_{im} ($i = 1, 4$; $m = 1 - 4$) при различных значениях m воспользуемся известным статистическим распределением Фишера. С этой целью при выбранном значении i введем в рассмотрение отношения $F_m = S_{im}/S_i$ ($i = 1, 4$; $m = 1, 2, 3, 4$), где величины S_1 и S_4 характеризуют тот вид эквивалентного напряжения, который приво-

дит к наилучшему соответствию экспериментальных и теоретических значений времени разрушения. Значения F_m следует сравнивать с критическим значением распределения Фишера $F_*(N, \alpha)$, зависящим от количества испытаний N и выбранного уровня значимости α . Если какое либо значение F_m меньше F_* , то согласно критерию Фишера оно несущественно отличается от минимального значения F_m , равного единице. В этом случае несколько типов эквивалентного напряжения σ_{em} могут быть приняты за критерий длительной прочности конкретного материала при выбранном виде (1), (4) зависимости $t^*(\sigma_{em})$. Если же среди отношений F_m имеются три величины, большие F_* , то за критерий длительной прочности можно принять только то эквивалентное напряжение σ_{em} , которому соответствует значение $F_m = 1$.

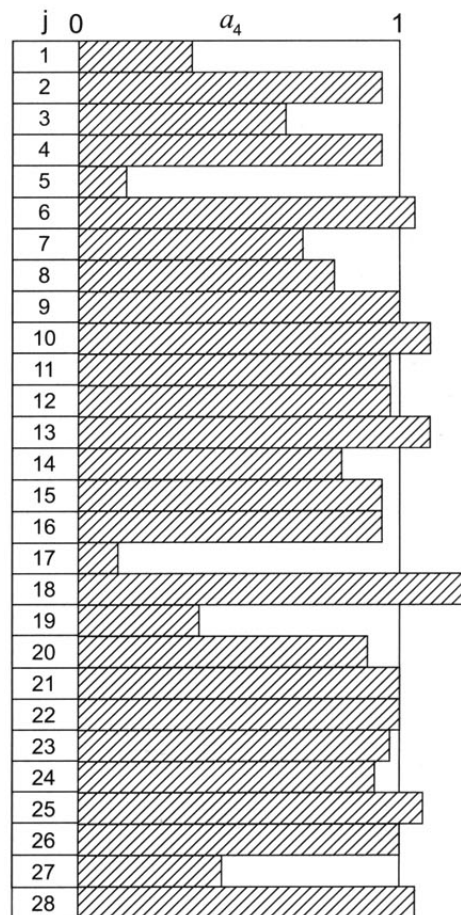


Рис. 2. Оценка эффективности дробного и степенного критериев длительной прочности

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН И СИСТЕМ

Таблица 2

Значения S_{mj} ($j = 1 - 5$, $m = 1 - 4$) для различных серий испытаний, вычисляемые по формуле (11)

	N	(1)				(2)				(3)				(4)				(5)			
		σ_{e1}	σ_{e2}	σ_{e3}	σ_{e4}	σ_{e1}	σ_{e2}	σ_{e3}	σ_{e4}	σ_{e1}	σ_{e2}	σ_{e3}	σ_{e4}	σ_{e1}	σ_{e2}	σ_{e3}	σ_{e4}	σ_{e1}	σ_{e2}	σ_{e3}	σ_{e4}
1	9	0,010	0,115	0,049	0,138	0,006	0,112	0,055	0,138	0,003	0,112	0,049	0,138	0,003	0,112	0,048	0,138	0,003			
2	23	0,218	0,275	0,253	0,285	0,253	0,240	0,215	0,247	0,195	0,221	0,192	0,243	0,223	0,237	0,2092	0,247			0,190	
3	19	0,104	0,022	0,019	0,057	0,083	0,062	0,042	0,076	0,083	0,028	0,016	0,054	0,083	0,022	0,012	0,056			0,012	
4	17	0,197	0,167	0,104	0,190	0,193	0,168	0,101	0,188	0,193	0,167	0,097	0,188	0,191	0,168	0,099	0,175			0,091	
5	6	0,114	0,021	0,074	0,020	0,117	0,005	0,084	0,011	0,110	0,004	0,065	0,010	0,114	0,003	0,074	0,010		0,004		
6	15	0,107	0,083	0,027	0,134	0,093	0,094	0,059	0,146	0,093	0,082	0,026	0,1227	0,093	0,083	0,028	0,135			0,025	
7	21	0,147	0,085	0,033	0,130	0,138	0,122	0,107	0,162	0,1193	0,084	0,031	0,129	0,112	0,080	0,023	0,131			0,020	
8	17	0,057	0,180	0,051	0,181	0,044	0,180	0,043	0,196	0,0442	0,180	0,042	0,196	0,044	0,180	0,041	0,196			0,041	
9	12	0,071	0,024	0,055	0,002	0,071	0,027	0,054	0,007	0,0712	0,024	0,054	0,002	0,071	0,024	0,050	0,002			0,002	
10	53	0,031	0,037	0,034	0,042	0,041	0,045	0,042	0,050	0,032	0,038	0,034	0,042	0,034	0,038	0,034	0,043	0,031			
11	41	0,068	0,209	0,096	0,306	0,291	0,190	0,278	0,320	0,165	0,172	0,205	0,306	0,066	0,156	0,079	0,281	0,066			
12	36	0,205	0,157	0,087	0,253	0,187	0,219	0,143	0,253	0,185	0,155	0,087	0,250	0,186	0,160	0,085	0,252			0,084	
13	17	0,177	0,036	0,064	0,052	0,186	0,132	0,059	0,146	0,177	0,044	0,052	0,061	0,174	0,040	0,052	0,057		0,034		
14	30	0,187	0,068	0,089	0,136	0,160	0,113	0,132	0,138	0,154	0,054	0,085	0,127	0,154	0,056	0,081	0,133		0,052		
15	15	0,226	0,112	0,130	0,162	0,209	0,144	0,176	0,126	0,208	0,093	0,134	0,123	0,206	0,105	0,130	0,124		0,089		
16	19	0,104	0,054	0,057	0,086	0,123	0,082	0,103	0,100	0,178	0,049	0,063	0,074	0,104	0,050	0,059	0,077		0,049		
17	7	0,009	0,009	0,009	0,008	0,183	0,183	0,183	0,183	0,048	0,047	0,048	0,047	0,001	0,001	0,001	0,001			0,001	
18	19	0,027	0,048	0,034	0,008	0,082	0,104	0,077	0,094	0,031	0,051	0,035	0,017	0,027	0,048	0,034	0,010			0,008	
19	15	0,095	0,127	0,111	0,073	0,076	0,141	0,126	0,041	0,070	0,124	0,111	0,023	0,094	0,128	0,111	0,027			0,023	
20	16	0,040	0,062	0,051	0,022	0,046	0,060	0,053	0,034	0,038	0,056	0,047	0,021	0,037	0,057	0,047	0,020			0,020	
21	30	0,059	0,059	0,058	0,035	0,059	0,061	0,060	0,044	0,057	0,059	0,058	0,036	0,056	0,058	0,057	0,035			0,035	
22	10	0,063	0,074	0,068	0,046	0,074	0,080	0,077	0,070	0,062	0,071	0,067	0,048	0,062	0,072	0,067	0,046			0,046	
23	16	0,064	0,029	0,037	0,037	0,065	0,030	0,039	0,043	0,063	0,028	0,037	0,034	0,064	0,028	0,037	0,038		0,028		
24	21	0,066	0,055	0,024	0,066	0,075	0,080	0,039	0,075	0,065	0,058	0,024	0,065	0,063	0,055	0,022	0,063			0,022	
25	24	0,046	0,066	0,053	0,046	0,171	0,170	0,171	0,171	0,057	0,103	0,078	0,057	0,050	0,066	0,056	0,050			0,044	
26	45	0,038	0,050	0,043	0,038	0,063	0,071	0,066	0,063	0,042	0,055	0,047	0,042	0,038	0,050	0,043	0,038			0,038	
27	10	0,051	0,064	0,037	0,024	0,274	0,280	0,276	0,314	0,097	0,131	0,096	0,118	0,026	0,022	0,012	0,025			0,012	
28	12	0,006	0,002	0,004	0,010	0,026	0,025	0,025	0,033	0,006	0,001	0,002	0,012	0,006	0,002	0,004	0,010		0,001		

Таблица 3

Значения суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений t'

	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)	
	$\sigma_{вм}$	S_1	$\sigma_{вм}$	a_2	$\sigma_{вм}$	a_3	$\sigma_{вм}$	a_4	$\sigma_{вм}$	a_5
1	$\sigma_{в1}$	0,0098	$\sigma_{в1}$	0,57	$\sigma_{в1}$	0,35	$\sigma_{в1}$	0,36	$\sigma_{в1}$	0,35
2	$\sigma_{в1}$	0,218	$\sigma_{в3}$	0,99	$\sigma_{в3}$	0,88	$\sigma_{в3}$	0,96	$\sigma_{в3}$	0,87
3	$\sigma_{в3}$	0,018	$\sigma_{в3}$	2,33	$\sigma_{в3}$	0,89	$\sigma_{в3}$	0,67	$\sigma_{в3}$	0,67
4	$\sigma_{в3}$	0,104	$\sigma_{в3}$	0,97	$\sigma_{в3}$	0,93	$\sigma_{в3}$	0,95	$\sigma_{в3}$	0,88
5	$\sigma_{в4}$	0,020	$\sigma_{в2}$	0,24	$\sigma_{в2}$	0,22	$\sigma_{в2}$	0,16	$\sigma_{в2}$	0,20
6	$\sigma_{в3}$	0,027	$\sigma_{в3}$	2,19	$\sigma_{в3}$	0,96	$\sigma_{в3}$	1,03	$\sigma_{в3}$	0,93
7	$\sigma_{в3}$	0,033	$\sigma_{в3}$	3,24	$\sigma_{в3}$	0,94	$\sigma_{в3}$	0,70	$\sigma_{в3}$	0,61
8	$\sigma_{в3}$	0,051	$\sigma_{в3}$	0,84	$\sigma_{в3}$	0,82	$\sigma_{в3}$	0,81	$\sigma_{в3}$	0,80
9	$\sigma_{в4}$	0,0017	$\sigma_{в4}$	4,06	$\sigma_{в4}$	0,94	$\sigma_{в4}$	1,00	$\sigma_{в4}$	0,94
10	$\sigma_{в1}$	0,031	$\sigma_{в1}$	1,32	$\sigma_{в1}$	1,03	$\sigma_{в1}$	1,10	$\sigma_{в1}$	1,00
11	$\sigma_{в1}$	0,068	$\sigma_{в1}$	2,79	$\sigma_{в1}$	2,43	$\sigma_{в1}$	0,98	$\sigma_{в1}$	0,97
12	$\sigma_{в3}$	0,087	$\sigma_{в3}$	1,64	$\sigma_{в3}$	1,00	$\sigma_{в3}$	0,98	$\sigma_{в2}$	0,96
13	$\sigma_{в2}$	0,036	$\sigma_{в3}$	1,64	$\sigma_{в2}$	1,21	$\sigma_{в2}$	1,11	$\sigma_{в2}$	0,93
14	$\sigma_{в2}$	0,068	$\sigma_{в2}$	1,66	$\sigma_{в2}$	0,79	$\sigma_{в2}$	0,82	$\sigma_{в2}$	0,76
15	$\sigma_{в2}$	0,112	$\sigma_{в2}$	0,94	$\sigma_{в2}$	0,83	$\sigma_{в2}$	0,94	$\sigma_{в2}$	0,79
16	$\sigma_{в2}$	0,054	$\sigma_{в2}$	1,52	$\sigma_{в2}$	0,91	$\sigma_{в2}$	0,93	$\sigma_{в2}$	0,91
17	$\sigma_{в4}$	0,0084	$\sigma_{в4}$	21,79	$\sigma_{в4}$	5,60	$\sigma_{в3}$	0,12	$\sigma_{в4}$	0,12
18	$\sigma_{в4}$	0,0081	$\sigma_{в3}$	9,51	$\sigma_{в4}$	2,10	$\sigma_{в4}$	1,23	$\sigma_{в4}$	0,98
19	$\sigma_{в4}$	0,073	$\sigma_{в4}$	0,56	$\sigma_{в4}$	0,32	$\sigma_{в4}$	0,37	$\sigma_{в4}$	0,32
20	$\sigma_{в4}$	0,022	$\sigma_{в4}$	1,55	$\sigma_{в4}$	0,95	$\sigma_{в4}$	0,91	$\sigma_{в4}$	0,91
21	$\sigma_{в4}$	0,035	$\sigma_{в4}$	1,26	$\sigma_{в4}$	1,03	$\sigma_{в4}$	1,00	$\sigma_{в4}$	1,00
22	$\sigma_{в4}$	0,046	$\sigma_{в4}$	1,52	$\sigma_{в4}$	1,04	$\sigma_{в4}$	1,00	$\sigma_{в4}$	1,00
23	$\sigma_{в2}$	0,029	$\sigma_{в2}$	1,03	$\sigma_{в2}$	0,97	$\sigma_{в2}$	0,97	$\sigma_{в2}$	0,97
24	$\sigma_{в3}$	0,024	$\sigma_{в3}$	1,62	$\sigma_{в3}$	1,00	$\sigma_{в3}$	0,92	$\sigma_{в3}$	0,92
25	$\sigma_{в4}$	0,046	$\sigma_{в2}$	3,69	$\sigma_{в4}$	1,24	$\sigma_{в4}$	1,09	$\sigma_{в4}$	0,96
26	$\sigma_{в4}$	0,038	$\sigma_{в4}$	1,66	$\sigma_{в4}$	1,11	$\sigma_{в4}$	1,00	$\sigma_{в4}$	1,00
27	$\sigma_{в4}$	0,026	$\sigma_{в1}$	10,54	$\sigma_{в3}$	3,73	$\sigma_{в3}$	0,46	$\sigma_{в3}$	0,46
28	$\sigma_{в2}$	0,0023	$\sigma_{в3}$	10,87	$\sigma_{в2}$	0,39	$\sigma_{в2}$	1,05	$\sigma_{в2}$	0,35
			$(a_2)_{cp} = 3,30$		$(a_3)_{cp} = 1,24$		$(a_4)_{cp} = 0,84$		$(a_5)_{cp} = 0,77$	

В качестве уровня значимости было использовано значение $\alpha = 0,05$. В табл. 4 (степенная модель (1) и табл. 5 (дробная модель (4) для каждой серии испытаний указаны критические значения F_{α} , соответствующие выбранному значению α и количеству испытаний N . Там же пунктиром подчеркнуты величины F_m , которые превышают минимальное значение $F_m = 1$ несущественно (с точки зрения критерия Фишера). Все типы эквивалентных напряжений σ_{em} , которым соответствуют несущественно различающиеся значения F_m (т.е. величины $F_m = 1$ и F_m , подчеркнутые пунктиром), можно принять за критерий длительной прочности.

Анализ данных табл. 4, 5 показывает, что из четырех рассмотренных типов σ_{em} для описания испытаний при нагружении $(P + M)$ в качестве эквивалентного напряжения предпочтительно использовать соотношение Сдобырева σ_{e3} , а для описания испытаний при нагружении

$(P + q)$ – разность максимального и минимального главных напряжений σ_{e4} . Аналогичные результаты получены при описании экспериментальных данных с помощью всех рассмотренных видов зависимости $t'(\sigma_e)$. Таким образом, при расчете длительного разрушения элементов конструкций, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, в качестве критерия длительной прочности рекомендуется принимать зависимость $t'(\sigma_e)$ в виде соотношения (1) или (4), в котором эквивалентные напряжения $\sigma_e = \sigma_{e3}$ при $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_e = \sigma_{e4}$ при $\sigma_2 > 0$.

2. Влияние анизотропии материала на длительную прочность

Из изложенного выше следует, что характеристики длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии, как правило, определяются при испытаниях тонкостен-

Таблица 4

Результаты анализа испытаний с помощью статистического распределения Фишера при учете степенной модели (1)

	N	F_{α}	F_1	F_2	F_3	F_4
1	9	3,44	<u>1,00</u>	11,42	4,92	14,06
2	23	2,05	<u>1,00</u>	<u>1,26</u>	<u>1,16</u>	<u>1,30</u>
3	19	2,19	5,72	<u>1,19</u>	<u>1,00</u>	3,08
4	17	2,33	<u>1,89</u>	<u>1,61</u>	<u>1,00</u>	<u>1,82</u>
5	6	5,05	5,79	<u>1,11</u>	<u>3,74</u>	<u>1,00</u>
6	15	2,48	3,92	<u>3,03</u>	<u>1,00</u>	4,89
7	21	2,12	4,47	2,59	<u>1,00</u>	3,95
8	17	2,33	<u>1,12</u>	3,56	<u>1,00</u>	3,59
9	12	2,82	41,17	13,81	32,01	<u>1,00</u>
10	53	1,60	<u>1,00</u>	<u>1,20</u>	<u>1,08</u>	<u>1,36</u>
11	41	1,69	<u>1,00</u>	3,08	<u>1,41</u>	4,50
12	36	1,76	2,35	1,80	<u>1,00</u>	2,90
13	17	2,33	4,86	<u>1,00</u>	<u>1,75</u>	<u>1,42</u>
14	30	1,86	2,76	<u>1,00</u>	<u>1,31</u>	2,01
15	15	1,95	2,02	<u>1,00</u>	<u>1,17</u>	<u>1,45</u>
16	19	2,19	<u>1,92</u>	<u>1,00</u>	<u>1,05</u>	<u>1,58</u>
17	7	4,28	<u>1,04</u>	<u>1,00</u>	<u>1,02</u>	<u>1,00</u>
18	19	2,22	3,28	5,89	4,22	<u>1,00</u>
19	15	2,48	<u>1,30</u>	<u>1,74</u>	<u>1,52</u>	<u>1,00</u>
20	16	2,41	<u>1,81</u>	2,81	2,30	<u>1,00</u>
21	30	1,86	<u>1,68</u>	<u>1,67</u>	<u>1,65</u>	<u>1,00</u>
22	10	3,18	<u>1,37</u>	<u>1,62</u>	<u>1,49</u>	<u>1,00</u>
23	16	2,41	<u>2,23</u>	<u>1,00</u>	<u>1,30</u>	<u>1,31</u>
24	21	2,12	2,74	2,29	<u>1,00</u>	2,74
25	24	2,01	<u>1,00</u>	<u>1,44</u>	<u>1,14</u>	<u>1,00</u>
26	45	1,65	<u>1,00</u>	<u>1,32</u>	<u>1,13</u>	<u>1,00</u>
27	10	3,18	1,99	2,47	1,41	<u>1,00</u>
28	12	2,82	2,74	<u>1,00</u>	<u>1,63</u>	4,48

Таблица 5

Результаты анализа испытаний с помощью статистического распределения Фишера при учете дробной модели (4)

j	N	F_{α}	F_1	F_2	F_3	F_4
1	9	3,44	<u>1,00</u>	32,00	13,76	39,32
2	23	2,05	<u>1,06</u>	<u>1,13</u>	<u>1,00</u>	<u>1,18</u>
3	19	2,19	6,97	<u>1,84</u>	<u>1,00</u>	4,71
4	17	2,33	<u>1,94</u>	<u>1,70</u>	<u>1,00</u>	<u>1,77</u>
5	6	5,05	35,13	<u>1,00</u>	22,85	3,19
6	15	2,48	3,29	2,96	<u>1,00</u>	4,78
7	21	2,12	4,91	3,50	<u>1,00</u>	5,74
8	17	2,33	<u>1,07</u>	4,37	<u>1,00</u>	4,77
9	12	2,82	41,14	13,84	28,87	<u>1,00</u>
10	53	1,60	<u>1,00</u>	<u>1,12</u>	<u>1,01</u>	<u>1,28</u>
11	41	1,69	<u>1,00</u>	2,34	<u>1,19</u>	4,24
12	36	1,76	2,19	1,89	<u>1,00</u>	2,97
13	17	2,33	4,31	<u>1,00</u>	<u>1,28</u>	<u>1,42</u>
14	30	1,86	2,76	<u>1,00</u>	<u>1,44</u>	2,39
15	15	1,95	1,96	<u>1,00</u>	<u>1,23</u>	<u>1,18</u>
16	19	2,19	<u>2,05</u>	<u>1,00</u>	<u>1,16</u>	<u>1,52</u>
17	7	4,28	<u>1,00</u>	<u>1,14</u>	<u>1,00</u>	<u>1,14</u>
18	19	2,22	2,78	5,00	3,56	<u>1,00</u>
19	15	2,48	3,52	4,77	4,16	<u>1,00</u>
20	16	2,41	1,84	2,84	2,34	<u>1,00</u>
21	30	1,86	<u>1,60</u>	<u>1,65</u>	<u>1,62</u>	<u>1,00</u>
22	10	3,18	<u>1,34</u>	<u>1,58</u>	<u>1,46</u>	<u>1,00</u>
23	16	2,41	<u>2,25</u>	<u>1,00</u>	<u>1,31</u>	<u>1,33</u>
24	21	2,12	2,90	2,50	<u>1,00</u>	2,90
25	24	2,01	<u>1,00</u>	<u>1,31</u>	<u>1,10</u>	<u>1,00</u>
26	45	1,65	<u>1,00</u>	<u>1,31</u>	<u>1,12</u>	<u>1,00</u>
27	10	3,18	2,07	1,76	<u>1,00</u>	2,04
28	12	2,82	2,58	<u>1,00</u>	<u>1,58</u>	4,01

ных трубчатых образцов. В состоянии поставки эти образцы обычно имеют упрочнение в продольном направлении. Для его количественной характеристики введем коэффициент прочностной анизотропии α_0 [25–27]:

$$\alpha_0 = \sigma_z(t^*) / \sigma_\theta(t^*).$$

При этом понимается, что осевое σ_z и окружное σ_θ нормальные напряжения приводят при растяжении в этих направлениях к разрушению образца за одно и то же время t^* .

Воспользуемся относительными главными напряжениями s_1, s_2, s_3 , которые вычислим из отношения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ к коэффициенту анизотропии, существующему в материале в направлении их действия. При одноосном растяжении имеем:

$$s_1 = \sigma_z / \alpha_0, s_2 = 0, s_3 = 0. \quad (13)$$

При комбинированном нагружении тонкостенных образцов растягивающей силой и внутренним давлением получаем:

$$s_1 = \max(\sigma_z / \alpha_0; \sigma_\theta); s_2 = \min(\sigma_z / \alpha_0; \sigma_\theta). \quad (14)$$

При таком нагружении в относительно толстостенных образцах используем средние по сечению образцов напряжения $\bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_\theta$ и $\bar{\sigma}_r$ (при этом $\bar{\sigma}_r \ll \bar{\sigma}_z$ и $\bar{\sigma}_r \ll \bar{\sigma}_\theta$). В этом случае получаем:

$$s_1 = \max(\bar{\sigma}_z / \alpha_0; \bar{\sigma}_\theta); s_2 = \min(\bar{\sigma}_z / \alpha_0; \bar{\sigma}_\theta); s_3 = \bar{\sigma}_r. \quad (15)$$

В случае плоского напряженного состояния, определяемого действием растягивающего напряжения σ_z и касательного напряжения τ , главные напряжения σ_1 и σ_3 ($\sigma_2 = 0$) в тонкостенных образцах равны:

$$\sigma_{1,3} = 0,5 (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}). \quad (16)$$

Направления главных напряжений $\sigma_{1,3}$ (углы $\varphi_{1,3}$ с продольной осью образца z) определяются из условий

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_{1,3} = \pm 2\tau / \sigma_z. \quad (17)$$

Для описания зависимости коэффициента анизотропии α от угла φ примем уравнение эллипса:

$$\alpha(\varphi) = \alpha_0 / \sqrt{(\alpha_0^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}. \quad (18)$$

Используя выражения (17) и (18), вычислим значения коэффициентов анизотропии $\alpha_{1,2} = (\varphi_{1,2})$ в направлении действия главных напряжений:

$$\alpha_{1,2} = \frac{\alpha_0 \sqrt{2}}{\sqrt{(\alpha_0^2 + 1)m(\alpha_0^2 - 1)\psi}}; \quad \psi = \frac{\sigma_z}{\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}}. \quad (19)$$

С помощью выражений (16) и (19) вычисляем относительные главные напряжения s_1 и s_2 , действующие в образце при нагружении $(P + M)$:

$$s_{1,3} = \frac{(\psi \pm 1)\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}}{2\sqrt{2}\alpha_0} \cdot \sqrt{(\alpha_0^2 + 1)m(\alpha_0^2 - 1)\psi}, \quad s_2 = 0. \quad (20)$$

Как эквивалентное относительное напряжение выбираем $s_e = \max(s_1, s_2)$. В качестве зависимости времени разрушения t^* от напряжения s_e рассмотрим критерий длительной прочности в виде степенной и дробной зависимостей:

$$t^* = C s_e^{-n}; \quad t^* = D \left(\frac{s_b - s_e}{s_e} \right)^n; \quad s_b = \sigma_b / \alpha_0, \quad (21)$$

где C, D, n – константы.

В отличие от работы [25] анализ всех известных опытных данных проводится на основе других мер суммарного разброса. Введем в качестве характеристик суммарного разброса экспериментальных и теоретических значений времени разрушения при некотором значении коэффициента анизотропии α_0 следующие величины:

$$S(\alpha_0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{t_{теор}^* - t_{эксп}^*}{t_{теор}^* + t_{эксп}^*} \right)_i^2, \quad U(\alpha_0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lg t_{теор}^* - \lg t_{эксп}^*}{\lg t_{теор}^* + \lg t_{эксп}^*} \right)_i^2, \quad (22)$$

где N – количество образцов в серии испытаний.

За величину коэффициента прочностной анизотропии α_0 примем то его значение, которое приводит к минимальной величине характеристик этого суммарного разброса S или U . Результаты вычислений, приведенные в табл. 6, показали, что значения коэффициента анизотропии, полученные при разных мерах суммарного разброса (22), в основном хорошо согласуются между собой, а используемые в исследованиях толстостенные образцы (с отношением внешнего диаметра к внутреннему около 1,3) с достаточной точностью можно считать изотропными.

Таблица 6

Характеристики анизотропии образцов
в различных сериях испытаний

	$t' = C s_e^{-n}$		$t' = D \left(\frac{s_b - s_e}{s_e} \right)^n$	
	S, U	α_0	S, U	α_0
1	S=0,00974	1,00	S=0,00350	1,00
	U=0,000212	1,01	U=0,0000763	1,00
2	S=0,21811	1,01	S=0,22255	1,00
	U=0,355031	1,38	U=0,2693553	1,57
3	S=0,00537	1,90	S=0,00592	1,84
	U=0,000128	1,92	U=0,0001163	1,86
4	S=0,12415	1,61	S=0,12272	1,61
	U=0,021124	1,65	U=0,019076	1,63
5	S=0,03568	8,30	S=0,03610	8,38
	U=0,000925	9,16	U=0,001201	9,02
6	S=0,05062	1,66	S=0,05184	1,66
	U=0,001300	1,63	U=0,0013258	1,63
7	S=0,04876	1,77	S=0,03481	1,79
	U=0,003641	1,70	U=0,0013294	1,73
8	S=0,05667	1,00	S=0,04417	1,00
	U=0,002135	1,00	U=0,0011692	1,00
9	S=0,00165	2,66	S=0,00165	2,66
	U=0,000074	2,67	U=0,000074	2,67
10	S=0,03119	1,00	S=0,03153	1,00
	U=0,004991	1,00	U=0,0051472	1,00
11	S=0,06424	1,11	S=0,06111	1,14
	U=0,029292	1,37	U=0,0258833	1,36
12	S=0,08861	1,66	S=0,08043	1,62
	U=0,008888	1,56	U=0,0071186	1,56
13	S=0,03265	4,20	S=0,03411	3,80
	U=0,001866	2,89	U=0,0018703	2,74
14	S=0,08297	1,82	S=0,06886	1,85
	U=0,005107	1,74	U=0,004265	1,80
15	S=0,16235	1,72	S=0,15919	1,78
	U=0,011261	1,53	U=0,0095248	1,75
16	S=0,04923	1,81	S=0,04906	1,81
	U=0,003904	1,84	U=0,0039618	1,91
17	S=0,00874	1,00	S=0,00103	1,00
	U=0,000388	1,00	U=0,0000437	1,00
18	S=0,01441	1,08	S=0,01634	1,08
	U=0,000326	1,08	U=0,000372	1,07
19	S=0,07339	1,07	S=0,02717	1,07
	U=0,0128	1,12	U=0,0007487	1,08
20	S=0,01227	1,16	S=0,01144	1,15
	U=0,000286	1,15	U=0,0002532	1,14
21	S=0,03474	1,18	S=0,03596	1,17
	U=0,0011256	1,18	U=0,0011349	1,17
22	S=0,03447	1,22	S=0,03500	1,21
	U=0,001133	1,19	U=0,0011482	1,19
23	S=0,03547	1,22	S=0,02906	1,22
	U=0,001014	1,23	U=0,000755	1,23
24	S=0,05881	1,04	S=0,05933	1,04
	U=0,003637	1,05	U=0,0036819	1,05
25	S=0,01365	1,11	S=0,01587	1,11
	U=0,00103	1,11	U=0,0010383	1,11
26	S=0,02372	1,25	S=0,02561	1,24
	U=0,003057	1,30	U=0,00324	1,30
27	S=0,02832	1,13	S=0,02254	1,08
	U=0,000682	1,14	U=0,0004985	1,08
28	S=0,00217	1,02	S=0,00595	1,02
	U=0,000078	1,04	U=0,0000752	1,03

Из табл. 6 следует, что значения α_0 для всех рассмотренных материалов превышают 1, что в свою очередь соответствует условиям производства труб, из которых изготавливаются образцы для испытаний. Во-вторых, эти значения почти всегда находятся в диапазоне $1 \leq \alpha_0 \leq 2$, что также соответствует реальным свойствам материала. В толстостенных образцах коэффициент прочностной анизотропии близок к 1, что подтверждает малое влияние упрочненного слоя в общем объеме.

При введении коэффициента α_0 предполагалось, что его величина не зависит от времени разрушения t' . Для оценки правомерности такого допущения было проведено дополнительное исследование, которое подтвердило его правомерность.

3. Корректировка результатов испытаний на длительную прочность при сложном напряженном состоянии

Анализ результатов испытаний показал, что в ряде серий испытаний некоторые экспериментальные данные отличаются от основной массы данных, что может объясняться разными причинами: отклонениями химического состава или структуры металла в некоторых образцах, непостоянным температурным режимом при проведении испытаний или др.

В связи с этим был рассмотрен вопрос о влиянии этих отклоняющихся опытных данных на критерий длительной прочности [24]. Для корректировки результатов испытаний был использован интервальный метод оценки параметров распределения, в соответствии с которым были построены гистограммы экспериментальных данных. Затем крайние значения, носящие случайный характер (8,6% данных), отбрасывались, и скорректированные результаты испытаний анализировались при помощи степенной (1) и дробной (4) моделей. Это привело к изменению эквивалентного напряжения в 18% испытаний.

Повторный анализ для экспериментальных данных показал, что корректировка практически не отразилась на общем результате при выборе эквивалентного напряжения, т.е. для описания испытаний при нагружении ($P + M$) в качестве критерия длительной прочности предпочтительно использовать величину σ_{e3} , а для описания испытаний при нагружении ($P + q$) – разность максимального и минимального главных напряжений σ_{e4} .

Заключение

В результате проведенных исследований было выявлено, что среди исследуемых пяти различных критериев длительной прочности наилучшее соответствие экспериментальных и теоретических значений времени разрушения имеют степенная (с двумя константами) и дробная (с тремя константами) модели. При испытании трубчатых образцов в случае нагружения ($P + M$) в качестве эквивалентного напряжения целесообразно использовать величину σ_{e3} , а при нагружении ($P + q$) – величину σ_{e4} .

Анализ всех известных в научной литературе серий испытаний показал, что присутствие «случайных» экспериментальных данных не изменило основные выводы относительно выбора эквивалентного напряжения при различных видах сложного напряженного состояния.

Введено понятие прочностной анизотропии материала трубчатых образцов, использованных в испытаниях на длительную прочность при сложном напряженном состоянии, и предложены методы для его определения. При исследовании длительной прочности с учетом прочностной анизотропии материала анализ полученных результатов показал, что исключение из рассмотрения этих данных не влияет на величины коэффициентов прочностной анизотропии металлов*.

Работа выполнена при поддержке российского фонда фундаментальных исследований (проект №05-01-00295) и фонда INTAS (проект №03-51-6046).

Список литературы

1. Johnson A.E., Henderson J., Mathur V.D. Combined stress creep fracture of a commercial copper at 2500C. P. 1 // The Engineer. 1956. V. 202, № 5248. P. 261–265.
2. Сдобырев В.П. Длительная прочность сплава ЭИ-437Б при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 4. С. 92–97.
3. Зверьков Б.В. Длительная прочность труб при сложных нагрузках // Теплоэнергетика. 1958. № 3. С. 51–54.
4. Сдобырев В.П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959, № 6. С. 93–99.
5. Johnson A.E., Henderson J., Mathur V.D. Complex stress creep fracture of an aluminium alloy // Aircraft Eng. 1960. V. 32. № 376. P. 161–170.
6. Трунин И.И. Оценка сопротивления длительному разрушению и некоторые особенности деформирования при сложном напряженном состоянии // ПМТФ. 1963. № 1. С. 110–114.
7. Сдобырев В.П. Ползучесть и длительная прочность при растяжении с кручением // Инж. ж. АН СССР. 1963. Т. 3. № 2. С. 413–416.
8. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 1, Основные гипотезы и их экспериментальная проверка // Проблемы прочности. 1976. № 11. С. 3–8.
9. Локощенко А.М., Мякотин Е.А., Шестериков С.А. Ползучесть и длительная прочность стали X18H10T в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 87–94.
10. Павлов П.А., Курилович Н.Н. Длительное разрушение жаропрочных сталей при нестационарном нагружении // Проблемы прочности. 1982. № 2. С. 44–47.

* Окончание см. в «Машиностроение и инженерное образование». 2006. Вып. 4.

11. Голубовский Е.Р. Длительная прочность и критерий разрушения при сложном напряженном состоянии сплава ЭИ698ВД // Проблемы прочности. 1984. № 8. С. 11–17.
12. Голубовский Е.Р., Подъячев А.П. Оценка длительной прочности при сложном напряженном состоянии никелевых сплавов с поликристаллической и монокристаллической структурой // Проблемы прочности. 1991. № 6. С. 17–22.
13. Kooistra L.F., Blaser R.U., Tucker J.T. High-temperature stress-rupture testing of tubular specimens // Trans. ASME. 1952. V. 74. № 5. P. 783–792.
14. Кац Ш.Н. Исследование длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика. 1955. № 11. С. 37–40.
15. Кац Ш.Н. Разрушение аустенитных труб под действием внутреннего давления в условиях ползучести // Энергомашиностроение. 1957. № 2. С. 1–5.
16. Лагунцов И.Н., Святославов В.К. Испытание пароперегревательных труб из стали 12ХМФ на длительную прочность // Теплоэнергетика. 1959. № 7. С. 55–59.
17. Кац Ш.Н. Влияние добавочных осевых усилий на длительную прочность котельных труб // Теплоэнергетика. 1960. № 5. С. 12–16.
18. Лебедев А.А. Экспериментальное исследование длительной прочности хромоникелевой стали в условиях двухосного растяжения // Термопрочность материалов и конструкционных элементов. – Киев: Наук. Думка. 1965. С. 77–83.
19. Hayhurst D.R. Creep rupture under multi-axial states of stress // J. Mech. and Phys. of Solids. 1972. V. 20. № 6. P. 381–390.
20. Brown R.J., Lonsdale D., Flewitt P.E.J. The role of stress state on the creep rupture of 1%Cr1/2%Mo and 12%Cr1%MoVW tube steels // Creep and Fract. Eng. Mater. and Struct. Proc. Intern. Conf. Swansea. 1981. P. 545–558.
21. Локощенко А.М. Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1983. № 1. С. 55–59.
22. Локощенко А.М. К выбору критерия длительной прочности при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1989. № 9. С. 3–6.
23. Локощенко А.М., Назаров В.В., Платонов Д.О., Шестериков С.А. Анализ критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии // Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 144–149.
24. Локощенко А.М., Мартыненко А.И., Платонов Д.О. Анализ критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии с учетом корректировки результатов испытаний // 2-я Международная научно-техническая конференция. «Проблемы динамики и прочности в газотурбостроении». Тез. докл. – Киев. 2004. С. 119–121.
25. Локощенко А.М. Определение анизотропии при исследовании длительной прочности в условиях плоского напряженного состояния // Проблемы прочности. 1983. № 9. С. 71–73.
26. Локощенко А.М., Платонов Д.О. Анализ длительной прочности при сложном напряженном состоянии с учетом анизотропии материала // Старая Русса. 2001. Т. 1. С. 178–183.
27. Lokoshchenko A.M., Platonov D.O. Creep rupture of anisotropic tubes under complex stress state // Proceedings of the Int. Conf. on Biaxial / Multiaxial Fatigue and Fracture. Berlin. DVM. 2004. P. 567–571.