УДК 621.01:534

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АМОРТИЗАЦИИ, ОСНОВАННОМ НА ДИСКРЕТНОЙ КОММУТАЦИИ ЧАСТЕЙ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б. А. Калашников

КАЛАШНИКОВ
Борис
Александрович

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиа- и ракетостроение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ). Область научных интересов – динамика нелинейных механических систем. Автор монографии, учебного пособия, более 50 научных трудов, 7 изобретений.

Введение

Известно, что силы сопротивления, зависящие от скорости, или не обеспечивают удовлетворительного демпфирования в зоне резонанса, или создают слишком большое динамическое воздействие на объект в зарезонансной зоне [1]. В связи с этими динамическими особенностями для защиты ряда объектов современной техники целесообразно было бы иметь в системах амортизации (СА) гиперболический тип частотной зависимости коэффициента относительного затухания. При этом должно быть достигнуто увеличение этого коэффициента в зоне низкочастотного резонанса до значения (0,45–0,5). Такой тип этой зависимости можно обеспечить путем весьма быстрого наложения-снятия жесткой связи на часть упругого элемента, осуществляемым в окрестности амплитудных положений объекта. В качестве элементов могут применяться пневмоэлементы или твердые деформируемые тела: пружины, торсионы и т.д.

Общее определение голономной связи как ограничения, накладываемого на траекторию движения точки или системы n точек, предложенное Р. Курантом, заключается в приписывании системе в направлении действия связи бесконечно большой потенциальной энергии [2]. В более ранней работе [3] В.И. Арнольдом и др. рассмотрены различные способы реализации голономных связей в направлении движения, осуществляемые при определенных начальных условиях. Одним из результатов наложения таких стационарных конечных удерживающих связей является уменьшение числа степеней свободы системы.

Мгновенное ужесточение упругого элемента в качестве способа реализации склерономной голономной связи [3] можно трактовать как заключение этого элемента в абсолютно жесткую оболочку. Наложение голономных реономных связей в параметрических системах [4, 5] или в системах с переменными параметрами [6] можно рассматривать как заключение в такую оболочку части элементов, создающих позиционные силы. Число степеней свободы в таких системах сохраняется.

Независимо от глубины пульсации жесткости при анализе таких систем не учитывается возникающий при этом энерго- и массоперенос между частями элементов и периодическое смещение состояния равновесия. Изменение жесткостей обеих частей за счет этого смещения в известных работах по параметрическим колебаниям [4, 5, 7, 8] не рассматривается. Поэтому изменение жесткости в функции времени имеет симметричный относительно среднего значения вид. При этом необратимые процессы, такие, как внутреннее трение в материале пружины или смешивание газов в пневмоэлементе и их интенсификация не учитываются. Влияние внутреннего трения на эффективность демпфирования в системе с перескоком рассмотрено в [9].

Постановка задачи

По аналогии с терминологией, принятой в электротехнике, достаточно быструю по сравнению с периодом колебаний операцию наложения-снятия реономной связи на часть упругого элемента в определенных фазовых состояниях системы, обеспечивающую повышение уровня диссипации энергии, можно назвать дискретной коммутацией (ДК) частей элементов. Кратковременное соединение-разъединение частей пневмоэлемента, выполняемое посредством клапанов в амплитудных положениях объекта защиты [10], также может рассматриваться как наложение-снятие реономной связи на одну из его частей. Эта операция осуществляется над частью элемента, поэтому уменьшения числа степеней свободы, как и в случае параметрических систем, при этом не происходит.

Энерго- и массоперенос, сопровождающий дискретную коммутацию частей упругого элемента, приводит к смещению состояния статического равновесия, периодическое скачкообразное изменение которого обеспечивает интенсификацию внутренних необратимых процессов.

При использовании в качестве рабочего тела газа в моменты дискретной коммутации любое сколь угодно малое его количество может быть перенесено из любой области деформируемой части 2 в аккумулирующую 3 и наоборот (рис. 1, а), в то время как элементы из твердых тел допускают перенос некоторой ограниченной области обеих частей (рис. 1, б).

Несмотря на различие, обусловленное физическими свойствами рабочих тел двух рассматриваемых типов упругих элементов, явление массопереноса между частями в изотермическом процессе описывается одинаково. Для этого оба типа СА с ДК частей упругих элементов, показанных на рис. 1, заменяются обобщенной моделью (рис. 3), на которой накладываемая реономная связь представляется жесткой оболочкой 4 и жестким съемным диском 1 (рис. 3, в), заменяющим коммутаторы 1 на рис. 1.

В состоянии статического равновесия безразмерная суммарная масса рабочего тела (газа или твердого деформируемого тела) $M_\Sigma = M_{1,0}+M_{2,0}=1+\mu$ распределяется между частями в некотором отношении $\mu = M_{2,0}/M_{1,0} = l_2/l_{1,0}$. Для схемы с пневмоэлементом (см. рис. 1, а) приведенная длина столба газа деформируемой части находится по выражению $l_{1,0}=V_{1,0}/S_e|_{q_r=0}$ ($q_r=q-y$ – обобщенная относительная координата).

Это, а также произвольное распределение массы рабочего тела между частями при периодических колебаниях осуществляется путем наложения связи – установки диска 1 и его жесткого соединения с оболочкой 4 всегда в одном и том же положении объекта (на прямой ab на рис. 3). Если в качестве рабочего тела в обобщенной модели рассматривается газ, то для демонстрации массопереноса между частями в состоянии статического равновесия устанавливается тонкий безмассовый поршень 5. Если деформируемое тело твердое, то роль непроницаемой оболочки 4 может выполнить набор стержней, а поршня 5 – некоторая метка, указывающая на разделение элемента на части в состоянии статического равновесия в отношении μ и отмечающая его периодическое смещение при колебаниях.

В нижнем и верхнем амплитудных состояниях объекта связь освобождается (удаляется диск 1), происходит смещение поршня (или метки) 5 вниз или вверх (по стрелке A или B), после чего связь опять накладывается (рис. 3, в или 3, е). При этом массы рабочего тела обеих частей на ходах нагружения и разгрузки непосредственно после коммутации различны и не равны своим значениям в состоянии статического равновесия, т.е. $M_1^l \neq M_1^u \neq M_{1,0}$ и $M_2^l \neq M_2^u \neq M_{2,0}$ (рис. 3).

Как и в системе с дискретной коммутацией частей пневмоэлемента с клапаном-коммутатором [10] процессы выравнивания сил в этой модели являются типично необратимыми и, соответственно, сопровождаются производством энтропии за счет внутренних источников [11].

Для схемы с пневмоэлементом (см. рис. 1, а) распределение массы газа между деформируемой и аккумулирующей частями, происходящее в моменты коммутации в случае течения газа через клапан-коммутатор [10], ничем не будет отличаться от ее распределения в модели на рис. 3. Это обстоятельство явля-

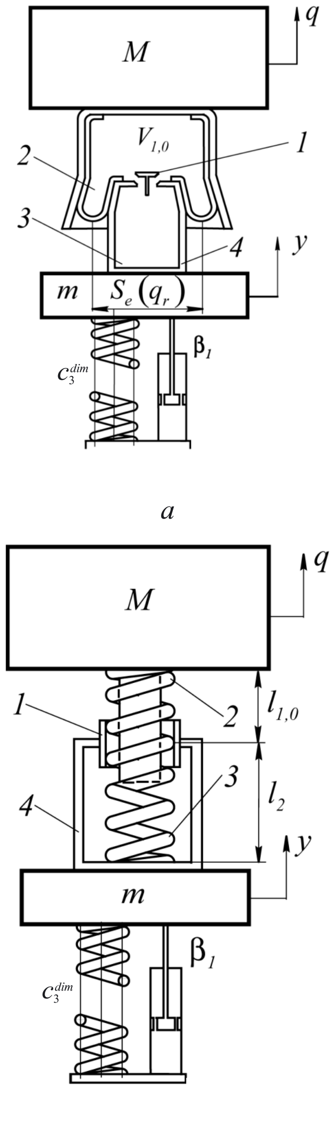


Рис. 1. Схемы систем амортизации с дискретной коммутацией частей элементов: а – с пневмоэлементом; б – с элементом из твердых деформируемых тел: 1 – коммутатор, 2 – деформируемая часть, 3 – аккумулирующая часть, 4 – жесткая оболочка

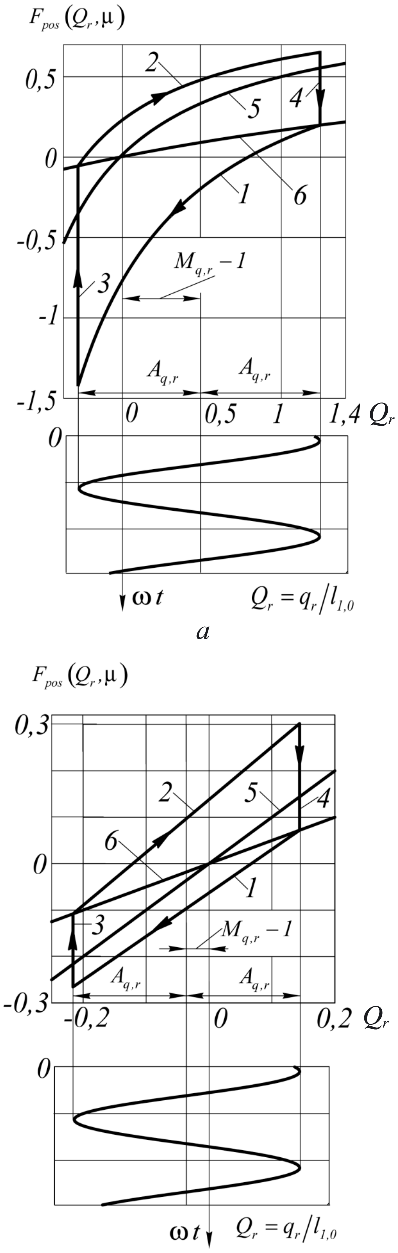


Рис. 2. Характеристики позиционной силы части 2: а – пневмоэлемента; б – элемента из твердых деформируемых тел. 1, 2 – линии нагружения и разгрузки; 3 и 4 – вертикали коммутации частей; 5 и 6 – характеристика восстанавливающей силы соответственно только деформируемой части и обеих частей в моменты коммутации.

ется объединяющим оба типа СА с ДК частей упругих элементов, позволяющим построить общую теорию, несмотря на различные для них уравнения состояния. Если в качестве рабочего тела в схеме на рис. 3 принять газ, то им будет уравнение Клапейрона-Менделеева, а если твердое деформируемое тело с равномерным распределением массы по длине независимо от конструктивного исполнения, то – закон Гука. В обоих случаях характеристика позиционной силы является неоднозначной: в первом случае кусочно-нелинейной (см. рис. 2, а), а во втором кусочно-линейной (см. рис. 2, б).

На основе предложенной обобщенной модели СА с ДК частей в работе рассматривается задача обеспечения гиперболического типа частотной зависимости коэффициента относительного за-

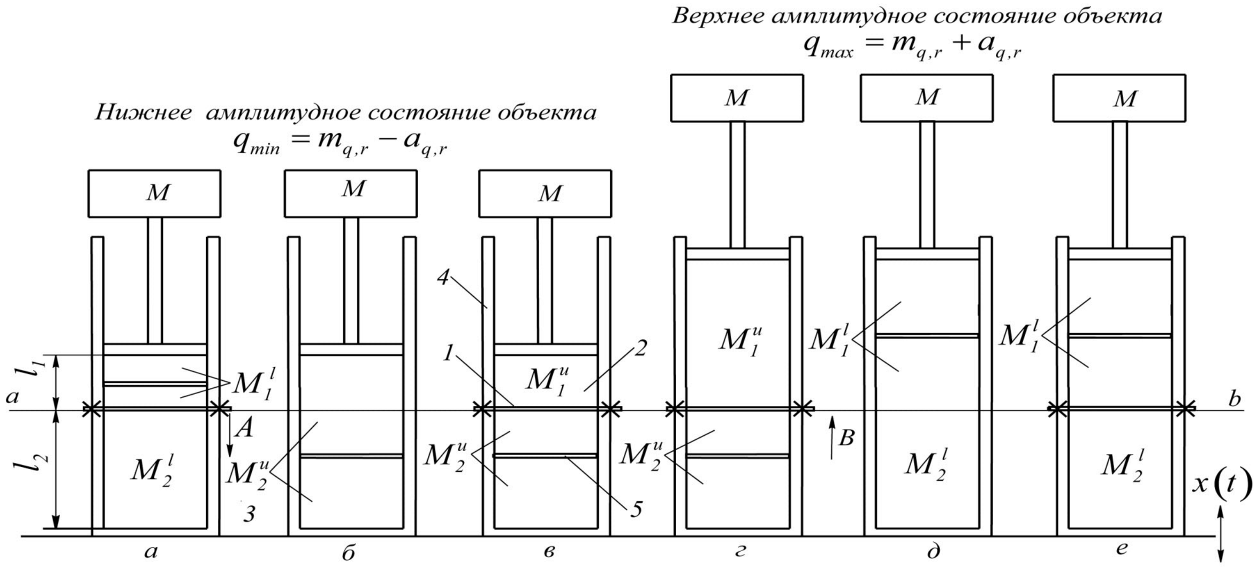


Рис. 3. Обобщенная динамическая модель СА с ДК частей упругих элементов

тухания с достижением им в резонансе значений, близких к предельным для этого класса систем.

Смещение состояния равновесия объекта

Изменение массы деформируемой части M_1, происходящее в моменты ее коммутации с аккумулирующей частью (рис. 3), описывается следующим образом:

$$M_1 = \frac{M_1^1 + M_1^u}{2} + \eta \frac{M_1^1 - M_1^u}{2}, \qquad (1)$$

где M_1^l и M_1^u – массы этой части при ее нагружении и разгрузке; η – функция Хевисайда, принимающая значение $+1$ на отрезке фазы колебаний $\psi_1 = [0, \pi]$ и -1 на отрезке $\psi_2 = [\pi, 2\pi]$.

Приближенное периодическое решение системы уравнений по координате q_r с учетом резонансных и фильтрующих свойств системы и несимметричности процесса колебаний записывается в виде [12]

$$q_r = m_{q,r} + a_{q,r} \cos \omega t , \qquad (2)$$

где $m_{q,r}$ – смещение центра колебаний; $a_{q,r}$ – амплитуда; ω – частота возмущения.

С использованием обозначений $M_{q,r}$=1+$m_{q,r}/l_{1,0}$, $A_{q,1} = a_{q,r}/l_{1,0}$ отношение масс частей в моменты коммутации принимает вид

$$\mu_c = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\mu}{M_{q,r} + \eta A_{q,r}} .$$

Распределяя массу элемента между его частями в соответствии с μ_c, после некоторых преобразований (1) получим

$$M_1 = \frac{\mu + 1}{\left(\mu + M_{q,r}\right)^2 - A_{q,r}^2} \times$$

$$\times \left[M_{q,r} \left(\mu + M_{q,r}\right) - A_{q,r} \left(A_{q,r} - \eta\mu\right) \right]. \qquad (3)$$

В этом выражении для массы деформируемой части можно выделить среднюю массу постоянного положительного знака

$$M_1^{av} = \frac{\mu + 1}{\left(\mu + M_{q,r}\right)^2 - A_{q,r}^2} \left[M_{q,r} \left(\mu + M_{q,r}\right) - A_{q,r}^2 \right]$$

и переносимую массу, знак которой определяется знаком функции Хевисайда

$$\Delta M_1 = \frac{\mu(\mu + 1) A_{q,r}}{\left(\mu + M_{q,r}\right)^2 - A_{q,r}^2} . \qquad (4)$$

После некоторых преобразований выражение (3) принимает вид

$$M_1 = (\mu + 1) \frac{M_{q,r} + \eta A_{q,r}}{\mu + M_{q,r} + \eta A_{q,r}} . \qquad (5)$$

Масса аккумулирующей части находится как разность

$$M_2 = M_\Sigma - M_1 = \frac{\mu(\mu + 1)}{\mu + M_{q,r} + \eta A_{q,r}} . \qquad (6)$$

В выражениях (5) и (6) могут быть выделены средние значения

$$M_1^{av} = \frac{\Delta M_1}{\mu} \left[\frac{M_{q,r} \left(\mu + M_{q,r}\right)}{A_{q,r}} - A_{q,r} \right], \qquad (7а)$$

$$M_2^{av} = \Delta M_1 \cdot \frac{\left(\mu + M_{q,r}\right)}{A_{q,r}} . \qquad (7б)$$

Зависимость средних масс обеих частей M_1^{av}, M_2^{av} от переносимой массы ΔM_1 придает системе в моменты коммутации неконсервативные свойства.

Сумма средних масс обеих частей элементов (7а, б) с учетом закона сохранения массы при коммутации $\Delta M_2 = -\Delta M_1$ равна суммарной массе обеих частей элементов $M_\Sigma = \mu + 1$ независимо от их типа.

Скачкообразное изменение массы деформируемой части при колебаниях неавтономной СА с ДК частей создает периодическое смещение состояния равновесия $\Delta L_1 = M_1 - 1 \equiv M_1^{av} + \eta \Delta M_1 - 1$. Безразмерная величина этого смещения, пропорциональная изменению массы этой части и различная при нагружении и разгрузке упругого элемента, может быть найдена с использованием (5) как

$$\Delta L_1 = \frac{\Delta l_1}{l_{1,0}} = M_1 - 1 = \mu \frac{M_{q,r} - 1 + \eta A_{q,r}}{\mu + M_{q,r} + \eta A_{q,r}}. \quad (8)$$

Аналогично можно найти дважды скачкообразно меняющуюся на периоде величину $\Delta L_2 \equiv \Delta l_2 / l_2 = M_2 - \mu \equiv -\Delta L_1$.

Среднее значение смещения состояния статического равновесия объекта (8) определяется средней массой деформируемой части (7*a*):

$$\Delta L_1^{av} = \frac{\Delta L_1^l + \Delta L_1^u}{2} =$$

$$= \mu \frac{\left(M_{q,r} - 1\right)\left(\mu + M_{q,r}\right) - A_{q,r}^2}{\left(M_{q,r} + \mu\right)^2 - A_{q,r}^2} = M_1^{av} - 1.$$

Амплитудное значение смещения состояния статического равновесия объекта равно переносимой между частями массе (4):

$$\Delta L_1^a = \frac{\Delta L_1^l - \Delta L_1^u}{2} = \frac{\mu(\mu + 1) A_{q,r}}{\left(M_{q,r} + \mu\right)^2 - A_{q,r}^2} \equiv \Delta M_1.$$

Средние и амплитудные величины смещений состояния статического равновесия в обеих частях равны друг другу по модулю, но противоположны по знаку

$$\left|\Delta L_2^{av}\right| = \left|-\Delta L_1^{av}\right| \text{ и } \left|\Delta L_2^a\right| = \left|-\Delta L_1^a\right|.$$

В аккумулирующей части средняя и накладывающаяся на нее амплитудная компоненты смещения приводят к возникновению дополнительных усилий, величина которых зависит от типа уравнения состояния рабочего тела упругого элемента и конструктивного исполнения СА.

Эквивалентная линеаризация характеристики позиционной силы

При одной и той же амплитуде $A_{q,r}$ с изменением отношения масс элементов μ будет изменяться смещение центра колебаний $M_{q,r}$ (см. рис. 2). Вместе с этим, в соответствии с (8) будет изменяться смещение состояния статического равновесия ΔL_1, а значит, и характеристика неконсервативной позиционной силы $F_1(Q_r, \mu)$. Величина ΔL_1 равна такому значению обобщенной координаты Q_r, при которой $F_1(Q_r, \mu) = 0$ (см. рис. 2). Для обоих типов упругих элементов (рис. 3) позиционная сила в моменты прохождения состояния статического равновесия $F_1(Q_r, \mu)\big|_{Q_r = 0}$ прямо пропорциональна смещению ΔL_1.

Если в качестве упругого элемента в модели на рис. 3 рассматривается твердое деформируемое тело, то выражение для этой силы записывается в виде

$$F_1(Q_r, \mu) = c_1 \left(Q_r - \Delta L_1\right), \quad (9)$$

где $c_1 = c_1^{dim} / c_{1,0}^{dim}$ – безразмерная жесткость деформируемой части; $c_{1,0}^{dim}$ – размерная жесткость этой части в состоянии статического равновесия.

Аналогичное (9) выражение для кусочно-нелинейной характеристики системы на рис. 3 в общем виде можно записать как

$$F_1(Q_r, \mu) = F_r'(Q_r)\left(Q_r - \Delta L_1\right), \quad (10)$$

где функция $F_r'(Q_r)$ определяется характеристикой восстанавливающей силы только деформируемой части пневмоэлемента.

Подставляя обобщенную координату $Q_r = M_{q,r} - 1 + A_{q,r}\cos\psi$ в выражения (9) и (10), получим некоторые периодические функции:

$$F_1(\psi, \mu) = c_1 \left(M_{q,r} - 1 + A_{q,r}\cos\psi - \Delta L_1\right), \quad (11)$$

$$F_1(\psi, \mu) = F_r'\left(M_{q,r} - 1 + A_{q,r}\cos\psi\right) \times$$
$$\times \left(M_{q,r} - 1 + A_{q,r}\cos\psi - \Delta L_1\right), \quad (12)$$

которые в силу несимметрии и неоднозначности характеристик (см. рис. 2) не будут иметь свойств центральной или осевой симметрии.

Заменим формулы для позиционной силы в функции фазы $F_1(\psi, \mu)$ (11), (12) для обоих типов упругих элементов (см. рис. 1) линеаризованным выражением

$$F_1(\psi, \mu) = M_{F,1} + A_{F,1}^c \cos\psi - A_{F,1}^s \sin\psi, \quad (13)$$

где $M_{F,1}$, $A_{F,1}^c$, $A_{F,1}^s$ – некоторые безразмерные коэффициенты, вычисление которых для обоих типов характеристики выполняется по формулам гармонической линеаризации [12] путем подстановки в них (11), (12):

$$M_{F,1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\psi)d\psi, \tag{14а}$$

$$A^c_{F,1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\psi)\cos\psi d\psi, \tag{14б}$$

$$A^s_{F,1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\psi)\sin\psi d\psi. \tag{14в}$$

Выражение (14а) описывает постоянную составляющую позиционной силы, (14б) – амплитуду ее потенциальной составляющей, а (14в) – амплитуду диссипативной составляющей этой силы в функции неизвестных параметров решения $A_{q,r}$, $M_{q,r}$ и отношения масс μ.

В результате интегрирования в выражениях для коэффициентов $M_{F,1}$, $A^c_{F,1}$, $A^s_{F,1}$ функция Хевисайда исчезает. Это означает, в частности, что неоднозначные характеристики позиционной силы (9), (10) (см. рис. 2) с помощью метода гармонической линеаризации превращаются в однозначные характеристики восстанавливающей силы – множества (семейства) прямых линий, на которые накладываются эллиптические петли гистерезиса.

В силу того, что функции (11), (12) не имеют ни осевой, ни центральной симметрии, элементы этого множества смещены относительно начала координат вдоль оси абсцисс – обобщенной координаты Q_r. Тангенс угла наклона каждой из прямых этого множества – эквивалентную, или динамическую жесткость – можно получить по выражению

$$c_{eq}\left(A_{q,r}\right) = A^c_{F,1}\big/A_{q,r}. \tag{15}$$

Неравенство нулю третьего коэффициента $A^s_{F,1}$ также обусловлено несимметрией и неоднозначностью характеристик (9), (10). В этом случае все коэффициенты ряда Фурье отличны от нуля [13].

С использованием частоты свободных колебаний $\omega_{fr}\left(A_{q,r}\right)$ собственное время системы и безразмерная частота возмущения вводятся как

$$\tau = \omega_{fr}\left(A_{q,r}\right)t, \tag{16а}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_{fr}\left(A_{q,rel}\right)} = \frac{\omega}{\omega_{nat}\sqrt{c_{eq}\left(A_{q,r}\right)}} = \frac{\omega}{\omega_{nat}\nu\left(A_{q,r}\right)}, \tag{16б}$$

где ω_{nat} – собственная, а $\nu\left(A_{q,r}\right)$ – безразмерная частота свободных колебаний.

Теперь эквивалентный коэффициент сопротивления записывается в виде

$$\beta_{eq}\left(A_{q,r}\right) = \frac{A^s_{F,1}}{\nu\left(A_{q,r}\right)\eta A_{q,r}}. \tag{17}$$

Вводя обозначения $A^c_{F,1} \equiv A_{F,1}\cos\delta$ и $A^s_{F,1} \equiv A_{F,1}\sin\delta$, перепишем линеаризованное выражение для позиционной силы (13) в виде

$$F_1(\psi) = M_{F,1} + A_{F,1}\cos(\psi+\delta). \tag{18}$$

Амплитуда первой гармоники позиционной силы $A_{F,1}$ и тангенс угла механических потерь δ [14] находятся по выражениям

$$A_{F,1} = \sqrt{\left(A^c_{F,1}\right)^2 + \left(A^s_{F,1}\right)^2}, \tag{19а}$$

$$tg\delta = A^s_{F,1}\big/A^c_{F,1}. \tag{19б}$$

Проинтегрировав элементарную мощность

$$dN = -A^s_{F,1}\sin\psi\, Q'_r d\tau,\ Q' = dQ/d\tau,$$

получим для обоих типов СА с ДК их частей выражение для количества энергии, рассеиваемой диссипативной силой $-A^s_{F,1}\sin\psi$ за период

$$\Delta W = -2\int_0^{\pi} A^s_{F,1}\sin\psi\left(-A_{q,r}\eta\sin\psi\right)\frac{d\psi}{\eta} = \pi A^s_{F,1}A_{q,r}. \tag{20}$$

С другой стороны, площадь петли гистерезиса, образованной кривыми нагружения, разгрузки и вертикальными прямыми коммутации частей (см. рис. 2), пропорциональна этому количеству энергии, затрачиваемому на ограничение амплитуды колебаний

$$\Delta W = W_u - W_l, \tag{21}$$

где W_l, W_u – работа позиционной силы на ходах нагружения и разгрузки.

Формулы для этих работ могут быть найдены путем интегрирования выражения для элементарной работы $dW = F_1\left(Q_r,\mu\right)dQ_r$ в пределах изменения безразмерной обобщенной координаты $M_{q,r} - 1 - A_{q,r} \le Q_r \le M_{q,rel} - 1 + A_{q,r}$. Подставляя в него выражения для позиционной силы (9), (10) при нагружении $(\eta = +1)$ и разгрузке деформируемой части $(\eta = -1)$ и интегрируя $W_{l,u} = \int_{M_{q,r}-1-A_{q,r}}^{M_{q,r}-1+A_{q,r}} F_1\left(Q_r,\mu\right)dQ_r$, найдем по (21) выражение для количества рассеянной за период вынужденных колебаний энергии, которое должно совпадать с (20).

Возникновение и существование неконсервативности системы только в моменты коммутации означает, что энергия, расходуемая на ограничение амплитуды колебаний, должна быть пропорциональна переносимой массе

ΔM_1 (4) и выражение для ее количества может быть преобразовано к виду

$$\Delta W = \Delta M_1 \cdot f\left(M_{q,r}, A_{q,r}, \mu\right), \qquad (22)$$

где $f\left(M_{q,r}, A_{q,r}, \mu\right)$ – некоторая функция, зависящая от типа элемента.

Для аналитического подтверждения совпадения выражений (20) и (21) для рассеянной энергии, прямой пропорциональности их перенесенной массе (22) требуется знание жесткости c_1 в (9) и функции $F_r'(Q)$ в (10).

Выражение для количества рассеиваемой за один период энергии в линейной системе для системы с одной степенью свободы [4] преобразуем для линеаризованной СА с ДК частей упругих элементов независимо от ее типа к виду

$$\Delta W_{eq}^{\ln r} = 2\pi\psi\left(A_{q,r}\right)A_{q,r}^2\eta c_{eq}\left(A_{q,r}\right), \qquad (23)$$

пронормированному к величине $c_{1,0}^{dim} l_{1,0}^2$. Здесь введен коэффициент относительного затухания

$$\psi\left(A_{q,r}\right) = \frac{\beta_{eq}^{\dim}\left(A_{q,r}\right)}{2M\omega_{fr}\left(A_{q,r}\right)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\beta_{eq}^{\dim}\left(A_{q,r}\right)}{2M\omega_{nat}\sqrt{c_{eq}\left(A_{q,r}\right)}}, \qquad (24)$$

где η – частота возмущения (16б).

Размерный эквивалентный коэффициент сопротивления $\beta_{eq}^{\dim}\left(A_{q,r}\right)$ связан с безразмерным $\beta_{eq}(A_{q,r})$ (17) соотношением

$$\beta_{eq}^{\dim}\left(A_{q,r}\right) = \beta_{eq}\left(A_{q,r}\right)\sqrt{c_{1,0}M}\,. \qquad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получим для коэффициента относительного затухания следующее выражение:

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{\beta_{eq}\left(A_{q,r}\right)}{2\sqrt{c_{eq}\left(A_{q,r}\right)}} = \frac{A_{F,1}^s}{2\eta A_{q,r}c_{eq}\left(A_{q,r}\right)}. \qquad (26)$$

Умножив (26) на 2η, получим (19б) – тангенс угла механических потерь δ:

$$\alpha = A_{F,1}^s \big/ A_{F,1}^c \equiv 2\psi\eta = tg\,\delta. \qquad (27)$$

Выражение (27) входит во все АЧХ и ФЧХ, а его частотная зависимость играет решающую роль в построении методики выбора параметров СА с ДК частей независимо от их типа.

Приравнивая в соответствии с принципом энергетического баланса [12] количество энергии, рассеянной в СА с ДК частей (20) или (21), к количеству энергии, рассеянной в линеаризованной системе (23), получим для коэффициента относительного затухания выражение (26).

Линеаризованные уравнения движения СА с ДК частей упругих элементов

Для анализа систем с одной степенью свободы уравнения движения массы M для обоих типов неоднозначных кусочных СА с ДК частей (рис. 3):

$$a\ddot{Q} + c_{1,0}^{dim}F_r'\left(Q_r\right)\left(Q_r - \Delta L_1\right) = 0,$$

$$a\ddot{Q} + c_{1,0}^{dim}c_1\left(Q_r - \Delta L_1\right) = 0$$

перепишем в безразмерном виде.

Заменяя в этом уравнении неконсервативную позиционную силу ее гармонически линеаризованной аппроксимацией (13), получим

$$a\ddot{Q} + c_{1,0}^{dim}\left(M_{F,1} + A_{F,1}^c\cos\psi - A_{F,1}^s\sin\psi\right) = 0\,. \qquad (28)$$

Отделяя в этом уравнении (коэффициенты которого определяются по (14а, 14б, 14в)) постоянную составляющую $M_{F,1}$, получим уравнение поверхности связи неизвестных параметров решения $A_{q,r}$, $M_{q,r}$ и отношения масс частей μ:

$$M_{F,1}\left(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu\right) = 0\,. \qquad (29)$$

Приравнивая нулю центрированные составляющие в (28), получим уравнение движения массы M:

$$a\ddot{Q}^* + c_{1,0}^{dim}\left(A_{F,1}^c\cos\psi - A_{F,1}^s\sin\psi\right) = 0\,,$$

где центрированная составляющая координаты определяется как

$$Q_r^* = \frac{q_r^*}{l_{1,0}} = \frac{q_r - m_{q,r}}{l_{1,0}} =$$

$$= Q_r - \left(M_{q,r} - 1\right) = A_{q,r}\cos\psi\,. \qquad (30)$$

Умножив и разделив потенциальную составляющую позиционной силы на амплитуду относительного перемещения $A_{q,r}$, а ее диссипативную составляющую – на амплитуду относительной скорости $A_{q,r}\eta\nu\left(A_{q,r}\right)\omega_{nat}$, получим уравнение

$$a\ddot{Q} + c_{1,0}^{dim}\left(\frac{A_{F,1}^c}{A_{q,r}}A_{q,r}\cos\psi - \frac{A_{F,1}^s}{A_{q,r}\eta\nu\left(A_{q,r}\right)\omega_{nat}}A_{q,r}\,\eta\nu\left(A_{q,r}\right)\omega_{nat}\sin\psi\right) = 0\,. \qquad (31)$$

С учетом выражений: (30) – для центрированной составляющей приближенного периодического решения (2); (15) и (17) – для эквивалентных коэффициентов динамической жесткости и коэффициента сопротивления, уравнение движения (31) переписывается в виде

$$a\ddot{Q}_r^* + c_{1,0}^{dim}\left[\frac{\beta_{eq}\left(A_{q,r}\right)}{\omega_{nat}}\dot{Q}_r^* + c_{eq}\left(A_{q,r}\right)Q_r^*\right] = -a\ddot{Y}\ . \quad (32)$$

С использованием (16а) производные, входящие в (32), записываются в виде

$$\dot{Q}_r^* = \omega_{nat}\nu\left(A_{q,r}\right)Q_r^{*\prime},$$
$$\ddot{Q}_r^* = \omega_{nat}^2\nu^2\left(A_{q,r}\right)Q_r^{*\prime\prime},$$
$$\ddot{Y} = \omega_{nat}^2\nu^2\left(A_{q,r}\right)Y''.$$

Подстановка их в (32) дает уравнение

$$Q_r^{*\prime\prime} + 2\psi\left(A_{q,r}\right)Q_r^{*\prime} + Q_r = -Y'',$$

где коэффициент $\psi\left(A_{q,r}\right)$ определяется по формуле (26).

Уравнения движения СА с ДК частей связи с двумя степенями свободы (рис. 1) можно записать только в размерном виде

$$M\,\ddot{q}_r^* + \beta_{eq}^{dim}\dot{q}_r^* + c_{1,0}^{dim}c_{eq}q_r^* = -M\ddot{y}\ ,$$
$$m\ddot{y} - \beta_{eq}^{dim}\dot{q}_{rel}^* - c_{1,0}^{dim}c_{eq}q_r^* + \beta_1(\dot{y}-\dot{x}) + c_3^{dim}(y-x) = 0.$$

Зависимость эквивалентных коэффициентов от параметров $A_{q,r}$, $M_{q,r}$, μ придает амплитудным, фазовым и энергетическим частотным характеристикам свойства, которые в значительной мере отличают их от характеристик линейных систем. Кроме того, за счет прекращения коммутации частей имеется возможность изменения вида этих характеристик в зависимости от частотного состава спектра возмущения с целью улучшения эксплуатационных характеристик, например, плавности хода многоосных автомобилей.

Некоторые результаты и выводы

Принимая, что в качестве рабочего тела в схеме на рис. 3 используется газ с уравнением состояния $p_1 = M_1/(1+Q_r)$, и учитывая (5) и (8), получим

$$F_1\left(Q_r,\mu\right) = \frac{1}{1+Q_r}\left(Q_r - \Delta L_1\right).$$

Подставляя (12) в выражения (14а), (14б), (14в) с учетом того, что $F_r'(Q_r) = 1/(1+Q_r)$, найдем

$$M_{F,1} = 1 - \frac{(\mu+1)\left(M_{q,r}\mu + M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2\right)}{\left[\left(\mu+M_{q,r}\right)^2 - A_{q,r}^2\right]\sqrt{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}}, \quad (33)$$

$$A_{F,1}^c = 2\left(1 - M_{F,1}\right)\frac{M_{q,r} - \sqrt{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}}{A_{q,r}},$$

$$A_{F,1}^s = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu(\mu+1)\ln\left(\dfrac{M_{q,r}+A_{q,r}}{M_{q,r}-A_{q,r}}\right)}{\left(\mu+M_{q,r}\right)^2 - A_{q,r}^2}.$$

Если в качестве рабочего тела в схеме на рис. 3 используются твердые деформируемые тела, например, пружины, то жесткости частей и элемента в целом по закону Гука и с учетом (8) могут быть получены как

$$c_1 = \frac{1}{1+\Delta L_1} = \frac{1}{\mu+1}\left(1 + \frac{\mu}{M_{q,r} + \eta A_{q,r}}\right),$$

$$c_2 = \frac{1}{\mu - \Delta L_1} = \frac{1}{\mu+1}\left(1 + \frac{M_{q,r} + \eta A_{q,r}}{\mu}\right).$$

Коэффициенты гармонической линеаризации (11) найдутся по выражениям

$$M_{F,1} = \frac{1}{\mu+1}\left(M_{q,rel} - 1 + \frac{\mu A_{q,r}^2}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}\right), \quad (34)$$

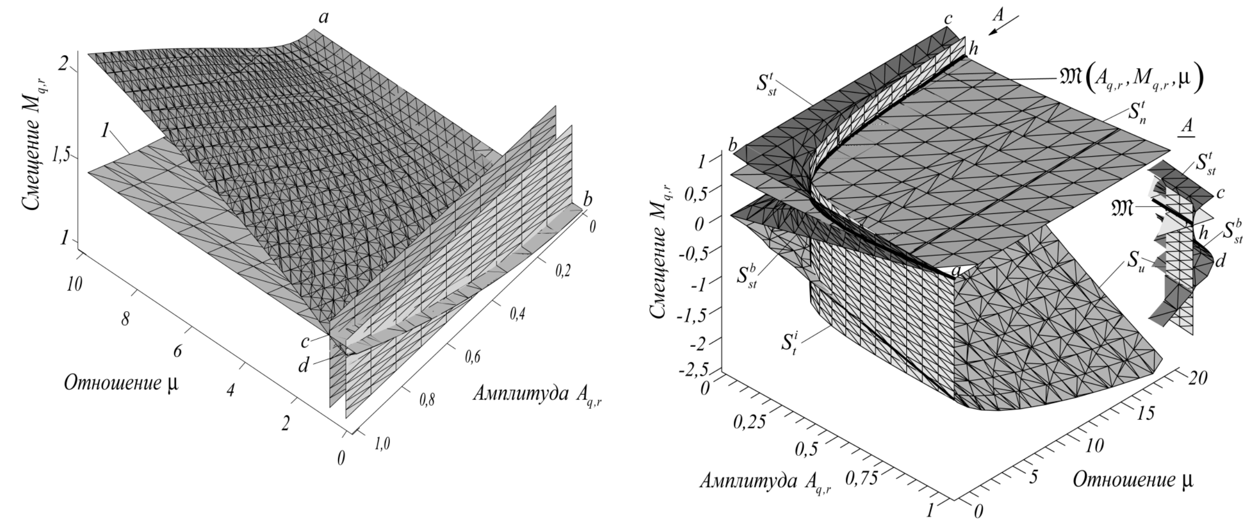
$$A_{F,1}^c = \frac{A_{q,r}}{\mu+1}\left(1 + \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}\right),$$

$$A_{F,1}^s = \frac{4}{\pi}\frac{A_{q,r}}{\mu+1}\frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}.$$

Особенностью поверхности связи (29) для пневмоэлемента с ДК его частей является наличие у любого ее сечения плоскостью $A_{q,r}$= const вблизи значений $\mu = 0,4$ минимума и точки перегиба при μ=4. При отношении масс частей $\mu = 1$ смещение $M_{q,r}$ равно его значению при отношении $\mu = 0$.

На поверхности связи (29) для твердых деформируемых тел одна и та же амплитуда может устанавливаться при трех различных значениях смещения (см. рис. 4, б). Горизонтальная прямая ab, на которой $M_{q,r} = 1$ при $\mu = 0$, соответствует линейной консервативной системе. В состоянии равновесия (горизонтальная прямая bc) смещение также равно нулю, т.е. $M_{q,rel} = 1$ при любом μ.

Поверхность устойчивых решений уравнения движения S_{st} ограничена снизу прямыми $\left(M_{q,r} = A_{q,r}, \mu = 0\right)$ и $\left(M_{q,r} = 0,\ A_{q,r} = 0\right)$, а поверхность неустойчивых S_u – прямыми $\left(M_{q,r} = -A_{q,r};\ \mu = 0\right)$ и той же прямой $\left(M_{q,r} = 0,\ A_{q,r} = 0\right)$. Кроме того, на устойчивой части поверхности связи S_{st} су-



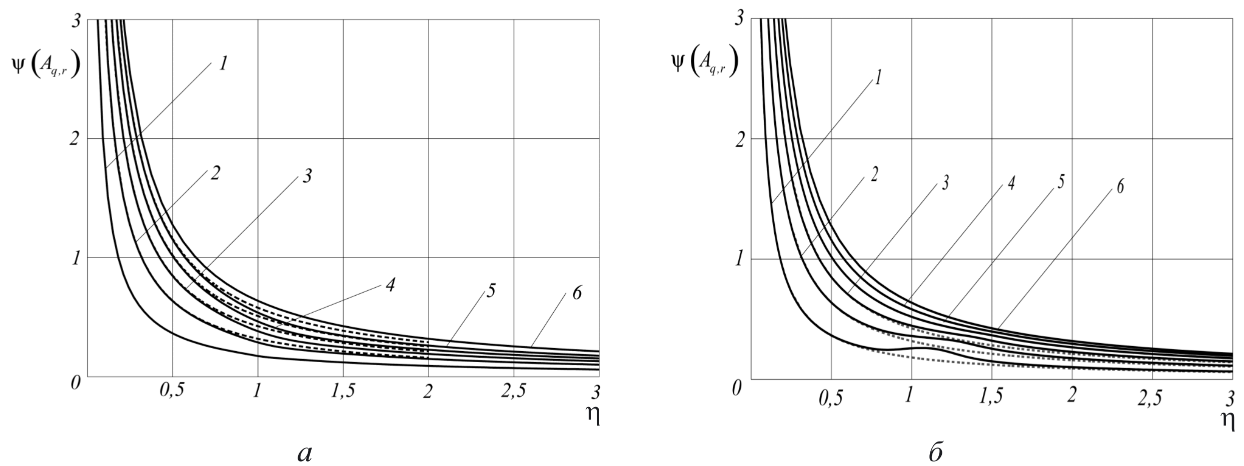
а б

Рис. 4. Поверхности связи параметров решения $A_{q,r}$, $M_{q,r}$ и отношения масс μ для системы с ДК частей на рис. 3: а – для системы с пневмоэлементом, 1 – поверхность одной деформируемой части; б – для системы с твердым деформируемым элементом

ществует кривая $\mathfrak{M}$, на которой производная от смещения по амплитуде меняет знак (рис. 4, б) и которая разделяет S_{st} на верхнюю S^t_{st} и нижнюю S^b_{st} части. Эта кривая есть результат пересечения внутренней касательной S^i_t и верхней нормальной S^t_n плоскостей, и ее наличие должно обнаружиться во всех динамических характеристиках, включая частотные. Параметризация этой кривой значительно облегчает совместное численное и аналитическое решение уравнений поверхности связи (29) и уравнений частотных характеристик.

В соответствии с (26) получим выражение для частотных характеристик коэффициента относительного затухания (рис. 5, а), если в схеме на рис. 3 рассматривается пневмоэлемент:

$$\psi\left(A_{q,r}\right)=\frac{\mu(\mu+1)A_{q,r}}{2\pi\eta\left[\left(\mu+M_{q,r}\right)^2-A^2_{q,r}\right]\left(M_{q,r}-\sqrt{M^2_{q,r}-A^2_{q,r}}\right)}\ln\frac{M_{q,r}+A_{q,r}}{M_{q,r}-A_{q,r}}. \quad (35)$$



а б

Рис. 5. Частотные характеристики коэффициента отнсительного затухания: а – для СА с ДК частей пневмоэлемента, X_0=0,5; б – для СА с ДК частей твердого деформируемого элемента;

$1 - \mu=0,4$; $2 - \mu=1$; $3 - \mu=2$; $4 - \mu=4$; $5 - \mu=10$; $6 - \mu=\infty$

Если рассматривается твердый деформируемый элемент (рис. 5, б), то

$$\psi\left(A_{q,r}\right)=\frac{2}{\pi\eta}\cdot\frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2+\mu M_{q,r}-A_{q,r}^2}. \qquad (36)$$

Зависимости на рис. 5 построены путем совместного численного решения уравнения для АЧХ относительных перемещений системы на рис. 3, и уравнений поверхности связи (29) с учетом выражений (33) или (34).

Кривая $\mathfrak{M}$ на поверхности связи на рис. 4, б ограничивает амплитуду возмущения $X_0 = x_0/l_{1,0}$, и ее предельные значения зависят от отношения масс μ. Каждый из графиков на рис. 5, б построен именно для этих предельных амплитуд возмущения $X_0^{\lim} \cong$: $1 - 0{,}234$; $2 - 0{,}213$; $3 - 0{,}177$; $4 - 0{,}137$; $5 - 0{,}0918$.

Гиперболический тип частотных зависимостей коэффициента $\psi\left(A_{q,r}\right)$ в обоих случаях обусловлен независимостью количества рассеянной за период энергии (20) от частоты возмущения.

В пределе при $M_{q,r} \to 1$ и $A_{q,r} \to 0$ выражение (35) для поверхности на рис. 4, а и (36) для части поверхности связи S_{st}^t (см. рис. 4, б) принимают вид (штриховые линии на рис. 5):

$$\psi^{\lim}=\frac{2}{\pi\eta}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}. \qquad (37)$$

Для части поверхности S_{st}^b (рис. 4, б) при $M_{q,r} \to 0$ и $A_{q,r} \to 0$ выражение (36) имеет предел $\psi^{\lim} = 2/(\pi\eta)$. Такой же предел имеет и (37) при $\mu \to \infty$ (кривые 6 на рис. 5).

Причиной несущественного расхождения характеристик (рис. 5, а) является весьма большая амплитуда возмущения. С ее уменьшением происходит монотонное снижение этого расхождения. Аналогичные особенности обнаруживаются и в зависимостях на рис. 5, б на предельных амплитудах возмущения. Следует избегать возбуждения системы такими амплитудами, так как в силу разброса ее параметров становится возможным срыв движения на неустойчивую часть поверхности связи S_u. Кроме того, в силу неоднозначности этой поверхности (см. рис. 4, б) движение СА с ДК частей элементов этого типа чувствительно к заданию начальных условий. Если изображающая точка находится на верхней устойчивой части поверхности связи S_{st}^t, то при уменьшении отношения масс μ до нуля происходит гладкая, а если на нижней S_{st}^b, то скачкообразная трансформация системы в линейную.

Введение в рассмотрение периодического смещения состояния статического равновесия позволяет обнаружить несимметрию позиционной силы (11), (12), и тем самым неконсервативные свойства системы. При этом тангенс угла механических потерь (19б) в силу почти гиперболического типа характеристики коэффициента относительного затухания остается практически постоянным.

Заключение

Способ амортизации объектов, основанный на наложении-снятии реономной голономной связи на часть упругих элементов в области амплитудных положений объекта, обеспечивает периодическое смещение его состояния равновесия и тем самым придает системе неконсервативные свойства. Независимость количества рассеянной за период энергии от частоты возмущения в моменты дискретной коммутации частей упругих элементов позволяет получить гиперболический тип характеристики коэффициента относительного затухания. При этом по сравнению с обычным механизмом внутреннего трения в резонансе достигается существенно большее значение этого коэффициента. Слабая зависимость тангенса угла механических потерь от частоты имеет следствием практически постоянство энергетической границы абсолютных колебаний, что предоставляет возможность разработки простой методики выбора параметров для системы с одной степенью свободы в приемлемых для приложений диапазонах отношения масс частей и амплитуд возмущения. Для системы с конечным числом степеней свободы расчет АЧХ и ФЧХ необходимо проводить по обычным формулам линейной теории с определением размерного эквивалентного коэффициента сопротивления из приближенных формул для коэффициента относительного затухания, пренебрегая в них, если это возможно, амплитудной зависимостью частоты свободных колебаний.

Список литературы

1. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 317 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 472 с.
3. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А.

И. Динамические системы – 3 // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3.: Математические аспекты классической и небесной механики / Научн. ред. чл.-кор. АН СССР Гамкрелидзе Р. В. – М.: ВИНИТИ, 1985 – 304 с.
4. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний: Учеб. пособ. для вузов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 256 с.
5. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем / Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
6. Елисеев С. В. Структурная теория виброзащитных систем. – Новосибирск: Наука, 1978. – 224 с.
7. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т.т. Т. 1.: Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
8. Фролов К. В. Уменьшение амплитуды колебаний резонансных систем путем управляемого изменения параметров // Машиноведение. 1965. № 3. С. 38–43.
9. Бужинский В. А. Об использовании эффекта хлопающей мембраны для ограничения динамических нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 44–49.
10. Калашников Б. А. Динамика модели автомобиля с упруго-демпфирующими пневмоэлементами // Изв. вузов.: Машиностроение. 1985. № 6. С. 69–73.
11. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: Учеб. пособ. – 3 изд., стереотипное. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2001. – 608 с.
12. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем (приближенные методы). – М.: Наука, 1978. – 352 с.
13. Толстов Г. П. Ряды Фурье. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
14. Беляковский Н. Г. Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах. – Л.: Судостроение, 1965. – 523 с.