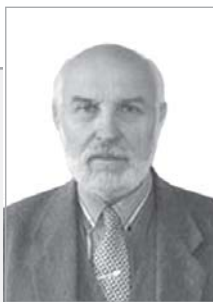


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОРЦЕВЫХ УПЛОТНЕНИЯХ С УЧЕТОМ ТОПОГРАФИИ ПОВЕРХНОСТИ

В.Б. Миносцев, В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, В.Ю. Радыгин



МИНОСЦЕВ
Вениамин
Борисович

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Общая и прикладная математика» Московского государственного индустриального университета (МГИУ). Заслуженный работник высшей школы РФ, лауреат премии им. Н.Е. Жуковского. Специалист в области прикладной математики и механики сплошных сред.



БОГОМОЛОВ
Дмитрий
Юрьевич

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник МГИУ. Специалист в области измерения и анализа топографии поверхности, моделирования течения сплошных сред в тонких слоях. Автор более 20 научных трудов.



ПОРОШИН
Валерий
Владимирович

Кандидат технических наук, профессор кафедры «Технология и металлорежущие системы автомобилестроения» МГИУ. Специалист в области трибологии и линейных измерений. Автор более 120 научных трудов, патентов и свидетельств.



РАДЫГИН
Виктор
Юрьевич

Доцент кафедры «Информационные системы и технологии» МГИУ. Специалист в области измерения и анализа волнистости поверхности, герметизации торцевых металл-металлических уплотнений. Автор более 10 научных публикаций.

Введение

Одной из важнейших проблем при проектировании элементов новой техники в машиностроении, станкостроении, энергомашиностроении, в авиационной и аэрокосмической промышленности является проблема изоляции рабочих сред и обеспечения заданной степени герметичности различных аппаратов, сосудов, соединений трубопроводной арматуры и т.п. Для решения данной проблемы используют большое разнообразие уплотнительных устройств, как правило, конструктивно простых, но оказывающих зачастую определяющую роль в обеспечении надежности изделия в целом. Одним из характерных видов уплотнительных устройств, сочетающих в себе многие наиболее общие свойства и рабочие характеристики, являются металл-металлические соединения (рис. 1). Такие уплотнения широко применяются во многих отраслях промышленности.

го времени не разработана единая теоретическая модель и алгоритмы расчета утечек рабочей среды в герметизируемых соединениях с учетом реальной топографии рабочих поверхностей стыка соединений и условий их эксплуатации.

Отсутствие расчетных моделей приводит к необходимости проведения длительного и трудоемкого экспериментального подбора материалов, технологических методов изготовления и сборки для каждого нового герметизируемого соединения, что существенно удлинняет и удорожает подготовительную стадию производства и препятствует разработке систем САПР.

В статье предложена модель потока рабочей среды в осесимметричных металл-металлических уплотнениях с использованием параметров реальной топографии уплотняемых поверхностей.

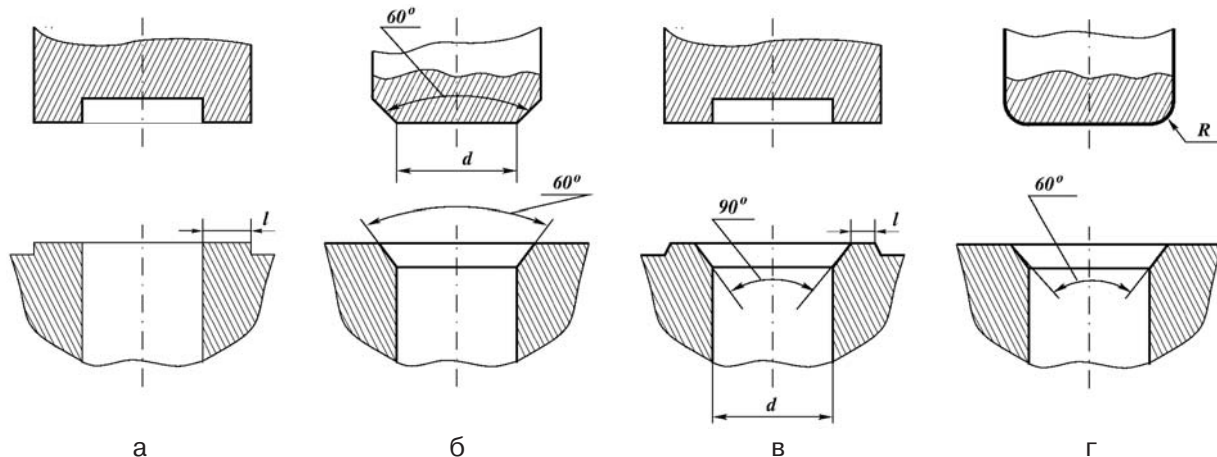


Рис. 1. Типы металл-металлических уплотнений по форме контакта:

а) плоский; б) конусный; в) линейный; г) конусно-сферический;

R , l и d радиус закругления, ширина пояaska и рабочий диаметр уплотнения

По специфике механизма герметизации данные соединения относятся к контактным и их работоспособность определяется, с одной стороны, сложным характером влияния геометрических и физико-механических параметров рабочих поверхностей на динамику их контактного взаимодействия. Сложная структура стыка, с другой стороны, создает определенные проблемы для математического описания движения рабочих сред в соединениях. Вышеперечисленное определило то, что до настояще-

Постановка задачи

Для моделирования потока рабочей среды в уплотнении с учетом влияния шероховатости используется уравнение для поля давлений жидкой среды в тонких слоях, полученное Патиром и Чженом [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_T^3 f(h_T) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_T^3 f(h_T) \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

$$h_T(x, y) = H + h_1(x, y) + h_2(x, y), \quad (2)$$

где x, y – декартовы координаты; $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$ – высоты волнистости нижней и верхней рабочих поверхностей уплотнения относительно средних плоскостей соответственно; H – зазор между средними плоскостями волнистости (постоянная величина); $h_f(x, y)$ – зазор в уплотнении с учетом топографии волнистости; $f(h_f)$ – эмпирическая функция, характеризующая влияние шероховатости, $p(x, y)$ – давление в канале, образуемом зазором. Для вычисления функции $f(h_f)$ можно воспользоваться методикой, рассмотренной в статье [2].

Для осесимметричных торцевых уплотнений уравнение (1) удобнее представить в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h_f^3 f(h_f) \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h_f^3 f(h_f) \frac{\partial p}{r \partial \varphi} \right) = 0, \quad (3)$$

где r, φ – полярные координаты.

На рис. 2 представлена геометрия исследуемой области.

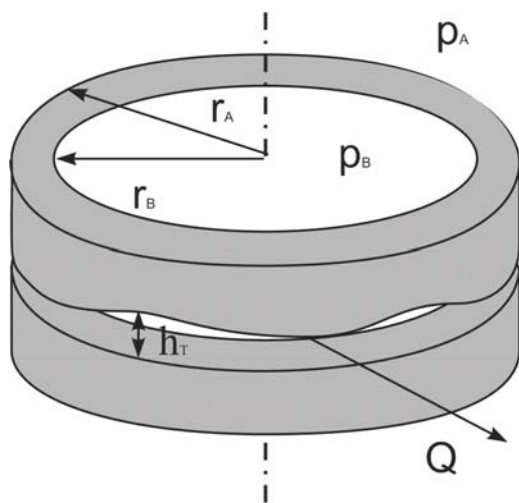


Рис. 2. Геометрия исследуемой области

Давления внутри и снаружи уплотнения постоянны и равны соответственно p_B и p_A ; радиусы внешней и внутренней границ уплотнения – r_A и r_B ; Q – направление потока жидкой среды.

При конечно-элементном моделировании рассматриваемая задача преобразуется к эквивалентной задаче нахождения минимума функционала

$$\chi = \iint_S \left[h_f^3 f(h_f) \left(r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \right] dr d\varphi, \quad (4)$$

где S – кольцевая область, $\hat{p}$ – пробная функция давления, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= p_A \text{ при } r=r_A, \\ \hat{p} &= p_B \text{ при } r=r_B. \end{aligned} \quad (5)$$

Область S представляется в виде конечно-элементной модели [3]. Используется регулярная сетка узловых координат с постоянным шагом по радиусу r и углу φ . Каждая ячейка сетки делится на два косоугольных треугольника диагональной линией (рис. 3). Полученные при таком разбиении элементы будут разного размера, однако при реальных размерах уплотнений разница длин сторон элементов в окружном направлении на внешней и внутренней границах не будет превышать 40%.

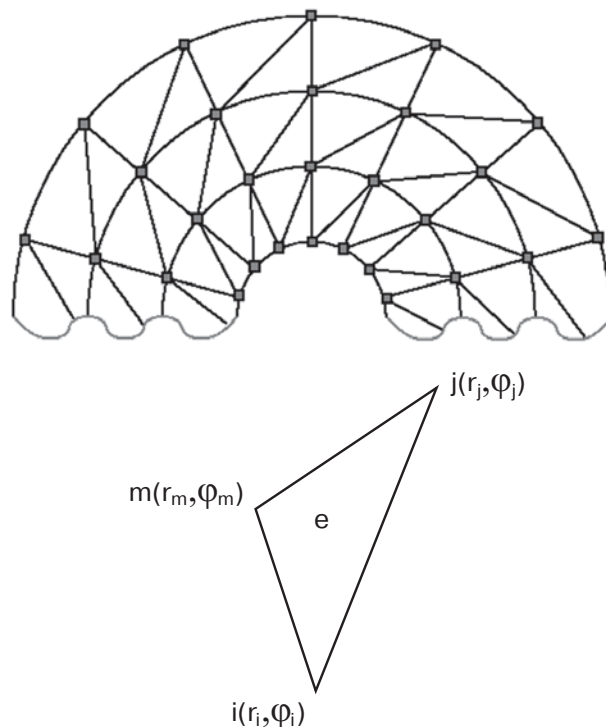


Рис. 3. Разбиение исследуемой области на конечные элементы

Пробные функции давления должны быть непрерывны и иметь кусочно-непрерывные первые производные. Для треугольных элементов в качестве пробных функций используются линейные полиномы:

$$\hat{p}^e(r, \varphi) = \alpha_1^e + \alpha_2^e r + \alpha_3^e \varphi, \quad r, \varphi \in e, \quad (6)$$

где e – отдельный конечный элемент; $\alpha_1^e, \alpha_2^e, \alpha_3^e$ – обобщенные параметры.

Эти параметры выражаются через узловые величины давления $\bar{p}_j, \bar{p}_i$ и $\bar{p}_m$ согласно узловым условиям:

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \alpha_1 + \alpha_2 r_i + \alpha_3 \varphi_i, \\ \bar{p}_j &= \alpha_1 + \alpha_2 r_j + \alpha_3 \varphi_j, \\ \bar{p}_m &= \alpha_1 + \alpha_2 r_m + \alpha_3 \varphi_m. \end{aligned} \quad (7)$$

Разбиение области и условия непрерывности, накладываемые на пробные функции, позволяют записать функционал (4) в виде:

$$\chi = \sum_e \chi^e, \quad (8)$$

$$\chi^e = \iint_e \left[h_T^3 f(h_T) \left(r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \right] dr d\varphi, \quad (9)$$

где χ^e – элементный вклад в функционал.

После подстановки полиномов пробной функции в выражение (9) для элементного вклада получаем:

$$\chi^e = \frac{\iint_e h_T^3 f(h_T) dr d\varphi}{\Delta^2} (c_i \bar{p}_i + c_j \bar{p}_j + c_m \bar{p}_m)^2 + \frac{\iint_e \frac{h_T^3 f(h_T)}{r} dr d\varphi}{\Delta^2} (d_i \bar{p}_i + d_j \bar{p}_j + d_m \bar{p}_m)^2, \quad (10)$$

где Δ – определитель системы уравнений (7), $c_i, c_j, c_m, d_i, d_j, d_m$ – коэффициенты, выраженные через координаты узлов элемента.

В точке минимума производные функционала по каждому узловому значению $\bar{p}_u$ обращаются в нуль:

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \bar{p}_u} = \frac{\iint_e h_T^3 f(h_T) dr d\varphi}{\Delta^2} c_u (c_u \bar{p}_u + c_s \bar{p}_s + c_t \bar{p}_t) + \frac{\iint_e \frac{h_T^3 f(h_T)}{r} dr d\varphi}{\Delta^2} d_u (d_u \bar{p}_u + d_s \bar{p}_s + d_t \bar{p}_t), \quad (11)$$

где u, s, t – глобальные номера узлов сетки, входящих в элемент e . Присутствующие в выражении интегралы могут быть вычислены численно.

Полученные зависимости суммируются и приравняются к нулю. Все вместе они образуют систему линейных уравнений:

$$[K]\{P\} = \{B\}, \quad (12)$$

где $[K]$ – матрица коэффициентов конечно-элементной модели; $\{P\}$ – вектор узловых давлений; $\{B\}$ – вектор, определяющийся граничными условиями.

Разрешающая система уравнений решается методом Гаусса.

Расчет утечек рабочей среды

При оценке герметичности соединений основным показателем являются объемные утечки [4]. Для их определения может быть использовано поле давления, полученное при расчете по методу конечных элементов. Для

конечно-элементной модели полные утечки получаются за счет суммирования локальных утечек по всем элементам вдоль внешней (или внутренней) границы уплотнения: Объемные утечки на внешней и внутренней границах рассчитываются по соотношениям [4]:

$$Q_A = \sum_{i=1}^{n_\phi} \Delta\phi \frac{h_{mi}^3}{12\mu} \frac{(p_{n_r-1,j} - p_A)}{\ln r_A/r_{n_r-1}}, \quad h_{mi} = \frac{1}{2}(h_{Tn_r,i} + h_{Tn_r-1,j});$$

$$Q_B = \sum_{i=1}^{n_\phi} \Delta\phi \frac{h_{mi}^3}{12\mu} \frac{(p_B - p_{2,i})}{\ln r_2/r_B}, \quad h_{mi} = \frac{1}{2}(h_{T1,j} + h_{T2,i}),$$

где $\Delta\phi$ – шаг сетки по угловой координате; n_ϕ – число разбиений по угловой координате; n_r – число разбиений по радиальной координате; $p_{2,i}$ – значение давления в узловой точке на первой внутренней окружности; $p_{n_r-1,i}$ – значение давления в узловой точке на последней внутренней окружности; $h_{Tj,i} (j=1, 2, n_r-1, n_r)$ – значение реального зазора в соответствующих узлах сетки.

Заключение

Рассмотренная модель потока рабочей среды в осесимметричных металл-металлических уплотнениях с использованием параметров реальной топографии уплотняемых поверхностей может найти практическое применение при проектировании данных уплотнений, назначении технологических методов их изготовле-

ния с использованием современных систем САПР.

Список литературы

1. Patir, N., and Cheng, H.S., An Average Flow Model for Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication // ASME Journal of Lubrication Technology. 1978. Vol. 100. No 1. P. 12–17.
2. Sheipak A.A., Porohsyn V.V., Bogomolov D.G. Application of finite element method (FEM) for calculation of flow factors in seals // Abstracts of papers from 2nd world tribology congress, Vienna, Austria, 3 - 7 September. 2001. P. 173–174.
3. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. – 304 с.
4. Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник / Кондаков Л.А., Голубев А.И., Овандер В.Б., Гордеев В.В., Фурманов Б.А., Кармугин Б.В.; Под общ. ред. Голубев А.И., Кондаков Л.А. – М.: Машиностроение, 1986. – 464 с.