УДК 620.178.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Гриб, Р.В. Жуков, И.М. Петрова

Предложена многопараметрическая модель состояния механических систем для прогнозирования их остаточного ресурса и оценки значимости различных факторов, описывающих конструктивные и технологические характеристики, а также действующие напряжения и деформации механических систем. Описание многопараметрического состояния системы представлено вектором состояния, вектором внешнего воздействия на систему и оператором, реализующим метод расчета и учитывающим свойства системы. Изменение технического состояния описано движением вектора состояния в многомерном пространстве. Рассмотрен ряд последовательных состояний через малый задаваемый отрезок времени. Скорость изменения состояния на этом отрезке времени принята зависящей от состояния системы и параметров в начале данного отрезка времени и неизменной на нем. Моделирование технического состояния произведено с помощью вероятностных моделей с учетом случайного характера величин, описывающих параметры состояния, и внешнего воздействия.

Ключевые слова: *механические системы, моделирование, вектор состояния, ресурс, вероятность.*

Введение

Техническое состояние механических систем характеризуется множеством взаимосвязанных факторов, описывающих их конструктивные и технологические свойства, температуру, действующие напряжения и деформации, динамику внешних воздействий, свойства материалов, которые могут изменяться во времени под действием внешних сил и условий эксплуатации. В процессе эксплуатации осуществляется сложное взаимодействие механизмов нагружения и повреждения деталей машин и элементов конструкций по ряду критериев: прочности, износостойкости, коррозионной стойкости и др. [1–3]. При этом в зависимости от окружающей среды и условий нагружения реализуются различные механизмы накопления повреждений и разрушения. Для обеспечения требуемого уровня надежности и долговечности механических систем, находящихся в эксплуатации, критерии работоспособности должны быть рассмотрены с учетом степени их влияния на накопление повреждений.

Создание многопараметрических моделей состояния механических систем необходимо как при оценке значимости различных факторов, влияющих на деградационные процессы, так и при прогнозировании остаточного ресурса на основании данных об их текущем состоянии при решении проблемы безопасности и риска эксплуатации опасных объектов [4, 5].

Постановка задачи и методы решения

Математически описание многопараметрического состояния системы может быть представлено обобщенным вектором

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \left\{X_1, X_2, ..., X_j\right\},$$

где X_1, ..., X_j – параметры, описывающие техническое состояние системы в рамках принимаемой модели и изменяющиеся в процессе эксплуатации. Параметры X_1, ..., X_j могут быть выражены скалярными (температура, давление) и векторными (нагрузка, реакция, геометрия, скорость, ускорение) величинами, тензорами (напряжения, деформации), функциями (колебания, вибрация, шум). Параметры могут быть сосредоточенными или распределенными по системе.

Вектор состояния может быть поставлен в соответствие вектору **q** внешнего воздействия на систему посредством оператора *H*, реализующего метод расчета и учитывающего свойства системы:

$$\mathbf{X}(t) = H\mathbf{q}(t).$$

Изменение технического состояния механической системы описывается движением вектора **X** в многомерном (фазовом) пространстве Ф вектор-функций

$$\mathbf{X}(t_i) = \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_i} \lambda_{\text{об}}(\mathbf{X},\mathbf{q})\, dt,$$

где $\lambda_{\text{об}}$ – обобщенная скорость изменения технического состояния, зависящая от вектора текущего состояния **X** и вектора внешнего воздействия на систему **q**.

Пространство Ф разделено поверхностью отказов, отделяющей часть работоспособных состояний Ω от неработоспособных. Поскольку процесс *X(t)* – случайный, вероятность безотказной работы объекта на отрезке времени $[t_0, t]$ равна вероятности нахождения вектора **X** в области Ω

$$P(t) = P\left\{X(\tau) \in \Omega,\ \tau \in [t_0, t]\right\},$$

где τ – текущее время.

Общий прием решения задачи изменения технического состояния механической системы заключается в дискретизации задачи во времени и пространстве и рассмотрении ряда ее последовательных состояний через задаваемый достаточно малый отрезок времени δt (шаг наработки). Скорость изменения состояния на этом отрезке времени принимается зависящей от состояния, свойств системы и режимных параметров в начале данного отрезка времени и неизменной на нем. Соответственно уравнение обобщенной скорости $\lambda_{\text{об}} = dX/dt$ аппроксимируется в виде разностной схемы:

$$\frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{\delta t} = \lambda_{\text{об}} X(t_i),$$

которая преобразуется в рекуррентное выражение $X(t_{i+1}) = AX(t_i)$, решение которого проводится итерационным способом при начальном условии $X(t_i = 0) = X_0$. Устойчивость разностных схем и сходимость решения в данной работе не рассматриваются.

Оператор *A* перехода от *i*-го к (*i*+1)-му состоянию не содержит производных по времени. Линеаризация оператора на отрезке времени δt позволяет рассматривать его как суперпозицию параметров элементарных процессов X_1, X_2, X_3, ... на этом отрезке:

$$\overline{\delta X_i} = \left(\delta X_{1,i}, \delta X_{2,i}, \delta X_{3,i,\dots}\right),$$

где

$$\delta X_{1,i} = \lambda_{1,i}(X_1(t_i), X_2(t_i), X_3(t_i), \dots, q(t_i))\delta t;$$
$$\delta X_{2,i} = \lambda_{2,i}(X_1(t_i), X_2(t_i), X_3(t_i), \dots, q(t_i))\delta t;$$
$$\delta X_{3,i} = \lambda_{3,i}(X_1(t_i), X_2(t_i), X_3(t_i), \dots, q(t_i))\delta t;$$

$\lambda_{1,i}$, $\lambda_{2,i}$, $\lambda_{3,i}$ – скорости элементарных процессов в начале отрезка времени, зависящие от технического состояния системы в начале этого отрезка.

В конце каждого отрезка времени находится новое техническое состояние, по которому определяются скорости и векторы перехода для следующего отрезка времени и т.д.

Учитывая, что при линеаризации оператора перехода от одного состояния к другому накапливается ошибка, при его разработке используют известный метод Рунге – Кутта. Наиболее часто применяемый в пакетах прикладных программ 4-этапный метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности имеет следующий алгоритм:

$$X_{i+1} = X_i + k_i\delta t,\ i=1,2,\dots,$$

где

$$k_i = \left(\frac{1}{6}\right)\left(k_i(1) + 2k_i(2) + 2k_i(3) + k_i(4)\right);$$

$$k_i(1) = \lambda_{\text{об}}(t_i, X_i);$$

$$k_i(2) = \lambda_{\text{об}}(t_i + \delta t/2,\ X_i + k_i(1)\delta t/2);$$

$$k_i(3) = \lambda_{\text{об}}(t_i + \delta t/2,\ X_i + k_i(2)\,\delta t/2);$$

$$k_i(4) = \lambda_{\text{об}}(t_i + \delta t,\ X_i + k_i(3)\delta t).$$

Метод эффективен при небольшом значении δt. Ресурс механической системы определяется достижением вектора состояния предельной величины с заданной вероятностью.

Таким образом, методология математического моделирования сложных механических систем включает в себя следующие процедуры:

- анализ структуры системы (декомпозиция системы на элементы и протекающие в ней элементарные процессы, установление связей между ними);
- математическое описание элементарных процессов; разработка операторов перехода от одного состояния к другому (последующему) для элементарных процессов;
- разработка математической модели, алго-

ритма поведения системы в целом (разработка оператора, преобразующего входные параметры в выходные, и оператора перехода системы от одного состояния к другому (последующему);

● имитационное моделирование функционирования системы (математический эксперимент с абстрактной моделью).

Изменение технического состояния – вероятностный процесс. Его моделирование производится с помощью вероятностных моделей функционирования и изменения технического состояния с учетом случайного характера величин, описывающих параметры состояния и внешнего воздействия.

Математическое описание случайных величин осуществляют различными законами распределения вероятностей: экспоненциальным, нормальным, логарифмически-нормальным законами, законом Вейбулла и др. При выборе теоретической кривой распределения наблюдаемых или полученных в результате экспериментов случайных величин руководствуются критерием согласия Пирсона.

Многолетний опыт обработки экспериментальных данных показывает, что нормальный закон целесообразно применять для определения времени наработки до отказа, вызванного старением, равномерной коррозией, механическим изнашиванием; для описания распределения отклонений значений параметров технического состояния от номинального значения. Логарифмически-нормальный закон применяют для описания наработки до отказа, вызванного усталостным разрушением. Закон Вейбулла описывает отказы механических систем в начальный период эксплуатации и отказы в результате хрупких и усталостных разрушений. Экспоненциальный закон применяют при анализе наработки невосстанавливаемого объекта до его случайного отказа, а для восстанавливаемых объектов – при анализе отрезка времени между последовательными отказами.

Упрощенно вероятностная картина эволюции технического состояния механических систем может быть представлена в виде марковских цепей, где плотность вероятности состояния X_{i+1} полностью зависит от вероятности состояния X_i и условной плотности вероятности перехода системы из i-го в $(i+1)$-е состояние $p\left(X_{i+1},t_{i+1}\,|\,X_i,t_i\right)$. Как известно, переходная плотность вероятности обладает свойством вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(X_{i+1},t_{i+1}\,|\,X_i,t_i)=1$$

и удовлетворяет условию

$$p\left(X_{i+1},t_{i+1}\right)=p\left(X_{i+1},t_{i+1}\,|\,X_i t_i\right)p\left(X_i,t_i\right).$$

Марковский процесс $X(t)$ полностью определяется начальным распределением $p\left(X_0,t_0\right)$ и переходной плотностью вероятности

$$p\left(X_0,X_1,...,X_i\right)=$$
$$=p\left(X_i\,|\,X_{i-1}\right)p\left(X_{i-1}\,|\,X_{i-2}\right)...p\left(X_1\,|\,X_0\right)p\left(X_0\right).$$

При $\delta t\to 0$ и $X_{i+1}\to X_i$ получаем дифференциальное уравнение переходной плотности вероятности непрерывного марковского процесса

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial X}(\xi p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}(\zeta p),$$

где $\xi(X,t)$ – функция, характеризующая среднюю эволюцию процесса $X(t)$; $\zeta(X,t)$ – функция, характеризующая среднее квадратичное отклонение процесса.

Функция $\xi(X,t)$ называется коэффициентом сноса, а функция $\zeta(X,t)$ – коэффициентом диффузии.

Уравнение (1) справедливо и для описания плотности вероятности самого технического состояния $p(X,t)$.

Приближенно плотность вероятности функции состояния в конце каждого шага может быть найдена по известной плотности вероятности в начале шага и задаваемой нормальным законом плотности вероятности перехода на этом шаге методом Монте – Карло.

При отсутствии данных об изменении вероятности показателей технического состоянии во времени для статистического описания процесса в ряде случаев применяют упрощенные математические модели. Вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ представляется в виде регулярной $\mathbf{Y}(t)$ и случайной $\mathbf{Z}(t)$ составляющих. Регулярная составляющая представляется в виде гладкой функции времени. Эта составляющая иначе называется трендом, тенденцией процесса или детерминированной основой процесса. Случайная составляющая принимается как некоррелируемый случайный процесс с математическим ожиданием, равным нулю. Использование в модели стационарного случайного процесса, вероятностные характеристики (плотность вероятности состояния, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение) которого не изменяются с течением времени и при переходе

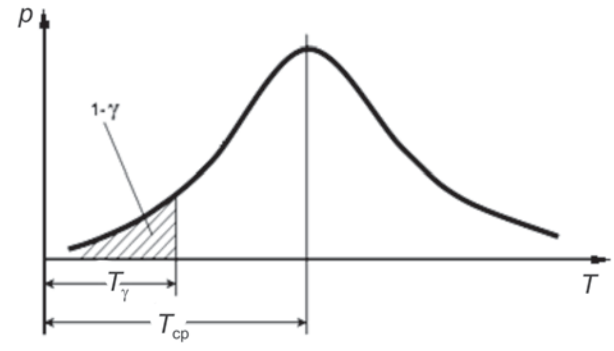

Рис. 1. Определение ресурсного показателя

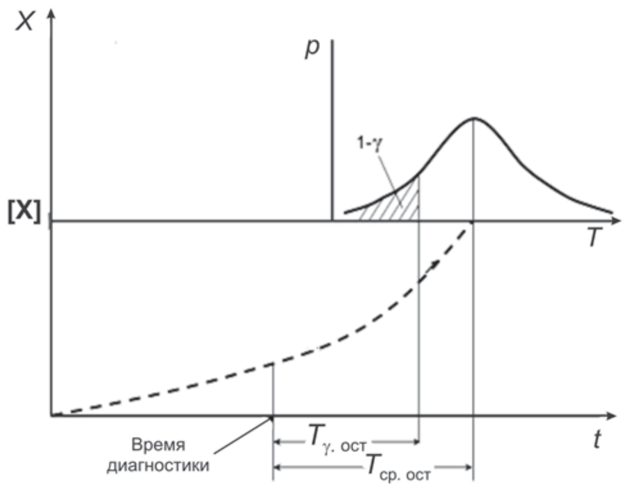

Рис. 2. Определение ресурсных параметров по тренду и функции плотности распределения отказов аналогичных объектов:

– – – – – аппроксимирующая функция;

[**X**] – вектор состояний на момент времени *t*

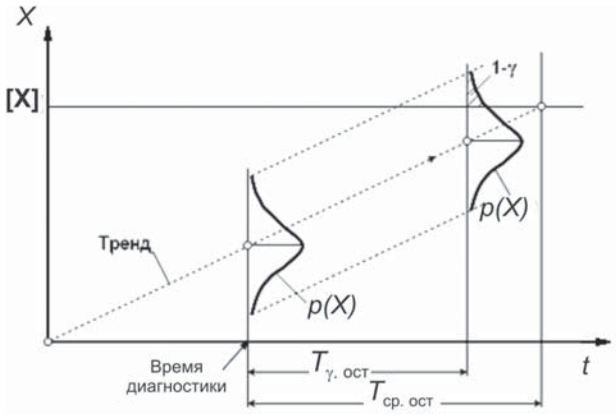

Рис. 3. Определение гамма-процентного остаточного ресурса объекта по тренду и плотности вероятности технического состояния

от одного состояния к другому, является весьма грубым, но порой неизбежным допущением прогнозирования технического состояния.

При оценке надежности механических систем ограничимся следующими основными показателями:

вероятностью безотказной работы

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t p(t)\,dt,$$

где *F(t)* – функция вероятности отказа до момента *t*; *p(t)* – плотность распределения случайной величины, описываемой функцией *F(t)*;

средним временем безотказной работы

$$T_{ср} = \int_t^\infty P(t)dt;$$

гамма-процентным ресурсом T_γ – наработкой, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах;

интенсивностью отказов

$$\lambda(t) = \frac{p(t)}{P(t)}.$$

На рис. 1 показаны плотность распределения ресурсного показателя *p(T)*, средняя наработка на отказ $T_{ср}$ и назначенная гамма-процентная наработка T_γ. При нормальном законе распределения вероятность случайного события удобно регламентировать задаваемой величиной, например величинами 0,90; 0,95; 0,99, ..., и определять значение отклонения квантилем – коэффициентом, на который умножается величина среднего квадратичного отклонения.

Выбор показателей надежности зависит от восстанавливаемости или невосстанавливаемости объекта, режимов эксплуатации, последствий отказа. Если последствия отказа связаны с человеческими жертвами или большими экономическими потерями, определяющим показателем является гамма-процентный ресурс, где вероятность γ назначается 0,95 и более.

Прогнозирование изменения технического состояния и оценка остаточного ресурса по тренду и плотности распределения отказов, определенной на основании анализа отказов аналогичных объектов показана на рис. 2, а по тренду и плотности распределения текущего состояния, определенной по данным экспериментального диагностирования единичного объекта, – на рис. 3. Во втором случае принят закон стационарного случайного процесса изменения технического состояния на прогнозируемый отрезок времени.

Заключение

Предложенная методология математического моделирования технического состояния сложных механических систем позволяет с обоснованной степенью точности оценить основные показатели надежности механических систем: вероятность безотказной работы; среднее время безотказной работы; гамма-процентный ресурс или наработку, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью, выраженной в процентах; интенсивность отказов.

Предлагаемый подход моделирования технического состояния механических систем позволяет учесть при оценке ресурса большинство известных эксплуатационных факторов, включая данные о нагруженности, действии внешних физических и химических полей (температура, коррозионные среды и т.п.), что повышает точность его оценки. Однако следует иметь в виду, что точность оценки ресурса в любом случае зависит от достоверности исходной информации о внешних воздействиях и о модели накопления повреждений.

Список литературы

1. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
2. *Махутов Н.А.* Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Ч. 1: Критерии прочности и ресурса. – Новосибирск. Сибирское отд-ние: Наука, 2005.– 494 с.
3. *Махутов Н.А.* Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Ч. 2. – Новосибирск. Сибирское отд-ние: Наука, 2005.– 610 с.
4. *Гриб В.В., Жуков Р.В., Петрова И.М. и др.* Диагностические модели изменения технического состояния механических систем. Ч.1/ Под общей ред. проф. В.В. Гриба – М.: МАДИ(ГТУ), 2007. – 300 с.
5. *Гриб В.В., Жуков Р.В., Перминов М.Д. и др.* Диагностические модели изменения технического состояния механических систем. Ч. 2: Вибродиагностика. Модальный анализ. Конечно-элементные технологии оценки технического состояния механических систем / Под общей ред. проф. В.В. Гриба. – М.: МАДИ (ГТУ), 2008.– 263 с.

Материал поступил в редакцию 10.09.2012

ГРИБ Владимир Васильевич

E-mail: **grib_Vladimir@mail.ru**
Тел.: **(495) 392-76-92**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой деталей машин и теории механизмов Московского автодорожного государственного технического университета (МАДИ) (ГТУ). Сфера научных интересов – механика, надежность, трибология. Автор 215 научных работ.

ЖУКОВ Роман Валерьевич

E-mail: **rvz1975@yandex.ru**
Тел.: **(910) 470-60-24**

Кандидат технических наук, заведующий лабораторией НПП «Механик». Сфера научных интересов – накопление повреждений, методы неразрушающего контроля накопления повреждений, оценка долговечности и остаточного ресурса. Автор 53 научных работ.

ПЕТРОВА Ирина Михайловна

E-mail: **impetr@mail.ru**
Тел.: **(499) 135-30-74**

Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ИМАШ РАН. Сфера научных интересов – прочность, усталость материалов, накопление повреждений, оценка долговечности. Автор 104 научных работ.