

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ АМОРТИЗАЦИИ С ДИСКРЕТНОЙ КОММУТАЦИЕЙ ЧАСТЕЙ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Б. А. Калашников



**КАЛАШНИКОВ
Борис
Александрович**

Кандидат технических наук, доцент кафедры авиа- и ракетостроения Омского государственного технического университета (ОмГТУ). Область научных интересов – динамика нелинейных механических систем. Автор монографии, учебного пособия, более 50 научных трудов, 7 изобретений.

Введение

В системах амортизации с дискретной коммутацией (СА с ДК) частей упругих элементов могут использоваться два вида рабочей среды: газ и твердое деформируемое тело, позволяющие получить неоднозначные кусочно-нелинейные или кусочно-линейные характеристики позиционной силы [1]. Уравнения поверхностей связи параметров решения и отношения масс частей μ гармонически линеаризованных систем с одной степенью свободы с обоими

типами элементов существенно различаются:

$$1 - \frac{(\mu + 1)(M_{q,r}\mu + M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2)}{[(\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2]\sqrt{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}} = 0; \quad (1a)$$

$$1 - M_{q,rel} - \frac{\mu A_{q,r}^2}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2} = 0, \quad (1б)$$

где $A_{q,r}$, $M_{q,r}$ – амплитуда и смещение центра относительных колебаний.

Основным отличием СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой является неоднозначность ее поверхности связи параметров (1б), обусловленная существованием кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu)$, параметрическое представление которой имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} A_{q,r}(t) &= \frac{2t}{3-t^2}; \\ M_{q,r}(t) &= \frac{2}{3-t^2}; \\ \mu(t) &= \frac{(t^2-1)^2}{t^2(3-t^2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр $t \in [0, 1]$.

Эта неоднозначность приводит к появлению ряда динамических особенностей [2], важнейшими из которых являются существование предельной амплитуды возмущения $X_0^{\lim}$ и значительная амплитудная зависимость коэффициента относительного затухания ψ при малых отношениях масс в окрестности кривой $\mathfrak{M}$. Особенности обеих поверхностей связи (1a, б),

* Статья является продолжением публикации материалов исследования динамики систем амортизации с дискретной коммутацией частей упругих элементов. См. «Машиностроение и инженерное образование», 2009. № 1, 2.

амплитуда возмущения X_0 и начальные условия приводят к некоторым отклонениям частотных характеристик коэффициента относительного затухания ψ от гиперболы, а тангенса угла механических потерь α – от прямой, параллельной оси частот.

В статье [3] рассматривалась задача построения методики выбора параметров пневмоэлемента с дискретной коммутацией его частей, основанная на гиперболическом типе частотной характеристики коэффициента относительного затухания. Однако эта методика была разработана не в полном объеме и, кроме того, не рассматривалось ее обобщение на СА с ДК частей упругих элементов из твердых деформируемых тел.

Постановка задачи

В работе [1] предложена обобщенная динамическая модель СА с ДК частей упругих элементов обоих типов. В этой модели коммутаторы частей элементов (клапаны, разрезные втулки и т.п.) заменяются жесткой оболочкой и жестким съемным диском. Наложение связи – кратковременное разъединение-соединение диска и оболочки в амплитудных положениях объекта – создает смещение состояния статического равновесия. Замена позиционной силы ее гармонически линеаризованной аппроксимацией дает единое для обоих типов СА с ДК частей уравнение движения

$$Q_r^{*''} + 2\psi(A_{q,r})Q_r^* + Q_r^* = -Y'',$$

формально совпадающее с уравнением для линейной системы.

В этой связи выражения для частотных характеристик и энергетических границ [4, 5] линеаризованной СА с ДК частей формально будут совпадать с характеристиками и границами линейной системы. Входящий в эти выражения тангенс угла механических потерь $\alpha(\eta) = 2\psi(\eta)\eta$ существенным образом определяет значения максимумов АЧХ абсолютных и относительных перемещений, их взаимное положение и соответствующие им резонансные частоты возмущения. Гиперболический тип частотных характеристик коэффициента относительного затухания $\psi(\eta)$ для обоих типов элементов [1] позволяет предположить, что тангенсы углов механических потерь и энергетические границы абсолютных колебаний для обеих АЧХ на некотором отрезке отношения масс будут несущественно зависеть от частоты возмущения.

В статье ставится задача построения мето-

дики нахождения резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот возмущения по заданным отношению масс частей μ и безразмерной амплитуде возмущения X_0 . Также рассматривается решение обратной задачи – определение параметров μ и длины деформируемой части $l_{1,0}$, обеспечивающих при заданной размерной амплитуде возмущения x_0 требуемые значения коэффициентов передачи в резонансах и соответствующие им частоты свободных колебаний.

Характерные и предельные значения тангенса угла механических потерь

Приравнявая к нулю производные частотных характеристик абсолютных и относительных перемещений линеаризованной системы по безразмерной частоте возмущения η

$$W_a(\eta) \equiv \frac{A_{q,a}}{X_0} = \frac{\sqrt{1 + 4\psi^2(\eta)\eta^2}}{D};$$

$$W_r(\eta) \equiv \frac{A_{q,r}}{X_0} = \frac{\eta^2}{D}, \quad (3)$$

$$D = \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\psi^2(\eta)\eta^2},$$

получим уравнения

$$2\psi\psi'\eta^5 - 2\psi^2\eta^4 - 4\psi\psi'\eta^3 - \eta^2 + 1 = 0;$$

$$2\psi\psi'\eta^3 + (1 - 2\psi^2)\eta^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

откуда можно найти резонансные частоты η_a^{res} и η_r^{res} .

Найдем энергетические границы абсолютных и относительных колебаний, полагая, что в выражении D значение $\eta = 1$ [4, 5]. В результате получим

$$E_a(\eta) = \sqrt{1 + \frac{1}{4\psi^2(\eta)\eta^2}}; \quad E_r(\eta) = \frac{\eta}{2\psi(\eta)}. \quad (5)$$

С использованием выражения для тангенса угла механических потерь $\alpha(\eta) = 2\psi(\eta)\eta$ энергетические границы переписываются в виде:

$$E_a(\eta) = \sqrt{1 + 1/\alpha^2(\eta)}; \quad E_r(\eta) = \eta^2/\alpha(\eta). \quad (6)$$

Частотные характеристики $\psi(\eta)$ обоих типов СА с ДК частей не являются строго гиперболическими, хотя и близки к ним [1], поэтому ЧХ тангенсов углов потерь $\alpha(\eta)$ не будут прямыми, параллельными оси частот.

С использованием ЧХ $\alpha(\eta)$ уравнения (4) принимают вид:

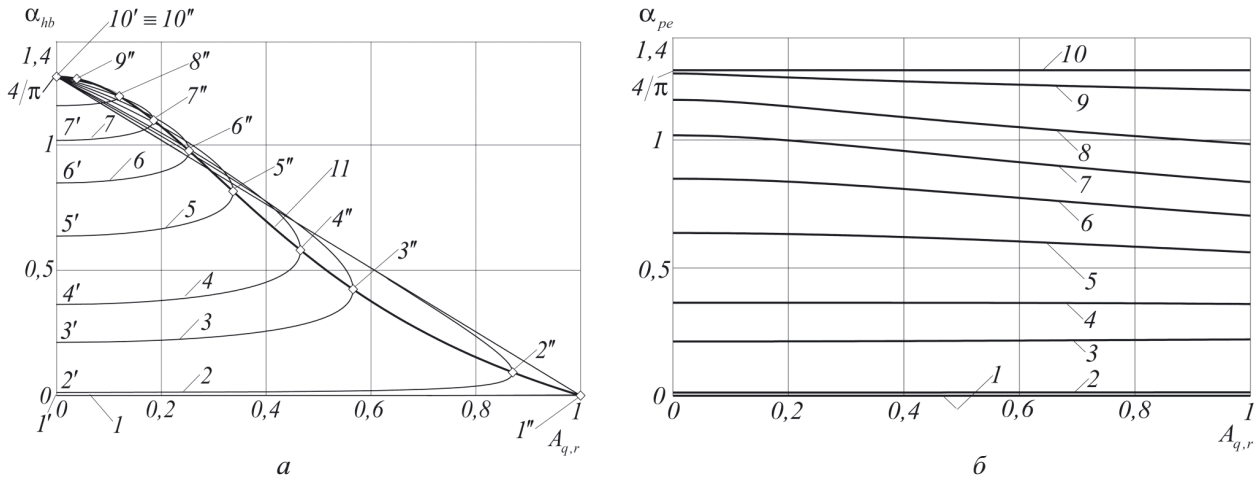


Рис. 1. Амплитудная зависимость тангенса угла потерь для СА с ДК частей с кусочно-линейной (а) и кусочно-нелинейной (б) характеристиками позиционной силы: кривые 1–10 построены для отношений масс $\mu = 0; 0,01; 0,2; 0,4; 1; 2; 4; 10; 100; +\infty$

$$\frac{\alpha\alpha'}{2}\eta^3 - (1+\alpha^2)\eta^2 - \alpha\alpha'\eta + (1+\alpha^2) = 0;$$

$$\eta^2 + \frac{\alpha\alpha'}{2}\eta - (1+\alpha^2) = 0. \quad (7)$$

Если тангенс угла потерь $\alpha(\eta) \equiv \alpha_{char}$ остается постоянным во всем исследуемом диапазоне частот, то выражения для частот η_a^{res} и η_r^{res} , на которых происходит резонанс абсолютных и относительных колебаний, найденные из (7), примут вид

$$\eta_a^{res} = \omega_a^{res} / \omega_{fr,a}^{res} = 1;$$

$$\eta_r^{res} = \omega_r^{res} / \omega_{fr,r}^{res} = \sqrt{1 + \alpha_{char}^2}, \quad (8)$$

где $\omega_a^{res} \equiv v_a^{res} \omega_{nat}$ и $\omega_r^{res} \equiv v_r^{res} \omega_{nat}$ – размерные частоты свободных колебаний, соответствующие амплитудам относительных перемещений на обоих резонансах; ω_{nat} – собственная частота деформируемой части упругого элемента (при $\mu = 0$); v – безразмерная частота свободных колебаний.

При этом энергетические границы E_r и E_a общего вида (6) превращаются соответственно в параболу $E_r' = \eta / \alpha_{char}$ и в прямую

$$E_a' = \sqrt{1 + 1/\alpha_{char}^2}, \quad (9)$$

которая параллельна оси частот.

Значения АЧХ W_a^{res} и W_r^{res} на частотах резонансов, определяемых выражениями (8), будут одинаковыми и равными постоянному значению энергетической границы абсолютных колебаний (9), т.е.

$$W_a^{res}(\eta_a^{res}) = W_r^{res}(\eta_r^{res}) = E_a'. \quad (10)$$

Для СА с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой позиционной силы выражение

для тангенса угла потерь $\alpha = 2\psi\eta$ имеет вид (рис. 1, а):

$$\alpha_{hb} = \frac{4}{\pi} \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 + \mu M_{q,r} - A_{q,r}^2}, \quad (11)$$

а с неоднозначной кусочно-нелинейной характеристикой (рис. 1, б) –

$$\alpha_{pe} = \frac{\mu(\mu+1)A_{q,r}}{\pi \left[(\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2 \right] \left(M_{q,r} - \sqrt{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2} \right)} \times \ln \frac{M_{q,r} + A_{q,r}}{M_{q,r} - A_{q,r}}. \quad (12)$$

Вычисляя пределы тангенсов углов потерь (11) и (12), найдем их характерное, не зависящее от типа упругого элемента, значение

$$\alpha_{char} = \lim_{\substack{M_{q,r} \rightarrow 1, \\ A_{q,r} \rightarrow 0}} \alpha_{hb}|_{S_{st}^t} = \lim_{\substack{M_{q,r} \rightarrow 1, \\ A_{q,r} \rightarrow 0}} \alpha_{pe}|_{S_{pe}} = \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{\mu+1}. \quad (13)$$

Предельное значение тангенса угла потерь для обоих типов СА с ДК частей получим как

$$\alpha_{char}^{lim} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{\mu+1} \Big|_{S_{st}^t, S_{pe}} = \frac{4}{\pi}. \quad (14)$$

Рассчитывая предел тангенса угла потерь (11) на нижней устойчивой части поверхности связи параметров решения и отношения масс частей $S_{st}^b [1, 2]$, найдем

$$\alpha_{char}^{lim} = \lim_{\substack{M_{q,r} \rightarrow 1, \\ A_{q,r} \rightarrow 0}} \alpha_{hb}|_{S_{st}^b} = \frac{4}{\pi}. \quad (15)$$

Подставляя параметрическое представление кривой $\mathcal{M}$ (2) в выражение (11), получим выражение для тангенса угла потерь $\alpha^{extr}(t)$ на этой кривой

$$\alpha^{extr}(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (16)$$

Исключая из (16) параметр t , получим зависимость $\alpha^{extr}(A_{q,r})$, соответствующую кривой экстремальных амплитуд $\mathfrak{M}$ (кривая 11 на рис. 1, а):

$$\alpha^{extr}(A_{q,r}) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1+3A_{q,r}^2} - A_{q,r}^2 - 1}{1 - \sqrt{1+3A_{q,r}^2} + 2A_{q,r}^2}. \quad (17)$$

Графики функции $\alpha=f(A_{q,r})$ на рис. 1 показывают, что:

1) для кусочно-линейных упругих элементов, начиная с отношения масс $\mu \cong 4$, тангенс угла потерь α_{hb} на верхней устойчивой части поверхности связи параметров решения и отношения масс S_{st}^t [1, 2] (кривые 2'2''–10'10''), несущественно зависит от амплитуды $A_{q,r}$, а на ее нижней устойчивой части S_{st}^b (кривые 2''10''–9''10'') имеет место сужение диапазона изменения α_{hb} ;

2) предельное значение $\alpha_{pe}=4/\pi$ для кусочно-нелинейных упругих элементов при отношении масс $\mu=+\infty$ существует на всем диапазоне амплитуд (прямая 10 на рис. 1, б), а для кусочно-линейных – только при амплитуде $A_{q,r} \rightarrow 0$;

3) для кусочно-нелинейных элементов на отрезке $A_{q,r} \in [0, 1]$ имеет место несущественная зависимость тангенса α_{pe} от этой амплитуды.

Предел тангенса угла потерь на кривой $\mathfrak{M}$ (см. рис 1, а, точки 1''...10'')

$$\alpha_{char}^{extr}(\mu) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\mu(9\mu+8)} - \mu}{5\mu+4 - \sqrt{\mu(9\mu+8)}} \quad (18)$$

совпадает с пределами (14), (15)

$$\alpha_{char}^{lim} = \alpha_{char}'^{lim} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \alpha_{char}^{extr}(\mu) = 4/\pi \quad (19)$$

и соответствует точке 10'≡10'' на рис. 1, а.

Влияние амплитуды возмущения на предельные значения параметров колебаний СА с ДК частей с кусочно-нелинейной характеристикой

Частотные характеристики этого типа СА с ДК частей для малого $\mu = 0,4$, близкого к оптимальному $\mu = 4$, и для большого отношения масс $\mu = 20$ имеют ряд особенностей (рис. 2).

При малой амплитуде возмущения X_0 независимо от отношения масс μ ЧХ $\psi(\eta)$ совпадает с предельной характеристикой

$$\psi^{lim}(\eta) = 2\mu/[\pi\eta(\mu+1)] \quad [1],$$

поэтому тангенс угла потерь α_{pe} практически не за-

висит от амплитуды $A_{q,r}$ (см. рис. 1, б) и от частоты η . Вследствие этого в соответствии с (9) энергетическая граница абсолютных колебаний E_a представляет собой почти прямую, параллельную оси частот, и экстремумы обеих основных АЧХ W_a и W_r располагаются на этой прямой.

При большой амплитуде возмущения X_0 тангенс угла потерь $\alpha_{pe}(\eta)$ в зоне резонанса несколько уменьшается по сравнению со своим характерным значением (13). Наиболее сильным это уменьшение является при отношении масс $\mu = 4$, так как при этом значении наибольшее отклонение $\alpha_{pe}(A_{q,r})$ от горизонтальной прямой (см. рис. 1, б). Десятикратное увеличение амплитуды возмущения X_0 при $\mu = 4$ (см. рис. 2, б) приводит к наибольшему отклонению характеристики $\psi(\eta)$ от гиперболы и к изменению экстремальных значений частот и коэффициентов передачи на 10–15%. При этом происходит уменьшение коэффициента ψ и частоты η_r^{res} , увеличение смещения центра колебаний $M_{q,r}$ и коэффициентов передачи и наибольшее отклонение тангенса α_{pe} и энергетической границы E_a от горизонтальных прямых. Максимальные значения АЧХ W_a и W_r при большой амплитуде X_0 уже не равны друг другу. Однако это отклонение энергетической границы относительно невелико и для рассматриваемых параметров $X_0 = 0,5$ и $\mu = 4$ не превосходит 7%.

Влияние амплитуды возмущения на предельные значения параметров колебаний СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой

При малом отношении масс $\mu = 0,4$ для АЧХ и энергетических границ E_a на верхней части поверхности связи S_{st}^t , в отличие от СА с кусочно-нелинейной характеристикой (см. рис. 2, а), характерны следующие особенности (рис. 3, а):

1) существенное уменьшение максимальных значений АЧХ W_a^{res} и W_r^{res} , происходящее с увеличением амплитуды возмущения X_0 до предельной амплитуды X_0^{lim} , значение которой определяется кривой $\mathfrak{M}$;

2) резкое отклонение в зоне резонанса при амплитуде X_0^{lim} энергетической границы E_a от прямой, параллельной оси частот;

3) значительно более низкие значения резонансных коэффициентов передачи (2,0–2,2 по сравнению с 2,925 при $X_0=0,2337$ для пневмоэлемента).

Предельная характеристика [1]

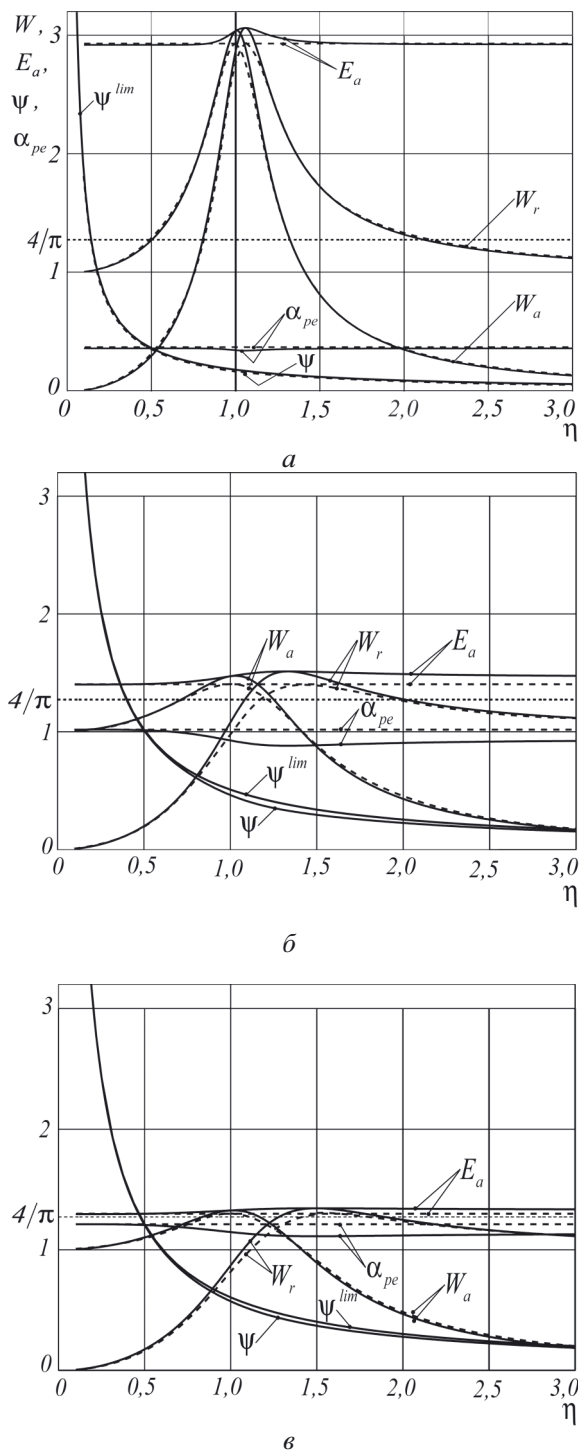


Рис. 2. Зависимость коэффициентов передачи W_a , W_r , энергетической границы E_a , коэффициента относительного затухания ψ , тангенса угла потерь α_{pe} СА с ДК частей с кусочно-нелинейной характеристикой от безразмерной частоты возмущения η :
 $a - \mu = 0,4$; $б - \mu = 4$; $в - \mu = 20$;
---- $X_0 = 0,05$; — $X_0 = 0,5$

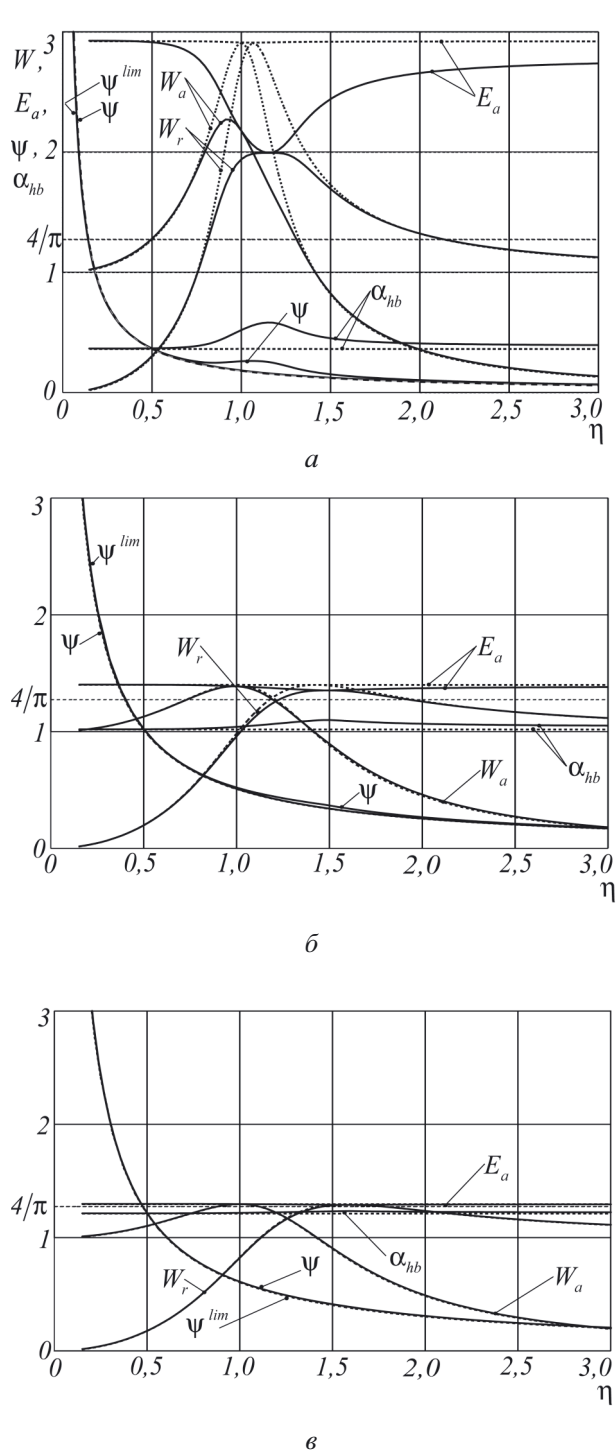


Рис. 3. Зависимость коэффициентов передачи W_a , W_r , энергетической границы E_a , тангенса угла потерь α_{pe} СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой на поверхности S_{st}^t от безразмерной частоты возмущения η :
 $a - \mu = 0,4$; $X_0^{lim} = 0,2337$; $б - \mu = 4$, $X_0^{lim} = 0,1369$;
 $в - \mu = 20$, $X_0^{lim} = 0,0622$ [2];
---- $X_0 = 0,1X_0^{lim}$; — $X_0 = X_0^{lim}$

$$\psi^{\lim}(\eta) = 2\mu/[\pi\eta(\mu+1)]$$

на рис. 3, а, б, в, как и в случае кусочно-нелинейной характеристики, совпадает с зависимостью $\psi(\eta)$ при малой амплитуде возмущения.

При том же малом отношении масс частей $\mu = 0,4$ для АЧХ и энергетических границ E_a на нижней устойчивой части поверхности S_{st}^b наблюдаются некоторые особенности (рис. 4, а):

1) при малой амплитуде возмущения X_0 характеристика $\psi(\eta)$ независимо от отношения масс μ совпадает с предельной зависимостью $\psi = 2/(\pi\eta)$, а резонансные значения АЧХ W_a^{res} и W_r^{res} — с предельно достижимым значением $4/\pi$;

2) на предельной амплитуде $X_0^{\lim}$ увеличение максимальных значений АЧХ W_a и W_r значительно меньше, чем уменьшение этих значений на поверхности S_{st}^t ;

3) отклонение в зоне резонанса энергетической границы E_a от прямой, параллельной оси частот, существенно меньше, чем на поверхности S_{st}^t даже при малых μ и предельных амплитудах возмущения $X_0^{\lim}$.

На предельных амплитудах возмущения $X_0^{\lim}$ при увеличении отношения масс частей μ происходит сближение всех характеристик, соответствующих обоим устойчивым частям поверхности связи, выражающееся в следующем:

1) энергетическая граница абсолютных колебаний E_a существенно приближается к прямой, параллельной оси частот;

2) максимум АЧХ абсолютных колебаний W_a практически располагается на скелетной вертикали $\eta = 1$;

3) максимумы обеих АЧХ W_a и W_r приближаются к своим предельным значениям $W_a^{\text{res}} = W_r^{\text{res}} = 4/\pi \approx 1,273$.

Если принять, что в режиме вынужденного движения во всем диапазоне амплитуд $A_{q,r}$ тангенс угла потерь α остается постоянным и равным своему характерному значению $\alpha = \alpha_{\text{char}}$ (для S_{pe} и S_{st}^t) или $\alpha = \alpha_{\text{char}}^{\text{extr}}$ (для S_{st}^t , S_{st}^b), или $\alpha = \alpha_{\text{char}}^{\lim}$ (для S_{st}^b на малых амплитудах), то (8) и (10) будут иметь силу для обоих типов СА с ДК частей упругих элементов. Отсюда следует, что задаваясь только величиной отношения масс μ , по выражению для энергетической границы (9) с учетом (13) или (14), или (18) легко определить соответствующие значения резонансных максимумов обеих АЧХ. Их предельные значения находятся из условия,

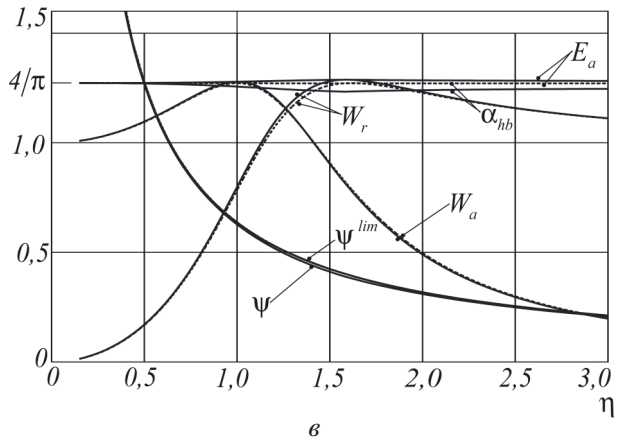
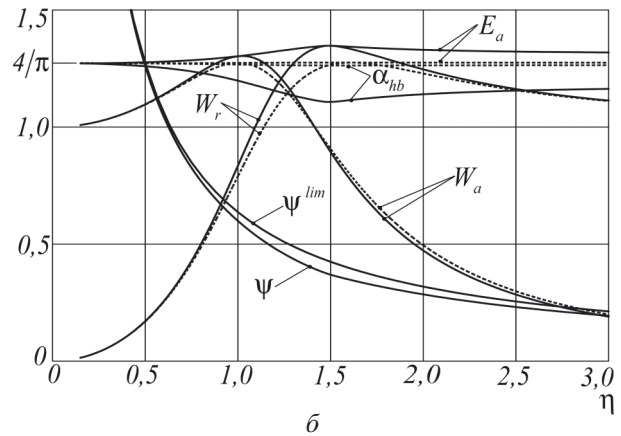
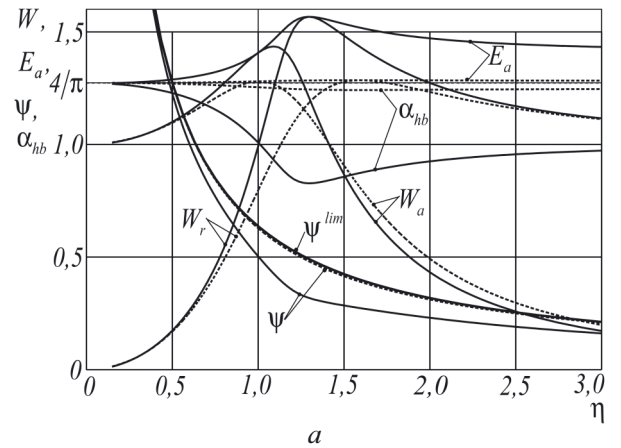


Рис. 4. Зависимость коэффициентов передачи W_a , W_r , относительного затухания ψ , энергетической границы E_a , тангенса угла потерь α_{pe} СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой на поверхности S_{st}^b от безразмерной частоты возмущения η :
 а — $\mu = 0,4$; $X_0^{\lim} = 0,2337$; б — $\mu = 4$; $X_0^{\lim} = 0,1369$; в — $\mu = 20$; $X_0^{\lim} = 0,06229$ [2];
 ---- $X_0 = 0,1X_0^{\lim}$; — $X_0 = X_0^{\lim}$

что $\alpha = \alpha_{char}^{lim} = \alpha_{char}'^{lim} = 4/\pi \cong 1,273$:

$$W_a^{res, lim} = W_r^{res, lim} = 1,272 \cong 4/\pi. \quad (20)$$

Из выражений для резонансных значений частоты (8) и энергетической границы абсолютных колебаний (9) следует также, что

$$W_a^{res} = W_r^{res} = \eta_r^{res} / \alpha_{char},$$

$$\eta_r^{res, lim} = \sqrt{1 + 16/\pi^2} \cong 1,619. \quad (21)$$

Независимо от типа СА с ДК частей раз-
мерная частота кинематического возмущения $\omega_r^{res} \cong 1,619 \omega_{fr,r}^{res} = \omega_{nat} v_r^{res}$ является верхней границей положения максимума АЧХ относительных перемещений.

Методика выбора параметров

Динамические особенности СА с ДК частей упругих элементов позволяют установить связь конструктивных характеристик элемента – отношения масс μ и приведенной начальной длины деформируемой части $l_{1,0}$ – с параметрами колебаний – резонансными коэффициентами передачи W_a^{res} , W_r^{res} и амплитудой возмущения X_0 .

Анализ АЧХ для СА с ДК частей с кусочно-нелинейной характеристикой (см. рис. 2) показывает, что формулы (8), (9), (10) могут обеспечить приемлемую точность в диапазоне отношения масс $\mu = 0,4\text{--}20$ независимо от амплитуды возмущения X_0 с определением характерного значения тангенса угла потерь α_{char} по (13) (см. рис. 1, б и 2).

Аналогичный анализ АЧХ для СА с ДК частей упругих элементов с кусочно-линейной характеристикой (см. рис. 3, 4) позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, десятикратное уменьшение амплитуды X_0^{lim} при каждом отношении масс μ так же, как и для пневмоэлементов, приближает энергетические границы абсолютных колебаний к прямым, параллельным оси частот. При этом диапазон отношения масс μ , в котором сохраняется эта динамическая особенность, может быть принят таким же, как и у пневмоэлементов $\mu \in [0,4; 20]$. В этом случае на поверхности S_{st}^t также следует пользоваться формулами (8), (9), (10) с определением α_{char} по (13) (см. штриховые линии на рис. 2 и 3), а на поверхности S_{st}^b вместо (13) следует воспользоваться постоянной величиной (15).

Во-вторых, на предельных амплитудах возмущения X_0^{lim} для применения тех же формул отрезок изменения масс частей должен быть уменьшен до величины $\mu \in [4; 20]$. Причиной этого сужения диапазона μ является суще-

ственное изменение в резонансной зоне тангенса угла потерь α_{hb} при малых отношениях μ на предельных амплитудах X_0^{lim} (см. рис. 3, а; 4, а). Следствием этой особенности, не дающей возможности определения с приемлемой точностью параметров по формулам (8) и (9), (10), является резкое отличие энергетической границы абсолютных колебаний E_a от прямой, параллельной оси частот. При этом на части поверхности связи S_{st}^t тангенс $\alpha_{char}(\mu)$ следует находить по выражению (13), определяющего его по амплитуде $A_{q,r} = 0$, а на S_{st}^b – или по (15), или по (18), или по их комбинации (см. рис. 1, а).

Нахождение размерных резонансных частот возмущения ω_a^{res} и ω_r^{res} осложняется тем обстоятельством, что частоты свободных колебаний $\omega_{fr,a}^{res}$ и $\omega_{fr,r}^{res}$, входящие в (8), неизвестны. Их безразмерные значения v_a^{res} и v_r^{res} определяются скелетной кривой, соответствующей конкретному отношению масс μ и амплитуде $A_{q,r}$. Отсюда следует, что эти частоты могут быть найдены как абсциссы точек пересечения этой кривой соответственно с АЧХ относительных перемещений W_r и с энергетической границей абсолютных колебаний E_a (см. рис. 2, 3, 4). Для обоих типов упругих элементов методику нахождения частот v_a^{res} и v_r^{res} можно представить в двух вариантах.

Вначале независимо от варианта, задаваясь некоторым значением отношения масс μ , по выражениям для АЧХ (3) с учетом (13), (15) или (18) определяются коэффициенты передачи относительных колебаний на частотах $\eta_a^{res} = 1$ и $\eta_r^{res} = \sqrt{1 + \alpha_{char}^2}$.

Далее находятся соответствующие этим частотам амплитуды относительных колебаний

$$A'_{q,r} = X_0 / \alpha_{char} \text{ и } A''_{q,r} = X_0 \sqrt{1 + 1/\alpha_{char}^2}, \quad (22)$$

где амплитуда X_0 для СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой при данном отношении μ изменяется в диапазоне $0,1 X_0^{lim} - X_0^{lim}$.

Амплитуде $A'_{q,r}$ соответствует безразмерная частота свободных колебаний v_a^{res} , а амплитуде $A''_{q,r}$ – частота v_r^{res} . Размерные значения частот, на которых происходит резонанс абсолютных и относительных колебаний, находятся из (8):

$$\omega_a^{res} = 1 \cdot v_a^{res} \omega_{nat} \text{ и } \omega_r^{res} = \sqrt{1 + \alpha_{char}^2} v_r^{res} \omega_{nat}. \quad (23)$$

Следует заметить также, что $A''_{q,r} = \eta_r^{res} A'_{q,r} > A'_{q,r}$.

По первому варианту методики выбора параметров: рассматривая при решении уравнений поверхностей связи (1) амплитуды

$A'_{q,r}$, $A''_{q,r}$ и отношение масс частей связей μ в качестве аргументов функций двух переменных, а безразмерную амплитуду возмущения X_0 как параметр, находим соответствующие им значения динамической жесткости c'_{eq} , c''_{eq} и безразмерные частоты свободных колебаний ν_a^{res} и ν_r^{res} .

По второму варианту методики при решении тех же уравнений (1) как аргументы функций двух переменных рассматриваются амплитуды $A'_{q,r}$, $A''_{q,r}$ и частоты свободных колебаний ν_a^{res} и ν_r^{res} находятся аналогично.

Выбор параметров движения СА с кусочно-нелинейной характеристикой

На рисунке 5, а приведены графики, иллюстрирующие первый, а на рис. 5, б – второй варианты методики определения резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний.

Задаваясь некоторым значением отношения масс μ , по выражению (13) находим значение α_{char} , а по (10) – соответствующие ему одинаковые резонансные коэффициенты передачи W_a^{res} и W_r^{res} . Проводя горизонтальную прямую до пересечения с кривыми, соответствующими действующей амплитуде возмущения X_0 (см. рис. 5, а), и опуская из точек пересечения два перпендикуляра, находим частоты свободных колебаний ν_a^{res} и ν_r^{res} , соответствующие резонансным частотам возмущения η_a^{res} и η_r^{res} .

По второму варианту методики выбора параметров (см. рис. 5, б): восстанавливая перпендикуляр из точки, соответствующей амплитуде возмущения X_0 , до пересечения с кривыми одинаковых коэффициентов передачи (10) для принятого отношения масс μ , и проводя через точки пересечения две горизонтальные прямые, находим частоты свободных колебаний ν_a^{res} и ν_r^{res} , соответствующие резонансным частотам возмущения η_a^{res} и η_r^{res} .

Выбор параметров движения СА с кусочно-линейной характеристикой

Отличие первого варианта методики выбора параметров на поверхности S_{st}^t от аналогичного для СА с пневмоэлементом, помимо более узкого диапазона μ , обусловлено зависимостью предельной амплитуды возмущения X_0^{lim} от отношения масс μ [2]. Поэтому в отличие от графиков на рис. 5, а, аналогичные кривые для кусочно-линейных характеристик заканчиваются

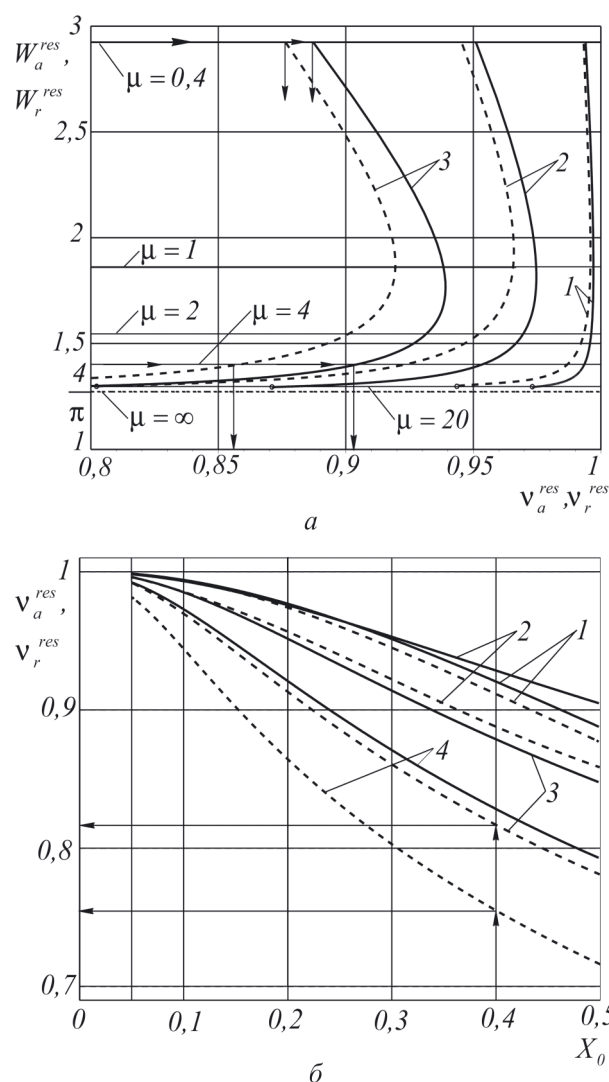


Рис. 5. Выбор резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний СА с ДК частей пневмоэлемента в зависимости:

а – от дискретных амплитуд возмущения:

1 – $X_0 = 0,1$; 2 – $X_0 = 0,3$; 3 – $X_0 = 0,5$;

б – от дискретных отношений масс:

1 – $\mu = 0,4$; $W^{res} \approx 2,925$; 2 – $\mu = 4$, $W^{res} \approx 1,401$;

3 – $\mu = 10$; $W^{res} \approx 1,321$; 4 – $\mu = 20$; $W^{res} \approx 1,296$;

— W_a^{res} , ν_a^{res} ; ---- W_r^{res} , ν_r^{res}

на разных горизонталях, соответствующих выбранной предельной амплитуде X_0^{lim} (рис. 6, а).

Амплитуды возмущения на рис. 6, а приняты предельными для отношений масс $\mu = 4$ и $\mu = 10$. Они существенно меньше предельной амплитуды для $\mu = 0,4$, которая составляет $X_0^{lim} = 0,2337$, поэтому при $X_0 = 0,1 X_0^{lim}$ коэффициенты передачи $W_a^{res} = W_r^{res} \approx 2,925$ практически совпадают с их значениями на АЧХ (см. рис. 3, а). При этом частоты $\nu_a^{res} \approx 1,03$, $\nu_r^{res} \approx 1,04$, что несколько

больше их значений при $0,1X_0^{\text{lim}} \cong 0,02337$. Как показывает расчет, при амплитудах $0,1X_0^{\text{lim}}$ независимо от μ $v_a^{\text{res}} = v_r^{\text{res}} \cong 1$ (см. рис. 6, б).

Отличие второго варианта методики выбора параметров от аналогичного для СА с пневмоэлементом заключается в расчете α_{char} не только по (13), но и по (18). С увеличением отношения масс μ расхождение в значениях частот v_a^{res} , v_r^{res} на амплитудах возмущения, близких к предельным X_0^{lim} , уменьшается и при $\mu = 20$ практически равно нулю (см. рис. 6, б). Каждая из пар кривых на рис. 6, б начинается с соответствующей вертикали $0,1X_0^{\text{lim}}$. Чем больше отношение μ , тем ближе частота v_r^{res} (концы штриховых кривых на рис. 6, б) к частоте свободных колебаний на кривой $\mathfrak{M}$.

В пределе при $\mu \rightarrow \infty$ частота $v_a^{\text{res}} \rightarrow 1$ сверху, $v_r^{\text{res}} \rightarrow \sqrt{6}/2 \cong 1,225$, $A_{\text{qr}}^{\text{extr}} \rightarrow 0$, $X_0^{\text{lim}} \rightarrow 0$ и $W_a^{\text{res}} = W_r^{\text{res}} \rightarrow 4/\pi \cong 1,273$, в отличие от СА с ДК с кусочно-нелинейной характеристикой (см. рис. 6).

При $\mu \rightarrow 0$ $X_0^{\text{lim}} \rightarrow 0$ [2], а $v_r^{\text{res}} \rightarrow 1$ так же, как и v_a^{res} . Коэффициенты передачи при этом $W_a^{\text{res}} = W_r^{\text{res}} \rightarrow \infty$, причем, когда $\mu = 0$, демпфирование исчезает.

В силу значительного изменения тангенса угла потерь α_{hb} на нижней части поверхности связи S_{st}^b (см. рис. 1, а) первый вариант методики выбора параметров требует дополнитель-

ной модификации. Определение резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний целесообразно выполнить отдельно на малых и на предельных амплитудах возмущения.

На малых амплитудах возмущения тангенс α_{char} в соответствии с (19) необходимо принять равным $\alpha'_{\text{char}}^{\text{lim}} = 4/\pi$. При этом резонансные коэффициенты передачи принимают по (10) свое минимальное значение $W_a^{\text{res}} = W_r^{\text{res}} = \sqrt{1 + 1/\alpha_{\text{char}}^2} = 1,272$, а соответствующие им частоты (8) – свои экстремальные значения $\eta_a^{\text{res}} = 1$ и $\eta_r^{\text{res}} = \sqrt{1 + \alpha_{\text{char}}^2} \cong 1,619$.

В связи с постоянством коэффициентов передачи кривые на рис. 5, а и рис. 6, а по первому варианту методики вырождаются в прямую, поэтому частоты v_a^{res} и v_r^{res} необходимо определять в функции отношения масс μ (рис. 7, а).

Поскольку тангенс угла потерь на предельных амплитудах возмущения X_0^{lim} принимался по выражению (18), отличающемуся от (13), то тем же отношениям масс на рис. 7, б соответствуют несколько другие коэффициенты передачи W^{res} . Например, $\mu = 4$ соответствует $W^{\text{res}} \cong 1,352$, $\mu = 10 - W^{\text{res}} \cong 1,304$, $\mu = 20 - W^{\text{res}} \cong 1,288$ (ср. с рис. 6).

Изменение амплитуды возмущения в диапазоне $0,1X_0^{\text{lim}} - X_0^{\text{lim}}$ для некоторых значений отношения масс μ по второму варианту методики

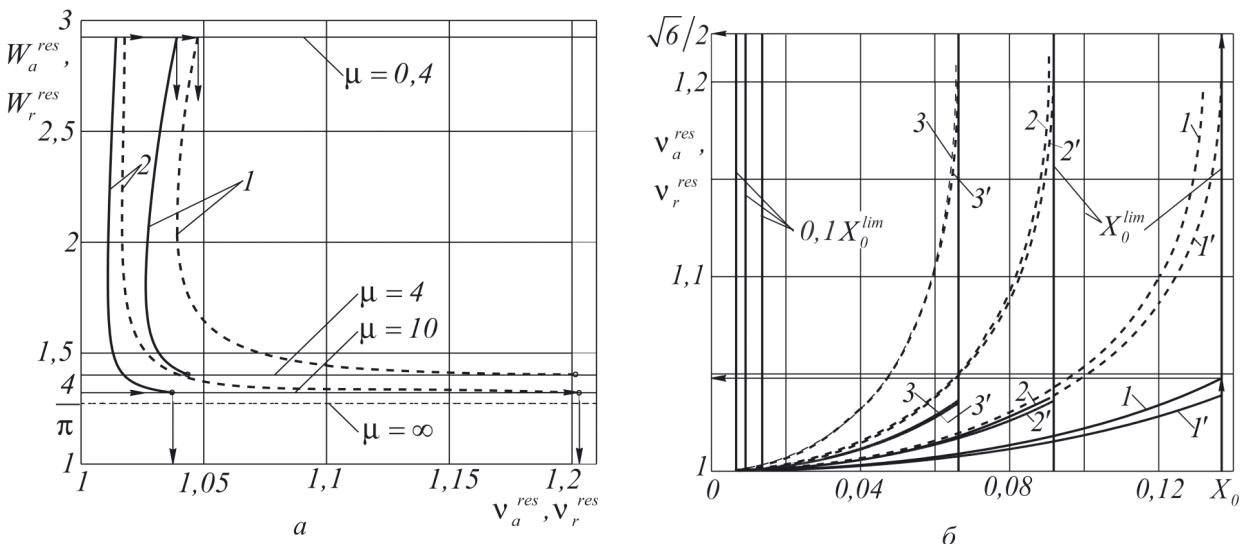


Рис. 6. Выбор резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний СА с ДК частей из твердых тел на поверхности S_{st}^b в зависимости: а – от предельных дискретных амплитуд возмущения: 1 – $X_0^{\text{lim}} = 0,1369$; 2 – $X_0^{\text{lim}} = 0,0918$; б – от дискретных отношений масс по (10) и (13): 1 – $\mu = 4$, $W^{\text{res}} \cong 1,401$; 2 – $\mu = 10$; $W^{\text{res}} \cong 1,321$; 3 – $\mu = 20$; $W^{\text{res}} \cong 1,296$ по (10) и (18) 1' – $\mu = 4$, $W^{\text{res}} \cong 1,352$; 2' – $\mu = 10$, $W^{\text{res}} \cong 1,304$; 3' – $\mu = 20$, $W^{\text{res}} \cong 1,288$.

— W_a^{res} , v_a^{res} ; ---- W_r^{res} , v_r^{res}

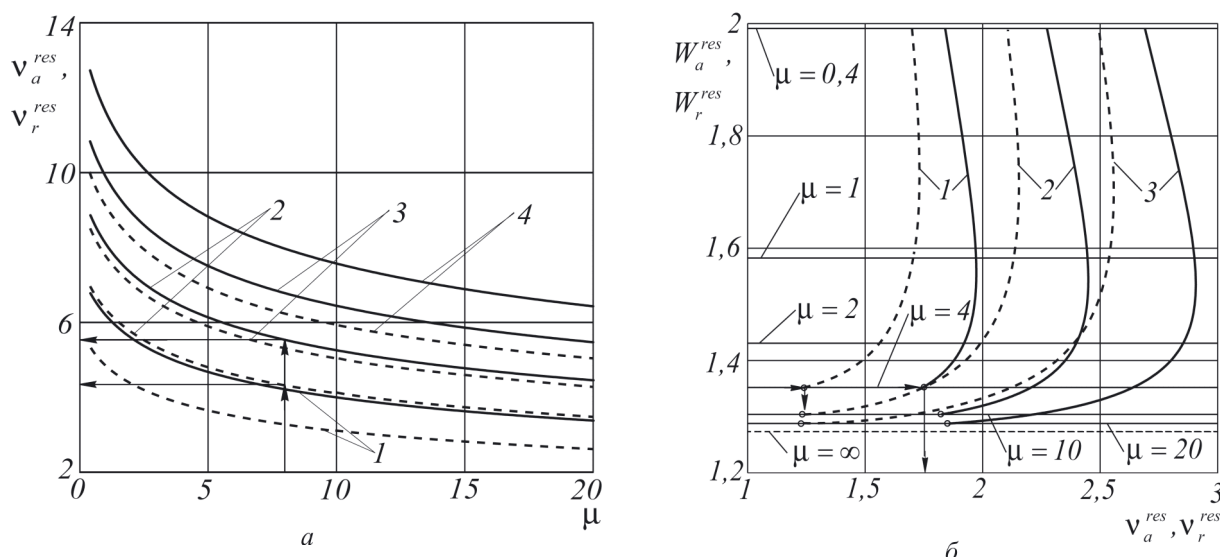


Рис. 7. Выбор частоты свободных колебаний на нижней устойчивой части поверхности связи S_{st}^b :

a – при малых амплитудах возмущения с расчетом тангенса угла потерь по (15);

$1 - X_0 = 0,1X_0^{lim} |_{\mu=0,4} \approx 0,02337$; $2 - X_0 = 0,1X_0^{lim} |_{\mu=1} \approx 0,01369$; $3 - X_0 = 0,1X_0^{lim} |_{\mu=10} \approx 0,00918$;

$4 - X_0 = 0,1X_0^{lim} |_{\mu=20} \approx 0,00662$;

b – при предельных амплитудах возмущения с расчетом тангенса угла потерь по (18);

$1 - X_0^{lim} |_{\mu=4} \approx 0,1369$; $2 - X_0^{lim} |_{\mu=10} \approx 0,0918$; $3 - X_0^{lim} |_{\mu=20} \approx 0,0662$;

— W_a^{res}, v_a^{res} ; — W_r^{res}, v_r^{res}

расчета параметров на части поверхности S_{st}^b , (рис. 8) позволяет обнаружить следующие динамические особенности.

Выбор выражения (15) или (18) практически не влияет на резонансные частоты свободных колебаний v_a^{res} и v_r^{res} , за исключением случая $\mu = 0,4$ (см. рис. 8, a). Однако в соответствии с (10) и (15) кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют коэффициенты передачи $W_a^{res} = W_r^{res} = 1,272$, а кривым 1', 2', 3', 4' в соответствии с (10) и (18) – $\approx 1,991; 1,352; 1,304; 1,288$.

Выбор конструктивных параметров СА с ДК частей упругих элементов

Независимо от типа упругого элемента графики на рис. 5–8 могут быть использованы для решения обратной задачи – определения параметров μ и $l_{1,0}$, обеспечивающих при заданной амплитуде возмущения x_0 требуемые значения коэффициентов передачи в резонансах и соответствующие им частоты свободных колебаний.

Рассмотрим последовательность решения этой задачи.

Задаваясь значением резонансного коэффициента передачи абсолютных колебаний, из выражения для энергетической границы абсолютных колебаний (9) с учетом (13) или (18) находим необходимое для этого отношение μ .

Далее возможен двоякий путь решения в зависимости от того, как выбирается начальная длина деформируемой части $l_{1,0}$. Если она уже задана исходя из каких-либо условий (например, конструктивных ограничений), то по известной амплитуде возмущения x_0 находятся частоты $\omega_{fr,a}$ и $\omega_{fr,r}$, соответствующие резонансным значениям амплитуды относительных колебаний.

Если же главным является выбор частоты $\omega_{fr,a}^{res}$, то, задаваясь отношением $v_a^{res} = \omega_{fr,a}^{res} / \omega_{nat}$, находим кривую, на которой отношение $X_0 = x_0 / l_{1,0} = \text{const}$ (сплошные линии на рис. 5, a ; 6, a и 7), по величине которого при заданной амплитуде кинематического возмущения x_0 определяем необходимую приведенную длину $l_{1,0}$.

Частота v_r^{res} , соответствующая коэффициенту передачи W_r^{res} , находится как абсцисса точки пересечения горизонтальной прямой $W_a^{res} = W_r^{res} = \text{const}$ со штриховыми линиями $X_0 = x_0 / l_{1,0} = \text{const}$.

Эта же задача может быть решена при помощи графиков на рис. 5, b ; 6, b и 8.

Выводы

При анализе частотных характеристик гармонически линейризованных СА с ДК частей установлено, что на отрезке отношения масс $\mu \in [4, 20]$ энергетическая граница абсолютных колебаний может считаться прямой, параллель-

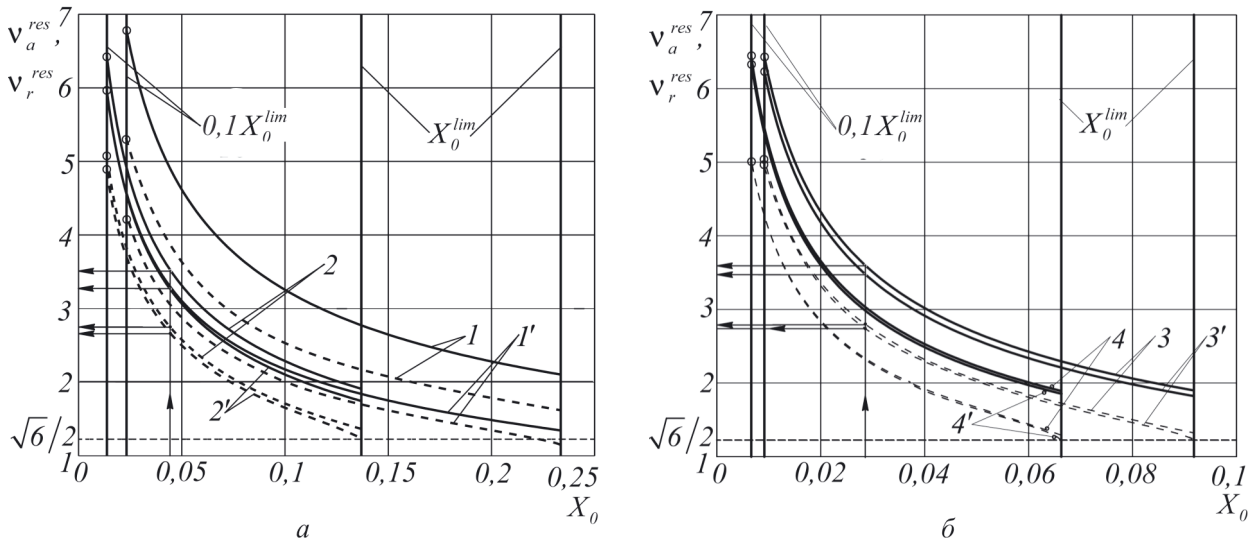


Рис. 8. Выбор параметров СА с ДК частей из твердых деформируемых тел на нижней устойчивой части поверхности связи S_{st}^b по второму варианту методики выбора параметров с расчетом α_{char} по (15) (кривые 1–4) и по (18) (кривые 1'–4'):

а - $\mu=0,4$, $X_0^{lim} \approx 0,2337$ (кривые 1 и 1'); $\mu=4$, $X_0^{lim} \approx 0,1369$ (кривые 2 и 2');
б - $\mu=10$, $X_0^{lim} \approx 0,0918$ (кривые 3 и 3'); $\mu=20$; $X_0^{lim} \approx 0,0662$ (кривые 4 и 4'); — v_a^{res} , --- v_r^{res}

ной оси частот. Эта граница является геометрическим местом одинаковых максимумов АЧХ абсолютных и относительных перемещений независимо от типа упругого элемента, особенностей поверхностей связи параметров [1, 2] и амплитуды возмущения.

Для СА с кусочно-нелинейной и СА с кусочно-линейной характеристикой позиционной силы на верхней части поверхности связи параметров S_{st}^t и на нижней части этой поверхности S_{st}^b вблизи кривой экстремальных амплитуд $\mathcal{M}$ резонансные коэффициенты передачи определяются только отношением масс частей. На поверхности S_{st}^b на малых амплитудах возмущения эти коэффициенты $W_a^{res} = W_r^{res} \approx 4/\pi$ и не зависят от отношения масс.

На отрезке отношения масс $\mu \in [4, 20]$ даже при существенно большой амплитуде возмущения $X_0 = 0,5$ частоты свободных колебаний СА с ДК частей пневмоэлемента, соответствующие резонансным частотам возмущения, изменяются на весьма небольшом отрезке $\nu \in [0,78; 0,905]$; при малой же амплитуде $X_0 = 0,1$ этот отрезок сужается до величины $\nu \in [0,97; 0,986]$, а сами частоты приближаются к частоте недемпфированной системы $\nu = 1$.

Среднее значение частоты свободных колебаний СА с ДК частей элементов из твердых деформируемых тел на поверхности S_{st}^t на отрезке отношения масс $\mu \in [4, 20]$, соответствующее

резонансу абсолютных колебаний, составляет величину $\nu_a^{res}(A_{q,r}^{extr}) \approx 1,04$, а относительных — $\nu_r^{res}(A_{q,r}^{extr}) \approx 1,21$.

На отрезке $\mu \in [4, 20]$ на поверхности S_{st}^b на малых амплитудах возмущения имеет практически точное, а на предельных — удовлетворительное совпадение резонансных коэффициентов передачи с результатами прямого расчета АЧХ (см. рис. 4), улучшающееся с ростом μ . Дальнейшее уменьшение амплитуды возмущения приводит к значительному возрастанию обеих частот свободных колебаний ν_a^{res} и ν_r^{res} . Это означает, что при жестких ограничениях, налагаемых на размерные значения резонансных частот, амплитуды возмущения должны задаваться с высокой точностью.

Заключение

Практически гиперболический тип частотной характеристики коэффициента относительного затухания на отрезке изменения отношения масс $\mu \in [4, 20]$ позволяет находить резонансные коэффициенты передачи по выражениям, зависящим только от этого отношения или вообще считать их постоянными и равными $4/\pi$.

Для СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой выбор выражения для характерного значения тангенса угла механических потерь, за исключением области малых амплитуд на нижней части поверхности связи параме-

тров S_{st}^b , не играет существенной роли ни для резонансных коэффициентов передачи, ни для соответствующих им частот свободных колебаний. Поэтому его можно выбрать таким же, как и для СА с ДК частей с кусочно-нелинейной характеристикой, т.е. соответствующим состоянию статического равновесия.

Можно пренебречь влиянием амплитуды кинематического возмущения на частоты свободных колебаний, соответствующих резонансным частотам возмущения для кусочно-нелинейных СА и кусочно-линейных на верхней части поверхности связи параметров S_{st}^t , в том числе и для систем с конечным числом степеней свободы. На нижней части поверхности связи параметров S_{st}^b учет влияния малых амплитуд кинематического возмущения на частоты свободных колебаний обязателен, так как на этой части скелетные кривые представляют собой практически прямые с малым тангенсом угла наклона.

Список литературы

1. Калашников Б.А. Об одном способе амортизации, основанном на дискретной коммутации частей упругих элементов // Машиностроение и инженерное образование. 2009. № 1. С. 42–52.
2. Калашников Б.А., Бохан В.В. Некоторые особенности динамики систем амортизации с дискретной коммутацией частей упругих элементов // Машиностроение и инженерное образование. 2009. № 2. С. 30–40.
3. Калашников Б.А. К выбору параметров пневмоэлемента подвески автомобиля // Изв. вузов: Машиностроение. 1986. № 4. С. 82–86.
4. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 317 с.
5. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем (приближенные методы). – М.: Наука, 1978. – 352 с.