

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОХЛАЖДЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО СПЛОШНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

А.М. Липанов, С.С. Макаров

Рассмотрено построение математической модели охлаждения сплошного металлического цилиндра для исследования нестационарного теплообмена высокотемпературных металлических тел в охлаждающей среде. Приведены математическая модель и алгоритм численного решения задачи, а также результаты расчетов параметров теплообмена цилиндра и окружающей среды в зависимости от геометрии, теплофизических свойств и времени процесса. Проведена верификация численного решения задачи.

Ключевые слова: математическая модель, охлаждение, цилиндр, параметры теплообмена, численный расчет.

Введение

Одной из задач, представляющих не только теоретический интерес, связанный с математическим моделированием, численным решением и анализом результатов, но и практический (например, использование в технологических операциях упрочнения металлических заготовок), является задача определения температуры и скорости охлаждения заготовок цилиндрической формы. Исследования в этом направлении проводили Н.В. Зимин, Г.Ф. Головин, Д.В. Будрин, М.В. Кондратов, Г.Н. Хейфец, А.С. Кадинова, Ю.Г. Эйсмوند и др. Полученные результаты исследований позволили сформировать общую картину процесса охлаждения металлических заготовок при термообработке.

Однако практически во всех рассмотренных работах приводятся только частные решения и обобщения в узком диапазоне режимных параметров охлаждения при типовом наборе свойств материала заготовки и охлаждающих сред. В связи с этим необходимость в научных исследованиях в этом направлении не теряет своей актуальности.

Запатентованные технологические решения [1, 2], полученные в результате натурных экспериментов и в процессе изготовления изделий специального назначения, получили дальнейшее развитие в работах [3, 4].

Данная работа является продолжением исследований в этом направлении и связана с построением математической модели и численным расчетом нестационарного теплообмена высокотемпературного металлического цилиндра в охлаждающей среде. Решается задача определения температур на границе и в произвольных точках цилиндра и охлаждаемой среды.

Результаты численных расчетов сопоставляются с результатами аналитического решения для конечного времени и результатами, полученными в программе ANSYS для произвольных моментов времени и изменяющихся теплофизических свойств контактирующих сред. При этом подразумевается, что дальнейшее развитие модели будет включать в себя расчетные алгоритмы, реализация которых не предусмотрена в других расчетных программных комплексах, например в программе ANSYS.

Математическая модель задачи охлаждения

Как и в работе [5], за основу примем дифференциальное уравнение теплопроводности Био – Фурье. Если рассматривать тело цилиндрической формы, то распределение температуры в нем при условии соблюдения симметрии распределения ее относительно оси цилиндра

запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} c \rho T = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; λ – теплопроводность; T – температура; r, y – пространственные координаты по радиусу и длине.

Рассмотрим сначала одномерный случай для пространственной координаты r . Принимая $c, \rho, \lambda = \text{const}$, из уравнения (1) при условии, что температуропроводность материала $a = \frac{\lambda}{c\rho}$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где t – время.

Уравнение (2) запишем в разностной форме по неявной разностной схеме в виде

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta r^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + \frac{a\Delta t}{r_i} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r}, \quad (3)$$

где $T_{i-1}^{n+1}, T_i^{n+1}, T_{i+1}^{n+1}$ – температуры в предыдущем, искомым и последующем расчетных узлах на $(n+1)$ -м временном слое; T_i^n – температура в искомым узле на n -м временном слое; Δr – шаг между расчетными узлами по пространственной координате r ; r_i – текущий радиус цилиндра; Δt – расчетный шаг по времени.

Здесь как первая, так и вторая производная аппроксимирована по r со 2-м порядком точности. Уравнение (3) можно записать в виде [6]

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - C_i T_i^{n+1} + B_i T_{i-1}^{n+1} = -F_i, \quad (4)$$

где коэффициенты определяются по формулам:

$$A_i = \frac{a\Delta t}{\Delta r^2} + \frac{a\Delta t}{2r_i \Delta r}; \quad C_i = \frac{2a\Delta t}{\Delta r^2} + 1;$$

$$B_i = \frac{a\Delta t}{\Delta r^2} - \frac{a\Delta t}{2r_i \Delta r}; \quad F_i = T_i^n.$$

Если принять параметры c, ρ, λ переменными, то вторая производная правой части уравнения (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\lambda_{i+0,5} \frac{\partial T_i}{\partial r} - \lambda_{i-0,5} \frac{\partial T_{i-1}}{\partial r}}{\Delta r} = \\ &= \frac{\lambda_{i+0,5} (T_{i+1} - T_i) - \lambda_{i-0,5} (T_i - T_{i-1})}{\Delta r^2}, \end{aligned}$$

где $\lambda_{i+0,5}, \lambda_{i-0,5}$ – средняя теплопроводность между искомым и последующим и средняя теплопроводность между искомым и предыдущим расчетными узлами.

Для первой производной $\frac{\partial T}{\partial r}$ воспользуемся центральной разностью

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r}.$$

Уравнение (1) в целом в разностной форме будет иметь вид

$$(c\rho)_i^{n+1} T_i^{n+1} = (c\rho)_i^n T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \left[\lambda_{i+0,5}^{n+1} (T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - \lambda_{i-0,5}^{n+1} (T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) \right] + \frac{\Delta t \lambda_i^{n+1}}{2r_i \Delta r} (T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}). \quad (5)$$

Уравнение (5) можно записать в форме (4) с коэффициентами:

$$A_i = \frac{\Delta t \lambda_{i+0,5}^{n+1}}{\Delta r^2 (c\rho)_i^{n+1}} + \frac{\Delta t \lambda_i^{n+1}}{2r_i \Delta r (c\rho)_i^{n+1}};$$

$$C_i = \frac{\Delta t}{\Delta r^2 (c\rho)_i^{n+1}} (\lambda_{i+0,5}^{n+1} + \lambda_{i-0,5}^{n+1}) + 1;$$

$$B_i = \frac{\Delta t \lambda_{i-0,5}^{n+1}}{\Delta r^2 (c\rho)_i^{n+1}} - \frac{\Delta t \lambda_i^{n+1}}{2r_i \Delta r (c\rho)_i^{n+1}}; \quad F_i = \frac{(c\rho)_i^n}{(c\rho)_i^{n+1}} T_i^n.$$

Наряду с переменными параметрами c, ρ, λ рассмотрим еще и переменный шаг Δr интегрирования по r . Тогда вместо уравнения (5) получим:

$$\begin{aligned} (c\rho)_i^{n+1} T_i^{n+1} &= (c\rho)_i^n T_i^n + \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta \bar{r}_i} \left[\lambda_{i+0,5}^{n+1} \frac{(T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1})}{\Delta r_{i+1}} - \lambda_{i-0,5}^{n+1} \frac{(T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})}{\Delta r_i} \right] + \\ &+ \frac{\Delta t \lambda_i^{n+1}}{r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} (T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta \bar{r}_i = \frac{\Delta r_{i+1} + \Delta r_i}{2}$; $\Delta r_i, \Delta r_{i+1}$ – шаги между расчетными узлами по пространственной координате r в искомым i -м и последующем $(i+1)$ -м узлах.

Тогда уравнение (6) можно записать в виде уравнения (4) с коэффициентами:

$$A_i = \frac{\Delta t \lambda_{i+0,5}^{n+1}}{\Delta \bar{r}_i \Delta r_{i+1}} + \frac{\Delta t \lambda_i^{n+1}}{r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)};$$

$$B_i = \frac{\Delta t \lambda_{i-0,5}^{n+1}}{\Delta \bar{r}_i \Delta r_i} - \frac{\Delta t \lambda_i^{n+1}}{r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)};$$

$$C_i = (c\rho)_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta r_i} \left(\frac{\lambda_{i+0,5}^{n+1}}{\Delta r_{i+1}} + \frac{\lambda_{i-0,5}^{n+1}}{\Delta r_i} \right);$$

$$F_i = (c\rho)_i^n T_i^n.$$

Выразим температуру T_{i-1}^{n+1} как функцию T_i^{n+1} в виде равенства

$$T_{i-1}^{n+1} = \beta_i^{n+1} + \alpha_i^{n+1} T_i^{n+1}. \quad (7)$$

Подставив равенство (7) в уравнение (4), получим

$$T_i^{n+1} = \beta_{i+1}^{n+1} + \alpha_{i+1}^{n+1} T_{i+1}^{n+1},$$

где

$$\beta_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i \beta_i^{n+1} + F_i}{C_i - B_i \alpha_i^{n+1}}; \quad \alpha_{i+1}^{n+1} = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_i^{n+1}}. \quad (8)$$

Двумерную нестационарную задачу теплопроводности будем решать методом расщепления, записав разностные уравнения по пространственной координате y , так же как и по радиусу r в виде безусловно устойчивой локально-одномерной неявной схемы:

по радиусу r

$$(c\rho T)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = (c\rho T)_{i,j}^n + \frac{1}{2} (A_i T_{i+1,j} - C_i T_{i,j} + B_i T_{i-1,j})^{n+\frac{1}{2}};$$

по координате y :

$$(c\rho T)_{i,j}^{n+1} = (c\rho T)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (A_j T_{i,j+1} - C_j T_{i,j} + B_j T_{i,j-1})^{n+1}.$$

Коэффициенты A_j , B_j , C_j , F_j будут определяться выражениями:

$$A_j = \frac{\Delta t \lambda_{j+0,5}^{n+1}}{\Delta y^2}; \quad B_j = \frac{\Delta t \lambda_{j-0,5}^{n+1}}{\Delta y^2};$$

$$C_j = \frac{\Delta t (\lambda_{j+0,5}^{n+1} + \lambda_{j-0,5}^{n+1})}{\Delta y^2} + (c\rho)_j^{n+1};$$

$$F_j = (c\rho T)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},$$

где Δy – шаг интегрирования по y .

Каждое разностное уравнение описывает продвижение по одной из пространственных координат на $1/2$ временного шага Δt . Благодаря такому подходу становится возможным при решении системы уравнений применять эффективный метод прогонки [7].

На границе цилиндра, его внешней поверхности по радиусу $r = R$, будем использовать условие

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\alpha(t)}{\lambda_0} (T_l - T_0), \quad (9)$$

где $\alpha(t)$ – коэффициент теплоотдачи; λ_0 – те-

плопроводность граничного слоя материала; T_l, T_0 – температуры охлаждающей среды и охлаждаемой поверхности.

Запишем равенство (9) в разностной форме

$$\frac{T_l - T_{-1}}{2\Delta r} = -\frac{\alpha(t)}{\lambda_0} (T_l - T_0). \quad (10)$$

Воспользуемся уравнением (5) при $i = 0$:

$$\begin{aligned} (c\rho)_0^{n+1} T_0^{n+1} &= (c\rho)_0^n T_0^n + \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta r^2} [\lambda_{+0,5}^{n+1} (T_1^{n+1} - T_0^{n+1}) - \lambda_{-0,5}^{n+1} (T_0^{n+1} - T_{-1}^{n+1})] + \\ &+ \frac{\Delta t \lambda_0^{n+1}}{2r_0 \Delta r} (T_1^{n+1} - T_{-1}^{n+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем уравнение (10) для $(n+1)$ -го временного слоя. Исключим из уравнения (11) температуру T_{-1}^{n+1} с помощью равенства (10) и получим

$$T_0^{n+1} = \beta_1 + \alpha_1 T_1^{n+1},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta r^2} (\lambda_{+0,5} + \lambda_{-0,5})}{(c\rho)_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (\lambda_{+0,5} + \lambda_{-0,5}) + \frac{\Delta t}{\Delta r} \alpha(t) \left(2 \frac{\lambda_{-0,5}}{\lambda_0} - \frac{\Delta r}{r_0} \right)};$$

$$\beta_1 = \frac{(c\rho)_0^n T_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta r} \alpha(t) \left(2 \frac{\lambda_{-0,5}}{\lambda_0} - \frac{\Delta r}{r_0} \right) T_l}{(c\rho)_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (\lambda_{+0,5} + \lambda_{-0,5}) + \frac{\Delta t}{\Delta r} \alpha(t) \left(2 \frac{\lambda_{-0,5}}{\lambda_0} - \frac{\Delta r}{r_0} \right)}.$$

С помощью равенств (8) при $i = 1$ определим α_2 и β_2 . Увеличивая номер i на единицу, последовательно рассчитаем все прогоночные коэффициенты α_i и β_i ($i = 1, 2, \dots, N$), в том числе α_N и β_N . Аналогично можно рассмотреть граничное условие и по пространственной координате y .

При решении уравнения теплопроводности для пространственной координаты r расчеты начинаем с поверхности цилиндра по направлению к центру. Поскольку уравнение теплопроводности при условии, что c, ρ, λ являются переменными, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} c\rho T = \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (12)$$

то запишем отношение $\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$ при $r \rightarrow 0$. В центре цилиндра имеем граничные условия $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. Аппроксимируя в окрестности $r = 0$

температуру выражением, представляющим собой четную функцию $T_1 = T_0 + Kr^2$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 2Kr, \text{ а } \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 2K.$$

Вторая производная $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ тоже будет равна $2K$, а уравнение (12) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} c\rho T = \frac{\partial}{\partial r} (2\lambda Kr) + 2\lambda K.$$

Вынесем λ за знак производной $\frac{\partial}{\partial r}$ как среднее значение $\bar{\lambda}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} c\rho T = 2\bar{\lambda}K + 2\lambda K, \quad (13)$$

$$\text{где } \bar{\lambda} = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}.$$

Постоянную K определим из равенства

$$K = \frac{T_1 - T_0}{\Delta r^2}.$$

Уравнение (12) с учетом уравнения (13) в разностной форме будет иметь вид

$$(c\rho)_0^{n+1} T_0^{n+1} = (c\rho)_0^n T_0^n + (1 + \bar{\lambda}^{n+1}) \frac{2\Delta t}{\Delta r^2} (T_1^{n+1} - T_0^{n+1}), \quad (14)$$

поэтому можно записать

$$T_0^{n+1} = \beta_1 + \alpha_1 T_1^{n+1},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{(1 + \bar{\lambda}^{n+1}) \frac{2\Delta t}{\Delta r^2}}{(c\rho)_0^{n+1} + (1 + \bar{\lambda}^{n+1}) \frac{2\Delta t}{\Delta r^2}}; \quad (15)$$

$$\beta_1 = \frac{(c\rho)_0^n T_0^n}{(c\rho)_0^{n+1} + (1 + \bar{\lambda}^{n+1}) \frac{2\Delta t}{\Delta r^2}}.$$

Как видно из уравнения (15), вновь $\alpha_1 < 1$. При $r = r_1$ уравнение (12) запишем как уравнение для любой внутренней точки, только при $r_1 = \Delta r$.

При переменном шаге в уравнении (14) вместо Δr следует писать Δr_1 . Осуществляя прямую прогонку, найдем все значения α_i , включая значения α_N и β_N . Затем обратной прогонкой найдем температуры в расчетных узлах.

Далее пусть речь идет не об однородном материале, а о среде, состоящей из двух материалов – металла и жидкости. На границе их сопряжения должны выполняться граничные условия IV рода, которые подразумевают равенства температур $T_0^m = T_0^l$ на границе раздела двух сопрягаемых тел и тепловых потоков, проходящих через границу сопряжения:

$$\lambda^m \frac{\partial T_0^m}{\partial r} = \lambda^l \frac{\partial T_0^l}{\partial r}, \quad (16)$$

где индекс m относится к металлу, а индекс l – к жидкости.

Обозначим границу перехода разных материалов, как это показано на рис. 1, в виде прямой EF .

Обозначим индексом «ноль» параметры в точке V . Введем две фиктивные точки A и B . Пусть точка A находится на продолжении кривой CV , а точка B – на продолжении кривой DV . Примем, что точка A в жидкости находится на удалении от границы FE , равном Δr_1 , а вторая точка в металле (точка B) – на удалении от границы EF , равном Δr_0 .

Принимаем, что шаги Δr_0 и Δr_1 не совпадают. Для удобства вычислений примем также, что шаг Δr_1 в целое число раз отличается от шага Δr_0 . Кроме того, коэффициенты c, ρ, λ будем рассматривать переменными. Из уравнения (16), отнесенного к $(n+1)$ -му временному слою, получим

$$\lambda_0^m \frac{T_A - T_{-1}}{\Delta r_1 + \Delta r_0} = \lambda_0^l \frac{T_1 - T_B}{\Delta r_1 + \Delta r_0}. \quad (17)$$

В точке V со стороны металла и жидкости имеем:

$$(c\rho T)_{0,m}^{n+1} = (c\rho T)_{0,m}^n + \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta r_0} \left[\frac{\lambda_{0,m}^{n+1}}{\Delta r_1} (T_A - T_0)^{n+1} - \frac{\lambda_{-0,5,m}^{n+1}}{\Delta r_0} (T_0 - T_{-1})^{n+1} \right] + \frac{\Delta t\sigma}{\Delta r_0} \left[\frac{\lambda_{0,m}^n}{\Delta r_1} (T_A - T_0)^n - \frac{\lambda_{-0,5,m}^n}{\Delta r_0} (T_0 - T_{-1})^n \right]; \quad (18)$$



Рис. 1. Граница перехода между металлом и жидкостью

$$(c\rho T)_{0,l}^{n+1} = (c\rho T)_{0,l}^n + \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{r}_0} \left[\frac{\lambda_{+0,5,l}^{n+1}}{\Delta r_1} (T_1 - T_0)^{n+1} - \frac{\lambda_{0,l}^{n+1}}{\Delta r_0} (T_0 - T_B)^{n+1} \right] + \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{r}_0} \left[\frac{\lambda_{+0,5,l}^n}{\Delta r_1} (T_1 - T_0)^n - \frac{\lambda_{0,l}^n}{\Delta r_0} (T_0 - T_B)^n \right], \quad (19)$$

где $\Delta \bar{r}_0 = \frac{\Delta r_0 + \Delta r_1}{2}$; Δr_0 – отрезок VB ; Δr_1 – отрезок AV ; σ – весовой параметр, изменяющийся в интервале $(0,1)$.

Используя уравнения (18) и (19), исключим фиктивные переменные T_A и T_B из уравнения (17) и получим равенство, содержащее на $(n+1)$ -м временном слое только переменные T_1^{n+1} , T_0^{n+1} , T_{-1}^{n+1} :

$$A_0 T_1^{n+1} - C_0 T_0^{n+1} + B_0 T_{-1}^{n+1} + F_0 = 0, \quad (20)$$

где

$$A_0 = \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{r}_0} \frac{\lambda_{+0,5,l}^{n+1}}{\Delta r_1} \left(1 + \frac{\Delta r_0}{\Delta r_1} \frac{\lambda_{+0,5,l}^{n+1}}{\lambda_{0,l}^{n+1}} \right);$$

$$B_0 = \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{r}_0} \frac{\lambda_{-0,5,m}^{n+1}}{\Delta r_0} \left(1 + \frac{\Delta r_0}{\Delta r_1} \frac{\lambda_{+0,5,m}^{n+1}}{\lambda_{-0,5,m}^{n+1}} \right);$$

$$C_0 = \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{r}_0} \left[\frac{\lambda_{0,m}^{n+1}}{\Delta r_1} + \frac{\lambda_{-0,5,m}^{n+1}}{\Delta r_0} + \frac{\lambda_{+0,5,m}^{n+1}}{\Delta r_1} + \frac{(\lambda_{+0,5,l}^{n+1})^2}{(\Delta r_1)^2} \frac{\Delta r_0}{\lambda_{0,l}^{n+1}} \right];$$

$$F_0 = (c\rho)_{0,m}^n T_0^n + \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{r}_0} \left[\frac{\lambda_{0,m}^n}{\Delta r_1} (T_A - T_0)^n - \frac{\lambda_{-0,5,m}^n}{\Delta r_0} (T_0 - T_{-1})^n \right] + \frac{\lambda_{0,m}^{n+1}}{\lambda_{-0,5,m}^{n+1}} \frac{\Delta r_0}{\Delta r_1} \left\{ (c\rho)_{0,l}^n T_0^n + \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{r}_0} \times \left[\frac{\lambda_{+0,5,l}^n}{\Delta r_1} (T_1 - T_0)^n - \frac{\lambda_{0,l}^n}{\Delta r_0} (T_0 - T_B)^n \right] \right\}.$$

Перемещаясь в направлении увеличения значений i (см. рис. 2) в однородном материале и показывая, что все α_i ($i = 2, 3, \dots, N$) меньше единицы, получим и $\alpha_0 < 1$. Подставив в уравнение (20) выражение $T_{-1}^{n+1} = \beta_0^{n+1} + \alpha_0^{n+1} T_0^{n+1}$, получим

$$A_0 T_1^{n+1} - C_0 T_0^{n+1} + B_0 (\beta_0^{n+1} + \alpha_0^{n+1} T_0^{n+1}) + F_0 = 0,$$

отсюда

$$T_0^{n+1} = \beta_1^{n+1} + \alpha_1^{n+1} T_1^{n+1},$$

где

$$\beta_1^{n+1} = \frac{B_0 \beta_0^{n+1} + F_0}{C_0 - B_0 \alpha_0^{n+1}}; \quad \alpha_1^{n+1} = \frac{A_0}{C_0 - B_0 \alpha_0^{n+1}}.$$

Рассмотрим разность $C_0 - B_0 \alpha_0^{n+1}$. Коэффициент B_0 входит как слагаемое в коэффициент C_0 . Поскольку $\alpha_0^{n+1} < 1$, то в результате вычитания $B_0 \alpha_0^{n+1}$ получим положительное число. Коэффициент A_0 также входит в коэффициент в качестве слагаемого C_0 , поэтому можно утверждать, что знаменатель выражения для α_1^{n+1} больше числителя и $\alpha_1^{n+1} < 1$. Имея $\alpha_1^{n+1} < 1$, для α_i^{n+1} ($i = 2, 3, \dots, N$) с можно показать, что они тоже меньше единицы. Здесь N – количество расчетных узлов.

В окрестности границы сопряжения материалов при выполнении расчетов шаги Δr_i разностных сеток измельчаем со стороны металла и со стороны жидкости так, как это показано на рис. 2.

По аналогии с уравнениями (9) – (11) значения коэффициентов для уравнения $T_0^{n+1} = \beta_1 + \alpha_1 T_1^{n+1}$ на внешней границе по пространственной координате y примут вид:

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\Delta t(\lambda_{0,5} + \lambda_{-0,5})}{(\Delta y)^2}}{(c\rho)_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\frac{\lambda_{0,5} + \lambda_{-0,5}}{\Delta y} + 2\alpha(t) \frac{\lambda_{-0,5}}{\lambda_0} \right]};$$

$$\beta_1 = \frac{(c\rho)_0^n T_0^n + \frac{2\Delta t}{\Delta y} \alpha(t) \frac{\lambda_{-0,5}}{\lambda_0} T_l}{(c\rho)_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\frac{\lambda_{0,5} + \lambda_{-0,5}}{\Delta y} + 2\alpha(t) \frac{\lambda_{-0,5}}{\lambda_0} \right]}.$$

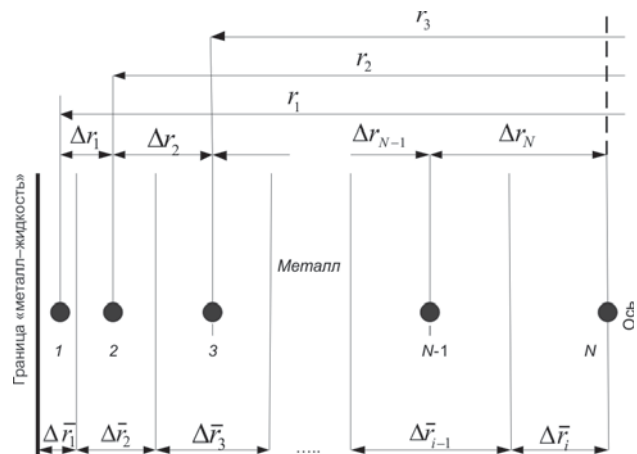


Рис. 2. Измельчение сетки на границе сопрягаемых материалов

Результаты численных расчетов

Пример 1. Для верификации математической модели проведем сопоставление результатов численных расчетов с результатами аналитического решения двумерной задачи охлаждения сплошного металлического цилиндра [8]. Расчетная схема цилиндра, имеющего размеры: $R=0,04$ м; $Y=0,16$ м, приведена на рис. 3. Начальная температура тела составляла $T_0 = 800$ °С, температура охлаждающей среды $T_l = 30$ °С. Теплопроводность материала цилиндра $\lambda=23,3$ Вт/(м·К), температуропроводность $a = 6,11 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Коэффициент теплоотдачи с поверхности охлаждения принят постоянным и равным $\alpha=118$ Вт/(м²·К). Расчетное время охлаждения составляло $t = 1800$ с, шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с.

Численные значения температуры (см. рис. 4), полученные по предлагаемой модели, близки к значениям результатов аналитического решения и численного решения в программе ANSYS CFX (Academic research CFX Pad App, лицензия инв. № M000014044 от 2007 г., ИжГТУ). Расчет в программе ANSYS проведен с приме-



Рис. 3. Схема двумерной расчетной области

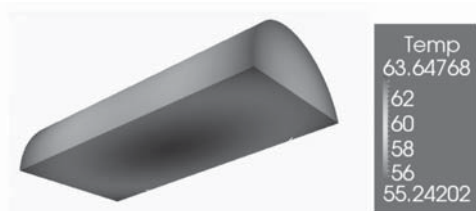


Рис. 4. Температурное поле расчетной области

нением равномерной сетки, количество расчетных узлов по R и по Y составляло 100, шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с. Таким образом, численное решение по предлагаемой модели стремится к решению в программе ANSYS при измельчении расчетной сетки (см. таблицу).

Пример 2. Воспользуемся геометрией расчетной сетки примера 1 и рассмотрим случай, когда расчетная область по радиусу состоит из двух частей. Первая (внешняя) часть – это область, в которой вода начинается с внешнего радиуса $r_j=0,04$ м и продолжается до границы раздела сред, а вторая (внутренняя) часть – это область, в которой металл начинается с радиуса границы раздела $r_s=0,02$ м и продолжается до оси (рис. 5). Примем допущение об отсутствии конвекции в слое воды и будем рассматривать ее как неподвижное твердое тело.

Температура воды $T_l = 20$ °С, теплопроводность $\lambda=0,6$ Вт/(м·К), температуропроводность $a = 1,43 \cdot 10^{-7}$ м²/с, температура окружающей среды $T = 20$ °С. Коэффициент теплоотдачи с поверхности воды и торцовых поверхностей охлаждения принят постоянным $\alpha = 118$ Вт/(м²·К). Расчетное время охлаждения $t = 50$ с, шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с.

Расчет в программе ANSYS проведен также с применением равномерной сетки, количество расчетных узлов по R и Y составляло 100, шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с. Численное решение по предлагаемой модели (рис. 6, а) стремится к решению в программе ANSYS (рис 6, б) при

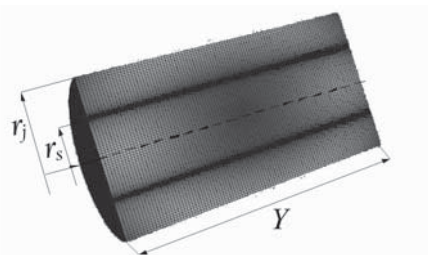


Рис. 5. Схема расчетной области «металл – вода»

Сравнение температур в центре на оси расчетной области (в °С)

Размер сетки	Численный расчет по предлагаемой модели	Аналитический расчет [8]	Численный расчет в программе ANSYS
$R=100, Y=100$	63,6	≈ 60	$\approx 61,9$
$R=200, Y=200$	63,2	≈ 60	$\approx 61,9$
$R=400, Y=400$	62,9	≈ 60	$\approx 61,9$

измельчении расчетной сетки. Коэффициент, характеризующий сгущение сетки $k = 2\Delta\bar{r}_i/\Delta\bar{r}_1$, со стороны металла и воды составлял 12. Суммарное количество расчетных узлов в модельном решении составляло 62 по R и 100 по Y . При заданных исходных данных примера расхождение с численным решением в программе ANSYS по температуре в узловых точках составляло порядка 0,3 %.

Пример 3. Рассмотрим геометрию и параметры расчетной сетки примера 2 с условием, что теплофизические параметры материала сред (c, ρ, λ) будут переменными. Примем в качестве металла сталь 45. По результатам обработки табличных данных работы [9] в диапазоне температур 20–800 °C имеем:

$$\lambda = -2,5529 \cdot 10^{-5} T^2 - 6,68764 \cdot 10^{-3} T + 48,58873;$$

$$c = 2,0939 \cdot 10^{-4} T^2 + 0,14089T + 476,08223;$$

$$\rho = 9,51467 \cdot 10^{-5} T^2 - 0,4018T + 7839,6.$$

Для воды по результатам обработки табличных данных работы [10] в диапазоне 20–100 °C получим:

$$\lambda = -1,25058 \cdot 10^{-5} T^2 - 2,55695 \cdot 10^{-3} T + 0,55129;$$

$$c = 0,01647T^2 - 1,48776T + 4207,38;$$

$$\rho = -3,57459 \cdot 10^{-3} T^2 - 0,06863T + 1000,5.$$

Расчет проведем при начальной температуре тела $T_0 = 100$ °C, температуре охлаждающей среды $T_i = 20$ °C.

Расхождение полученных результатов по разработанной модели (рис. 7, а) с численным решением в программе ANSYS (рис. 7, б) в расчетных узлах не превысило 0,5 %.

Заключение

Результаты численного решения задачи нестационарного теплообмена при охлаждении высокотемпературного металлического цилиндра в зависимости от геометрии, теплофизических свойств материала тела и времени процесса доказывают адекватность разработанной математической модели. Сопоставление результатов численных расчетов с аналитическими данными и результатами, полученными в программе ANSYS, позволяет говорить об удовлетворительной точности расчетной модели.

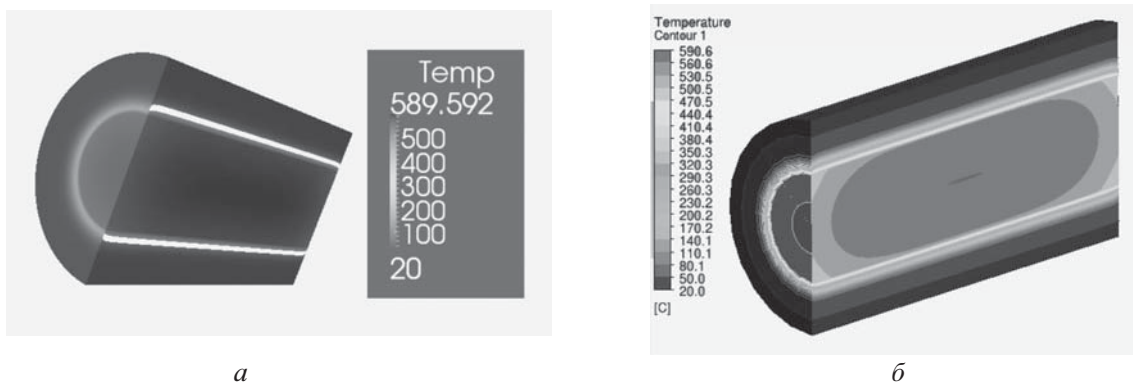


Рис. 6. Температурное поле при $t = 50$ с (шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с, $c, \rho, \lambda = \text{const}$):

а – расчет по модели; б – расчет в программе ANSYS

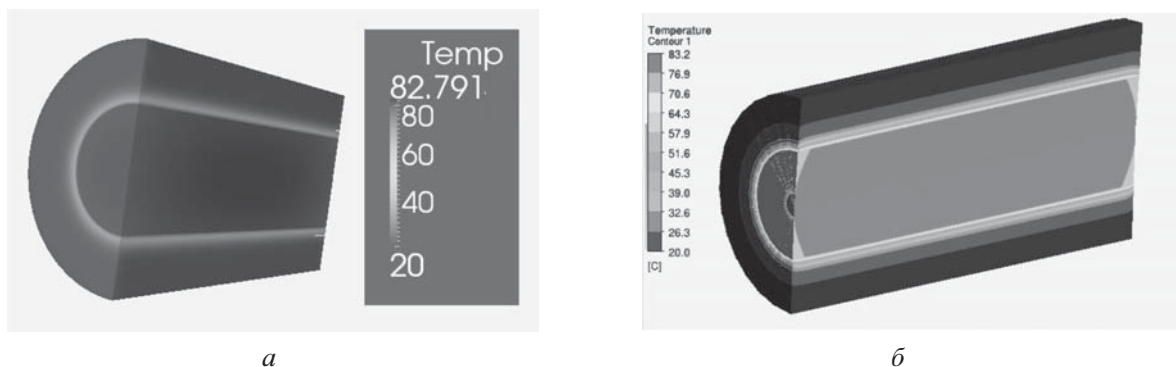


Рис. 7. Температурное поле при $t = 50$ с (шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с, $c, \rho, \lambda = f(T)$):

а – расчет по модели; б – расчет в программе ANSYS

Это значит, что предлагаемый алгоритм численного решения можно использовать для дальнейшей разработки и при решении задач охлаждения, реализация которых не предусмотрена другими расчетными программными комплексами, например программой ANSYS.

Список литературы

1. Пат. 2353669 Российская Федерация: МПК⁷ А. Способ закалки металлических изделий / В.Б. Дементьев, А.М. Липанов, О.И. Шаврин, А.Л. Ураков, Ф.З. Сабриков, Р.В. Гоц, С.С. Макаров; Институт прикладной механики УрО РАН; № 2007117651/02; заявл. 11.05.2007; опубл. 27.04.2009. Бюл. № 12.
2. Пат. 2354712 Российская Федерация: МПК⁷ А. Способ создания охлаждающей среды с регулируемыми теплофизическими свойствами / В.Б. Дементьев, А.М. Липанов, С.Н. Храмов, С.С. Макаров; Институт прикладной механики УрО РАН; № 2007125180/02; заявл. 03.06.2007; опубл. 10.05.2009. Бюл. № 13.
3. Макаров С.С. Исследование начальной стадии теплообмена при спрейерном охлаждении металлических изделий // Химическая физика и мезоскопия. 2010. Т. 12. № 3. С. 325–332.
4. Макаров С.С., Храмов С.Н. Математическое моделирование водо-воздушного охлаждения металлических заготовок в процессе термообработки // Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова. 2011. Вып. 2. С. 47–51.
5. Липанов А.М., Макаров С.С. Численное решение задачи нестационарного теплообмена при охлаждении высокотемпературного металлического тела прямоугольной формы // Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова. 2012. Вып. 2 (54). С. 35–38.
6. Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
7. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск, Сибирское отделение: Наука, 1967. – 197 с.
8. Лобасова М.С. Тепломассообмен: учебное пособие к практическим занятиям. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 156 с.
9. Марочник сталей и сплавов / Под общ. ред. А.С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.
10. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

Материал поступил в редакцию 28.08.2012

ЛИПАНОВ Алексей Матвеевич

E-mail: ipm@udman.ru
Тел.: (3412) 50-82-00

Академик РАН, директор Института механики УрО РАН. Сфера научных интересов – математическое моделирование внутрикамерных процессов в твердотопливных ракетных двигателях и установках, использующих твердое топливо; методы численного решения систем трансцендентных алгебраических и дифференциальных уравнений с частными производными для односвязных и многосвязных объемов интегрирования; создание автоматизированных систем; теоретическое и экспериментальное исследование наносистем и создание средств диагностики наноструктур; исследование и разрешение экологических проблем. Автор более 500 научных трудов.

МАКАРОВ Сергей Сергеевич

E-mail: ssmak15@mail.ru
Тел.: (3412) 20-29-25

Кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией термомеханических процессов Института механики УрО РАН. Сфера научных интересов – гидродинамика и теплообмен в технических объектах и системах, математические модели движения сред в условиях нестационарного теплообмена. Автор 45 научных трудов.