УДК 531.8, 534, 534.05

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГАЗОВОГО ПОТОКА В ЛАБИРИНТНОМ УПЛОТНЕНИИ РОТОРА СО СТАТОРОМ

Ф.Б. Андреев, А.М. Гуськов, Ф. Туверез, Л. Блан

Рассматривается динамика газового потока в лабиринтном уплотнении ротора со статором. Основное внимание уделено оценке динамических коэффициентов, учитывающих движение газа через лабиринтное уплотнение. Поток утечки и распределение давления рассчитаны с использованием модифицированного метода Ньюмена, а распределение окружных скоростей – с помощью модели трения Папаевангелу. Приводится сравнительный анализ полученных динамических коэффициентов с данными других исследователей.

Ключевые слова: *лабиринтное уплотнение, динамические коэффициенты, модель трения, динамика роторов.*

Введение

Лабиринтные уплотнения широко используются в газотурбинных двигателях, силовых турбинах и компрессорах для предотвращения попадания газа высокого давления в зоны низкого давления [1–4]. Лабиринтные уплотнения обычно выполняют в виде зачеканенных в ротор набора уплотнительных гребней (рис. 1). Каждая пара соседних гребней образует полость, ограниченную корпусом статора. Всего имеется N гребней и $(N-1)$ полостей. Принцип работы лабиринтных уплотнений заключается в следующем. Закрученный вихревой газ под высоким давлением попадает через зазор между первым гребнем и корпусом статора в первую полость лабиринтного уплотнения, где газ расширяется и изменяется его момент вращения из-за трения о стенки полости, которая может вращаться со скоростью, отличающейся от скорости вихря на входе. Первоначальное закручивание газа связано с вращением ротора и зависит от особенностей его элементов. Скорость предзакручивания газа представляет собой касательную или окружную скорость набегающего потока в уплотнении. В общем случае, из-за возможных колебаний ротора, это вращение неосесимметричное и нестационарное [5–7]. После того как газ преодолевает несколько подобных полостей, он оказывается в конце уплотнения со значительно сниженным давлением.

Лабиринтные уплотнения являются бесконтактными, что существенно снижает их износ и трение между ротором и статором по сравнению с уплотнениями других типов. Лабиринтные уплотнения характеризуются малым зазором между ротором и статором – порядка 0,3% диаметра ротора.

Несмотря на существенное снижение давления через лабиринтные уплотнения, возможны определенные утечки газа из зоны высокого давления, которые зависят от различных факторов: геометрии гребня, числа полостей, перепадов давлений и температур, типа газа и т.д.

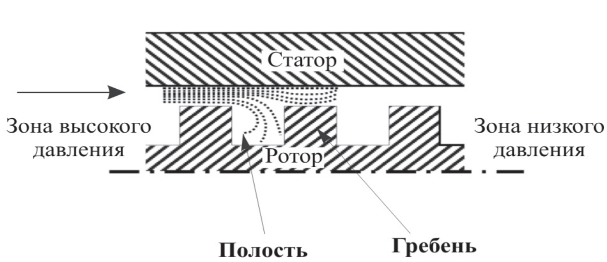

Рис. 1. Схема работы лабиринтного уплотнения

Опыт эксплуатации роторных систем показывает, что при определенных условиях истечение газа через лабиринтное уплотнение может оказывать существенное влияние на динамику и устойчивость подобных систем [8–10].

Основной целью настоящей работы является расчет динамических коэффициентов, описывающих влияние газодинамических сил, возникающих в лабиринтном уплотнении турбоагрегата.

Динамические коэффициенты газодинамических сил

В проводимом исследовании статор и ротор считаются абсолютно жесткими телами. Предполагается также, что в исходном состоянии они установлены соосно на податливых опорах, допускающих перемещение ротора относительно статора [5, 6]. Лабиринтное уплотнение смонтировано на валу ротора. Газодинамический поток в уплотнении считается осесимметричным.

Концепция динамических коэффициентов была выдвинута в работе [11] с целью введения в расчетный анализ сил, индуцированных газом и способных вызвать неустойчивость роторных систем. В ней используется плоская модель поперечного сечения уплотнения, в которой для упрощения пренебрегается круговым потоком в полостях и предзакруткой газа на входе.

Для учета газодинамических сил, возникающих в лабиринтном уплотнении, на основе понятия о динамических коэффициентах рассмотрим линеаризованное уравнение, описывающее малые поперечные перемещения (X, Y) ротора относительно его центра вращения (рис. 2):

$$M_a \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_d & c_{cc} \\ -c_{cc} & C_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_d & k_{cc} \\ -k_{cc} & K_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

где M_a – присоединенная масса газа; k_{cc}, c_{cc} – кососимметричные жесткость и демпфирование соответственно; K_d, C_d – прямые жесткость и демпфирование; F_X, F_Y – силы реакции, учитывающие влияние возможного поперечного движения ротора.

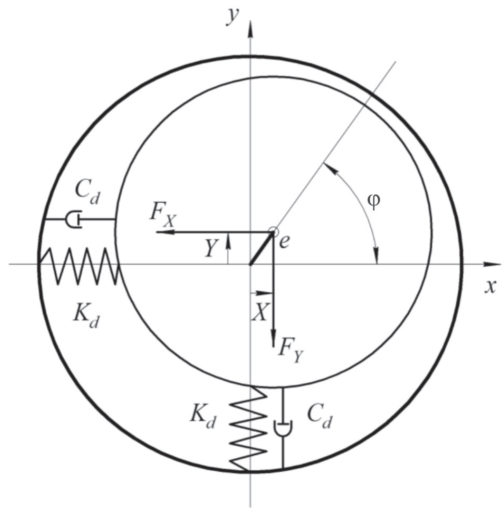

Рис. 2. Расчетная схема связи динамических коэффициентов и сил реакции

Элементы матриц демпфирования и жесткости представляют собой динамические коэффициенты газового потока. Отметим, что кососимметричная жесткость k_{cc} в данном случае является параметром, определяющим циркуляционные силы, которые оказывают существенное влияние на устойчивость системы [12].

Таким образом, корректный расчет динамических коэффициентов обуславливает адекватное описание нелинейной динамики роторов.

Определяющие уравнения газового потока

Рассматриваемая схема лабиринтного уплотнения представлена на рис. 3, где R_r – радиус ротора; L_{tip} – ширина гребня; g_i – зазор в i-й полости; L_i – ширина полости; H_i – высота полости (в дальнейшем принимается, что $L_i = H_i$). Перед первым гребнем входное давление газа обозначается P_0 и выходное давление газа за последним гребнем N обозначено как P_N.

Для формирования уравнений состояния газового потока будем использовать следующие гипотезы и допущения:

– давление газа и окружная скорость в каждой полости не зависят от радиальной и осевой координаты в ней;

– поток в нулевом приближении, т.е. в случае осесимметричного вращения ротора можно рассматривать как стационарный и осесимметричный;

– температура в каждой полости уплотнения является постоянной;

– газ предполагается идеальным;

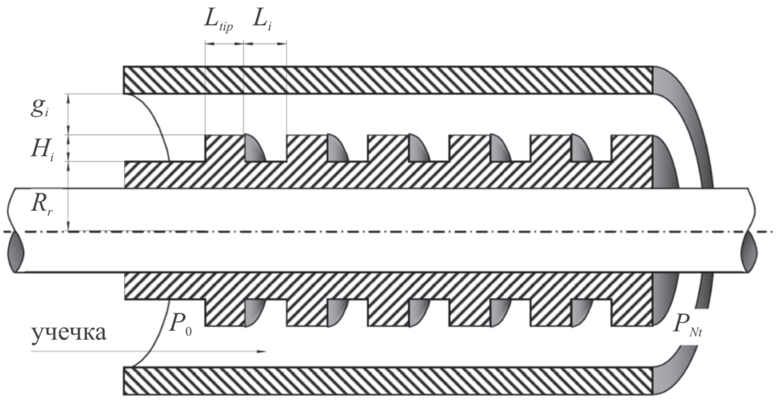

Рис. 3. Схема жесткого ротора с лабиринтным уплотнением

– частота акустического резонанса значительно выше частоты вращения;

– при определении окружного напряжения сдвига на стенках уплотнения осевая составляющая скорости потока незначительна по сравнению с окружной;

– поверхность статора считается гладкой.

Состояние газа внутри лабиринтного уплотнения описывается уравнениями непрерывности, равновесия моментов и массового расхода [11].

Уравнение непрерывности газового потока для элементарного объема в i-й полости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i A_i\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\rho_i V_i A_i}{R_{(r)}}\right)+\frac{\dot{m}_{i+1}^2-\dot{m}_i^2}{2\dot{m}_0}=0, \qquad (2)$$

где $R_{(r)}$ – радиус ротора[1]; φ – угловая координата элементарного объема; ρ_i, V_i, A_i, $\dot{m}_i$ – плотность газа, окружная скорость, площадь поперечного сечения и массовый расход газа (утечка) на единицу длины окружности в i-й полости соответственно.

Уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$\rho_i=\frac{P_i}{RT}, \qquad (3)$$

где R – газовая постоянная; T – температура; P_i – давление в i-й полости.

Тогда после подстановки (3) в уравнение (1), уравнение непрерывности принимает вид:

$$\frac{1}{RT}\frac{\partial}{\partial t}\left(P_i A_i\right)+\frac{1}{RT}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P_i V_i A_i}{R_{(r)}}\right)+\frac{\dot{m}_{i+1}^2-\dot{m}_i^2}{2\dot{m}_0}=0. \qquad (4)$$

Уравнение равновесия моментов в общем случае записывается в виде [1]:

$$\sum_{поверхн.} F_\varphi=\frac{\partial \rho V}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho V\right), \qquad (5)$$

где F_φ – сила на единицу объема.

Силы, действующие в элементарном объеме i-й полости, представлены на рис. 4.

Рис. 4. Силы, действующие в элементарном ооъеме

[1] Величины, относящие к ротору имеют нижний индекс (r)

После суммирования уравнение равновесия моментов принимает вид:

$$\frac{1}{RT}\left[P_i A_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + P_i V_i A_i \frac{\partial V_i}{R_{(r)}\partial\varphi}\right] + \dot{m}_i\left(V_i - V_{i-1}\right) = \\ = -\frac{A_i}{R_{(r)}}\frac{\partial P_i}{\partial\varphi} + \tau_{(r)i}a_{(r)i}L_i - \tau_{(s)i}a_{(s)i}L_i, \qquad (6)$$

Коэффициенты $a_{(s)i}$[2] и $a_{(r)i}$ (безразмерные периметры полостей статора и ротора соответственно) определяются конфигурацией лабиринта (гребней на роторе или на статоре) [13]. Касательные напряжения $\tau_{(s)i}$ и $\tau_{(r)i}$ на поверхности стенок статора и ротора определяются по формуле [13]

$$\tau_{\substack{(s)i\\(r)i}} = \frac{1}{2}\rho f_{\substack{(s)i\\(r)i}} \begin{cases} V_i^2 \\ \left(R_{(r)}\omega - V_i\right)^2 \end{cases}, \qquad (7)$$

где f – коэффициент трения, значение которого зависит от конфигурации лабиринта; ω – угловая скорость вращения ротора.

Традиционно для аналитического описания потока в уплотнениях используется модель турбулентного внутрикамерного потока Хирса [13], которая базируется на модели трения в трубах Блазиуса, и коэффициент трения определяется по формуле

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = n\left(Re\right)^m = n\left[\frac{\rho U\left(2H\right)}{\mu}\right]^m, \qquad (8)$$

где U – скорость внутрикамерного потока по отношению к ротору или к стенке статора; ρ – плотность газа; τ_w – напряжения сдвига на стенке; n, m – коэффициенты; H – зазор в полости; μ – динамическая вязкость среды.

Число Рейнольдса Re зависит от гидравлического диаметра D_h, который в два раза больше зазора H. Эмпирические коэффициенты n и m определяются из эксперимента. Для гладких труб $n = 0{,}079$ и $m = -0{,}25$.

Нельсон [14] на основе теории Хирса, по всей вероятности, первым провел полноценное исследование утечек и динамических коэффициентов уравнения (1) в системе с коническим лабиринтным уплотнением в турбулентном режиме. Им было установлено, что теория Хирса в случае незакрученного потока газа на входе хорошо согласуется с экспериментом в отличие от случая закрученного потока.

Нельсон и Нгуен [15] предложили модель коэффициента трения, в которой используется параметр «относительной жесткости»:

$$f = a_1\left[1 + \left(b_1\frac{e_a}{D_h} + b_2\frac{1}{Re}\right)^{\frac{1}{3}}\right], \; Re = \frac{VD_h\rho}{\mu}, \qquad (9)$$

где $a_1 = 1{,}375\cdot10^{-3}$, $b_1 = 2\cdot10^4$, $b_2 = 10^6$; e_a – шероховатость поверхности статора в абсолютном выражении; D_h – гидравлический диаметр; e_a/D_h – относительная жесткость; V – характерная скорость; ρ – плотность среды.

Данная модель более точно описывает трение потоков, закрученных на входе в лабиринтное уплотнение. Папаевангелу [16] улучшил модель Нельсона и Нгуена, снизив до 0,8% максимальную погрешность численных расчетов коэффициента трения по сравнению с экспериментальным значением, установленным по диаграмме Муди, описывающей зависимость коэффициента трения от шероховатости стенок трубы и числа Рейнольдса. В настоящей работе принята модель трения Папаевангелу, которая записана в виде:

$$f = \frac{a_1 - a_2\left[7 - \log\left(Re\right)\right]}{\left[\log\left(\frac{e}{a_3 D_h} + \frac{a_4}{Re^{a_5}}\right)\right]^2}, \qquad (10)$$

где $a_1 = 0{,}2479$, $a_2 = 0{,}947\cdot10^{-5}$, $a_3 = 3{,}615$, $a_4 = 7{,}366$, $a_5 = 0{,}9142$.

Для расчета расходов утечки $\dot{m}_i$ и $\dot{m}_{i+1}$, входящих в уравнения непрерывности и равновесия моментов, была использована модифицированная эмпирическая модель Ньюмена [2, 17]:

$$\dot{m}_i = \mu_i\, g_i \frac{P_{i-1}}{\sqrt{RT}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^2}}{\sqrt{1-\alpha}}; \qquad (11)$$

$$\alpha = \frac{8{,}52}{\frac{H_i - L_{tip}}{g_i} + 7{,}23}; \qquad (12)$$

[2] Величины, относящие к статору имеют нижний индекс (s)

$$\mu_i = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5S_i + 2S_i^2};$$

$$S_i = \left(\frac{P^{(0)}{}_{i-1}}{P^{(0)}{}_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1, \qquad (13)$$

где α – коэффициент переноса остаточной кинетической энергии; μ_i – коэффициент расхода; T_{in} – температура на входе в лабиринт; R – газовая постоянная; $P_i^{(0)3}$ – давление в i-й полости; γ – показатель адиабаты газа.

Отношение давлений в двух соседних полостях выражается формулой

$$\frac{P_{i-1}^{(0)}}{P_i^{(0)}} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\frac{U_i^2}{RT}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \qquad (14)$$

где U_i – осевая скорость газа в i-й полости.

Приведенные выше формулы справедливы для дозвукового потока при условии, что в лабиринте не возникает критический поток. Вместе с тем на последнем гребне всегда существует возможность образования критического потока, когда

$$\frac{P_N^{(0)}}{P_{N-1}^{(0)}} \le \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (15)$$

(для воздуха значение в правой части неравенства составляет 0,528).

Если условие (15) выполняется, то уравнение расходов утечки (11) для последнего гребня должно быть заменено на уравнение

$$\dot{m}_N = \mu_N g_N \frac{P_{N-1}^{(0)}}{\sqrt{RT}} \frac{\sqrt{\gamma\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}}{\sqrt{1-\alpha}}. \qquad (16)$$

Таким образом, система из уравнений непрерывности (4), равновесия моментов (6) и массового расхода (11) или (16) полностью описывает поведение газа в i-й полости лабиринтного уплотнения.

Решение уравнений газового потока

Для решения полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений воспользуемся методом возмущений, в соответствии с которым находим решение в виде [12]:

$$y = y^{(0)}\varepsilon^0 + y^{(1)}(t)\varepsilon^1 + y^{(2)}(t)\varepsilon^2 + $$
$$+ y^{(3)}(t)\varepsilon^3 + \ldots + y^{(n)}(t)\varepsilon^n, \qquad (17)$$

где y – искомый параметр системы; ε – малый параметр. Значение верхнего индекса $j = 0,1,2...n$ соответствует номеру приближения по ε. Нулевой верхний индекс, как и ранее, соответсвует центральному (невозмущенному) положению ротора.

В общем случае эллиптической орбиты центра ротора с полуосями a, b ($a \ge b$) малый параметр ε определяется через эксцентрисит $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\varepsilon = \frac{e}{g_0}, \qquad (18)$$

где g_0 – начальный зазор в лабиринтном уплотнении.

После подстановки (17) в систему уравнений (5), (7), (12) получим следующую систему уравнений относительно искомых параметров:

$$\begin{aligned}
&P_i = P_i^{(0)} + \varepsilon P_i^{(1)} \cdots, && \dot{m}_i = \dot{m}_i^{(0)} + \varepsilon \dot{m}_i^{(1)} \cdots,\\
&V_i = V_i^{(0)} + \varepsilon V_i^{(1)} \cdots, && \mu_i = \mu_i^{(0)} + \varepsilon \mu_i^{(1)} \cdots,\\
&g_i = g_i^{(0)} + \varepsilon g_i^{(1)} \cdots, && S_i = S_i^{(0)} + \varepsilon S_i^{(1)} \cdots,\\
&A_i = A_i^{(0)} + \varepsilon L_i\, g_i^{(1)} \cdots, && \tau_{(s)i} = \tau_{(s)i}^{(0)} + \varepsilon \tau_{(s)i}^{(1)} \cdots,\\
&\rho_i = \rho_i^{(0)} + \varepsilon \rho_i^{(1)} \cdots, && \tau_{(r)i} = \tau_{(s)i}^{(0)} + \varepsilon \tau_{(r)i}^{(1)} \cdots.
\end{aligned} \qquad (19)$$

В нулевом приближении примем, что ротор вращается с постоянной скоростью и поток является стационарным и осесимметричным. Тогда расход утечки будет соответствовать

$$\dot{m}_{i+1}^{(0)} = \dot{m}_i^{(0)} = \dot{m}^{(0)}. \qquad (20)$$

Суммарная утечка может быть определена с помощью итерационного процесса, связывающего изменения давления в каждой полости [18].

Алгоритм получения нулевого и первого приближений решения в виде (19) выполняется последовательно.

Для получения нулевого приближения выполняются следующие шаги:

– из уравнения (14) для критического потока определяется значение $P_{N-1}^{(0)crit}$ и из уравнения (16) – значение $\dot{m}^{(0)crit}$;

– если $P_0^{(0)} \ge P_0^{(0)crit}$, то поток является критическим, и стационарное решение получается из прогнозирования $P_{N-1}^{(0)crit}$ и проведения всех вышеуказанных шагов, пока не выполнится условие $P_0^{(0)} = P_0^{(0)\,crit}$ с заданной точностью;

– далее производится пересчет с конца в начало $P_i^{(0)\,crit}$ до первой полости;

[3] Верхний индекс (0) соответствует центральному положению ротора

– если $P_0^{(0)} < P_0^{(0)crit}$, то поток является докритическим, и предполагают значение $P_1^{(0)subcrit}$. С помощью уравнения (11) рассчитывается исходное значение $\dot{m}^{(0)subcrit}$ и проводятся последовательные вычисления по уравнению (14) до ситуации, когда давление в последней камере $P_N^{(0)subcrit}$ не совпадет с $P_N^{(0)}$.

Окружная скорость потока $V_i^{(0)}$ в i-й полости лабиринта приводит к появлению напряжений сдвига $\tau_{(s)i}^{(0)}$ и $\tau_{(r)i}^{(0)}$ на поверхностях статора и ротора соответственно. Для стационарного истечения газа уравнение равновесия моментов (6) можно записать в виде:

$$\dot{m}^{(0)}\left(V_i^{(0)} - V_{i-1}^{(0)}\right) = \\ = 2\pi R_{(r)}\left(\tau_{(r)i}^{(0)}\left(2H_i + L_i\right) - \tau_{(s)i}^{(0)} L_i\right). \quad (21)$$

Из совместного решения уравнений (7) и (21) определяется окружная скорость газа в полостях лабиринта.

Таким образом, уравнения нулевого порядка определяют расход утечки $\dot{m}^{(0)}$ и распределение давления $P_i^{(0)}$ от полости к полости. Поскольку касательные напряжения являются функциями окружной скорости и только известных переменных, уравнение (21) может быть решено итерационным методом для окружной скорости $V_i^{(0)}$ в каждой камере, если окружная скорость на входе уплотнения задана.

Первое приближение позволяет установить параметры возмущенного движения. Уравнения непрерывности и равновесия моментов первого порядка имеют вид:

$$G_{1i}\frac{\partial P_i^{(1)}}{\partial t} + G_{1i}\frac{V_i^{(0)}}{R_{(r)}}\frac{\partial P_{1i}}{\partial \varphi} + G_{1i}\frac{P_i^{(0)}}{R_{(r)}}\frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial t} + \\ + G_{3i}P_i^{(1)} + G_{4i}P_{i-1}^{(1)} + G_{5i}P_{i+1}^{(1)} = -G_{2i}\frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial t} - G_{2i}\frac{V_{oi}}{R_{(r)}}\frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial \varphi};$$

$$X_{1i}\frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial t} + X_{1i}\frac{V_i^{(1)}}{R_{(r)}}\frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \varphi} + X_{1i}\frac{A_i^{(0)}}{R_{(r)}}\frac{\partial P_i^{(1)}}{\partial \varphi} + \\ + X_{2i}V_i^{(1)} - \dot{m}^{(0)}V_{i-1}^{(1)} + X_{3i}P_i^{(1)} + X_{4i}P_{i-1}^{(1)} = X_{5i}g_i^{(1)}, \quad (22)$$

где $P_i^{(1)}$, $V_i^{(1)}$ – давление и окружная скорость первого порядка (первого приближения по ε (19)) в i-й полости; G_{ji}, X_{ji} – коэффициенты; $A_i^{(0)}$ – площадь поперечного сечения полости.

Коэффициенты G_{ji} и X_{ji} $(j = \overline{1, 5})$ являются комбинациями констант и переменных нулевого порядка.

Движение центра масс ротора описывается следующей зависимостью:

$$\varepsilon g_i^{(1)} = -a\cos(\omega t)\cos(\varphi) - b\sin(\omega t)\sin(\varphi) = \\ = -\frac{a}{2}\left[\cos(\varphi - \omega t) + \cos(\varphi + \omega t)\right] - \\ -\frac{b}{2}\left[\cos(\varphi - \omega t) - \cos(\varphi + \omega t)\right], \quad (23)$$

При этом пространственные и временные производные можно исключить, предполагая, что изменение давления и окружной скорости газа имеют вид, аналогичный форме движения центра ротора (23):

$$P_i^{(1)} = P_{ci}^{+}\cos(\varphi + \omega t) + P_{si}^{+}\sin(\varphi + \omega t) + \\ + P_{ci}^{-}\cos(\varphi - \omega t) + P_{si}^{-}\cos(\varphi - \omega t), \\ V_i^{(1)} = V_{ci}^{+}\cos(\varphi + \omega t) + V_{si}^{+}\sin(\varphi + \omega t) + \\ + V_{ci}^{-}\cos(\varphi - \omega t) + V_{si}^{-}\cos(\varphi - \omega t), \quad (24)$$

где $P_{si}^{+}, P_{ci}^{+}, P_{si}^{-}, P_{ci}^{-}, V_{si}^{+}, V_{ci}^{+}, V_{si}^{-}, V_{ci}^{-}$ – коэффициенты разложения по формам колебаний давления и окружной скорости в первом приближении.

Подстановка (23) и (24) в (22) и группировка коэффициентов при одноименных тригонометрических функциях приводит к системе восьми линейных уравнений для каждой полости, по форме аналогичных полученным Чайлдсом [18]:

$$\left(P_{si}^{+}, P_{ci}^{+}, P_{si}^{-}, P_{ci}^{-}, V_{si}^{+}, V_{ci}^{+}, V_{si}^{-}, V_{ci}^{-}\right)^{\mathrm{T}} = \\ = \frac{a}{\varepsilon}\left(F_{asi}^{+}, F_{aci}^{+}, F_{asi}^{-}, F_{aci}^{-}, W_{asi}^{+}, W_{aci}^{+}, W_{asi}^{-}, W_{aci}^{-}\right)^{\mathrm{T}} + \\ + \frac{b}{\varepsilon}\left(F_{bsi}^{+}, F_{bci}^{+}, F_{bsi}^{-}, F_{bci}^{-}, W_{bsi}^{+}, W_{bci}^{+}, W_{bsi}^{-}, W_{bci}^{-}\right)^{\mathrm{T}}, \quad (25)$$

где $F_{asi}^{+}, F_{aci}^{+}, F_{asi}^{-}, F_{aci}^{-}, W_{asi}^{+}, W_{aci}^{+}, W_{asi}^{-}, W_{aci}^{-}$ – коэффициенты, характеризующие влияние движения центра ротора вдоль оси a на формы колебаний давления и окружной скорости; $F_{bsi}^{+}, F_{bci}^{+}, F_{bsi}^{-}, F_{bci}^{-}, W_{bsi}^{+}, W_{bci}^{+}, W_{bsi}^{-}, W_{bci}^{-}$ – аналогично для оси b.

Уравнение (25) определяет возмущения давления и скорости, вызванные относительным смещением ротора. В результате динамические коэффициенты уравнения (1) находятся из уравнений первого порядка путем интегрирования возмущений давления вокруг ротора:

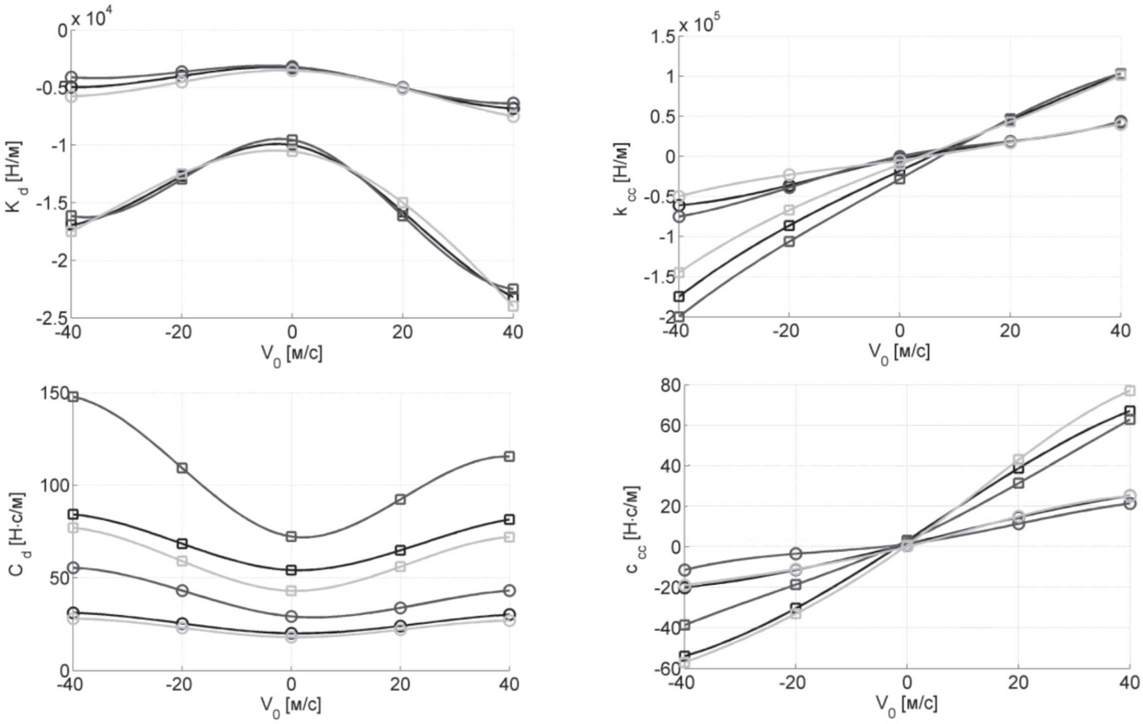

Рис. 5. Значения динамических коэффициентов в зависимости от скорости предзакручивания потока на входе: □ – 7,6 бар – АГТБ; ○ – 2,9 бар – АГТБ; □ – 7,6 бар – Шаррер; ○ – 2,9 бар – Шаррер; □ – 7,6 бар – МВВ; ○ – 2,9 бар – МВВ

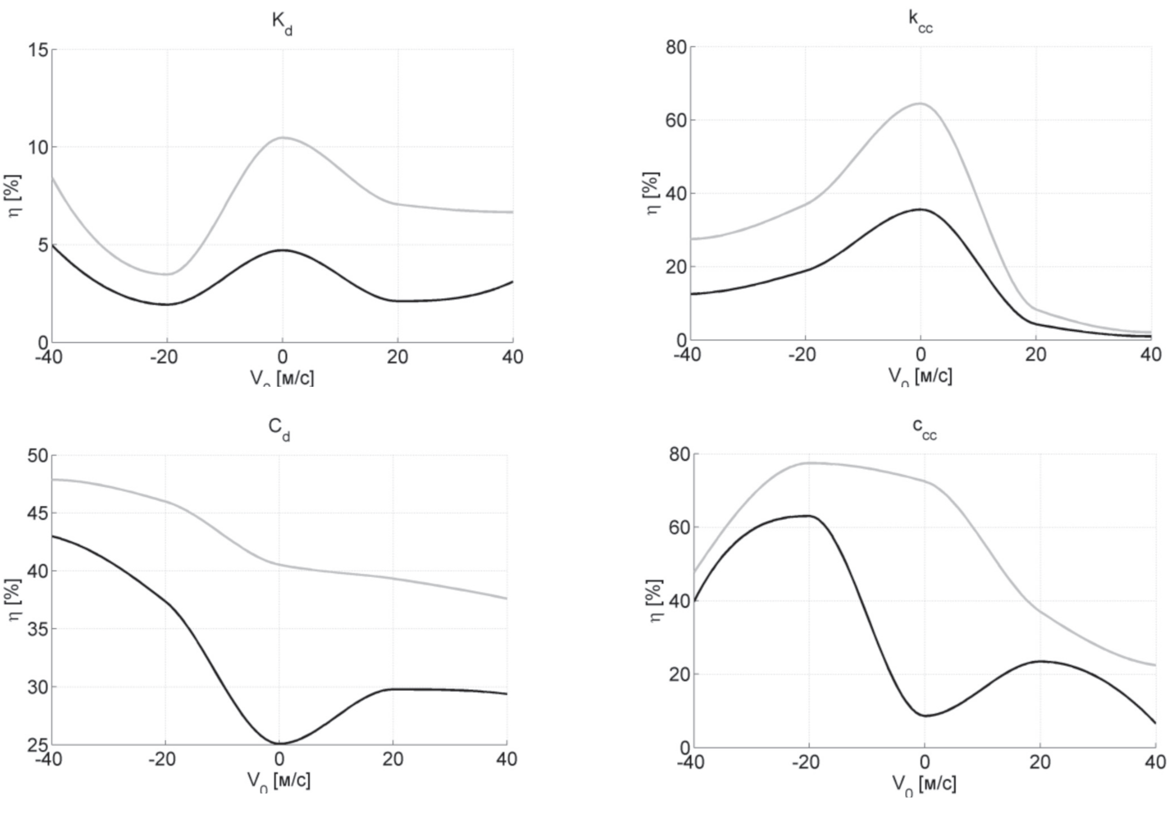

Рис. 6. Относительная ошибка расчета динамических коэффициентов при $P_{Nt} = 7,6$ бар: — АГТБ; — МВВ

$$K_d = \pi R_{(r)} \sum_{i=1}^{N_t-1} \left(F^+_{aci} + F^-_{aci} \right) L_i;$$

$$k_{cc} = \pi R_{(r)} \sum_{i=1}^{N_t-1} \left(F^+_{bsi} - F^-_{bsi} \right) L_i;$$

$$C_d = -\frac{\pi R_{(r)}}{\omega} \sum_{i=1}^{N_t-1} \left(F^+_{asi} - F^-_{asi} \right) L_i; \qquad (26)$$

$$c_{cc} = \frac{\pi R_{(r)}}{\omega} \sum_{i=1}^{N_t-1} \left(F^+_{bci} - F^-_{bci} \right) L_i.$$

Анализ результатов

Приведенный выше алгоритм был численно реализован при следующих значениях параметров системы: $N = 16$; $P_0 = 0{,}943$ бар; $R = 287$ Дж/кг·К; $\gamma = 1{,}40$; $L = 0{,}003175$ м; $H = 0{,}003175$ м; $\omega = 3000$ об/мин; $T = 300$ К; $\nu = 0{,}144 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

На графиках (рис. 5) представлены сравнения полученных результатов (обозначены аббревиатурой АГТБ) с результатами Мальвано (обозначены МВВ) [19] и экспериментальными данными Шаррера [20]. Каждый динамический коэффициент представлен в зависимости от скорости V_0 предзакручивания газа на входе в лабиринт для двух различных уровней входных давлений (2,9 и 7,6 бар).

Графики относительных погрешностей η расчета динамических коэффициентов в сравнении с данными расчета Мальвано [19] и экспериментов Шаррера [20] представлены на рис. 6. Погрешность вычислялась по формуле

$$\eta = 100 \times \left| \frac{\upsilon_{\exp} - \upsilon_{\text{mod}}}{\upsilon_{\exp}} \right| [\%], \qquad (24)$$

где υ_{mod} – значения динамических коэффициентов, рассчитанные авторами настоящей статьи (АГТБ) и по данным работы Мальвано (МВВ), $\upsilon_{\exp}$ – экспериментальные значения динамических коэффициентов [20].

Анализ сравнения позволяет сделать вывод, что предложенная методика расчета динамических коэффициентов приводит к более точным результатам.

Заключение

Представленные результаты показывают, что использование более совершенной модели лабиринтного уплотнения для коэффициента трения вполне обоснованно. Описанная расчетная схема и вычислительный алгоритм позволили повысить точность численного расчета динамических коэффициентов газового потока. Предложенная модель, описывающая динамику газового потока в лабиринтном уплотнении, может быть использована при моделировании и анализе устойчивости связанной системы гибких ротора и статора.

Список литературы

1. *Траупель В.* Тепловые турбомашины. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 344 с.
2. *Eser D., Kazakia J.* Air Flow in Cavities of Labyrinth Seals // International Journal of Engineering Science. 1995. No. 33. P. 2309–2326.
3. *Childs D.W., Scharrer J.K.* An Iwatsubo-based solution for labyrinth seals: comparison to experimental results // Trans. ASME. J. of Engr. for Gas Turbines and Power. 1986. No. 108. P. 325–331.
4. *Picardo A.M.* High Pressure Testing of See-Through Labyrinth Seals // Technical report for Mechanical Engineering Department, Texas A&M University. 2003. 27 p.
5. *Banakh L., Panovko G.* Oscillations of shaft on vibrating foundation // Journal of Vibroengineering. 2009. Vol. 11. No. 3. P. 415–420.
6. *Пановко Г.Я.* Лекции по основам вибрационных машин и технологий. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 192 с.
7. *Gouskov A.M., Panovko G.Y.* On parametric oscillations of pendular and rotor systems // Journal of Vibroengineering. 2008. Vol. 10. No. 3. P. 277–282.
8. *Alford J.S.* Protecting turbomachinery from self-excited rotor whirl // Trans. ASME. J. of Engineering for Power. 1965. No. 87. P. 333–344.
9. *Benckert H., Wachter J.* Flow induced spring coefficients of labyrinth seals for application in rotor dynamics // NASA Conf. Pub. 2133: Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery. Texas. 1980. P. 189–212.
10. *Kanki H., Morii S.* Destabilizing force of labyrinth seal // NASA Conf. Pub. 2443: Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery. Texas. 1986. P. 205–224.
11. *Iwatsubo T.* Evaluation of instability forces of labyrinth seals in turbines or compressors // NASA Conf. Pub. 2133: Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbo machinery. Texas. 1980. P. 139–168.

12. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
13. *Hirs G.G.* A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricating Films // ASME Journal of Lubrication Technology. 1973. No. 95. P. 137–146.
14. *Nelson C.* Rotordynamic Coefficients for Compressible Flow in Tapered Annular Seals // ASME Journal of Tribology. 1985. No. 107. P. 318–325.
15. *Nelson C., Nguyen D.* Comparison of Hirs' Equation with Moody's Equation for Determining Rotordynamic Coefficients of Annular Pressure Seals // ASME Journal of Tribology. 1987. No. 109. P. 144–148.
16. *Papaevangelou G., Evangelides C. and Tzimopoulos C.* A New Explicit Relation for Friction Coefficient f in the Darcy – Weisbach Equation // Proceedings of PRE10: Protection and Restoration of the Environment. Thessaloniki, 2010. P. 166–173.
17. *Neumann K.* Zur Frage der Verwendung von Durchblickdichtungen im Dampfturbinenbau // Maschinenbau-technilc. 1964. No. 13. P. 188–195.
18. *Childs D.W.* Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis. – N.: Wiley Interscience, 1993. – 312 p.
19. *Malvano R., Vatta F. and Viglianti A.* Rotordynamic Coefficients for Labyrinth Gas Seals: Single Control Volume Model // Meccanica. 2001. No. 36. P. 731–744.
20. *Scharrer J.* A Comparison of Experimental and Theoretical Results for Rotordynamic Coefficients for Labyrinth Gas Seals // Technical report SEAL-2-85, Texas AM University. 1985.

Материал поступил в редакцию 13.01.14

АНДРЕЕВ Федор Борисович

E-mail: **fedrun@yandex.ru**
Тел.: **(916) 796-66-97**

Аспирант в совместной аспирантуре кафедры РК-5 «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана и Ecole Centrale de Lyon. Сфера научных интересов: устойчивость динамических систем, динамика роторов, нелинейная динамика.

ГУСЬКОВ Александр Михайлович

E-mail: **gouskov_am@mail.ru**
Тел.: **(499) 263-69-88**

Доктор технических наук, профессор кафедры РК-5 «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Начальник отделения «Робототехника и Микросистемы» НИЦ «Курчатовский Институт». Сфера научных интересов: нелинейная динамика, динамика технологических систем, теория устойчивости движения. Автор более 150 публикаций, нескольких патентов.

ТУВЕРЕЗ Фабрис (THOUVEREZ Fabrice)

E-mail: **fabrice.thouverez@ec-lyon.fr**
Тел.: **+33 04 72 18 64 71**

Профессор Ecole Centrale de Lyon. Сфера научных интересов: нелинейная динамика, динамика структур с неопределенностями. Автор более 190 публикаций.

БЛАН Лоран (BLANC Laurent)

E-mail: **laurent.blanc@ec-lyon.fr**
Тел.: **+33 04 72 18 64 41**

Доцент Ecole Centrale de Lyon. Сфера научных интересов: нелинейная динамика, динамика структур с неопределенностями. Автор более 20 публикаций.