

УДК 621-88, 62-112.8, 517.958:532.5

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГЕРМЕТИЗИРУЕМЫХ СОЕДИНЕНИЯХ С ЗАДАННОЙ МИКРОТОПОГРАФИЕЙ ПОВЕРХНОСТИ*

В. В. Порошин, Д. Ю. Богомолов, А. А. Сыромятникова

В статье рассмотрена математическая модель течения в герметизируемом соединении с учетом микротопографии поверхности в трехмерном представлении. Для учета влияния шероховатости в канале, образованном поверхностями соединения, предложена методика, основанная на вычислении коэффициентов потока. Приведено сопоставление результатов, полученных с помощью разработанного программного комплекса и стандартных расчетных пакетов, показано их хорошее согласование.

Ключевые слова: герметизируемые соединения, микротопография поверхности, коэффициент потока, математическая модель течения

Введение

Герметизируемые металл-металлические соединения широко используются в промышленности. Они входят в конструкцию двигателей внутреннего сгорания, плунжерных насосов различных типов, в том числе глубинных и штанговых, компрессоров холодильных установок и т.д. Герметичность такого рода соединений во многом определяет эффективность работы вышеречисленных машин и устройств в целом. Разработка математических моделей течения жидкости в герметизируемых соединениях с учетом трехмерной микротопографии поверхностей для развития современных технологий проектирования является актуальной задачей.

Авторским коллективом предложены модели, основанные на уравнении Навье – Стокса в приближении О. Рейнольдса, и расчетные схемы с использованием метода конечных элементов. Влияние микротопографии поверхности учитывается с помощью коэффициентов потока,

впервые использованных в работах Патира и Чжена, Лунде и Тондера [1–4]. Подробные исследования, проведенные с помощью разработанных моделей для неподвижных и подвижных герметизируемых соединений, представлены в работах [5, 6]. Настоящая работа посвящена сопоставлению некоторых результатов, полученных с помощью разработанного программного комплекса и стандартных расчетных пакетов.

Математическая модель течения

В работе использована модель участка соединения с учетом трехмерной шероховатости рабочих поверхностей (рис. 1).

Неровности поверхностей $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ задаются на общей прямоугольной координатной сетке. Шаги сетки в направлениях x и y являются постоянными. Средний зазор между поверхностями H берется как расстояние

*Исследование выполнено в рамках реализации проекта 2.1.2.1589 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)».

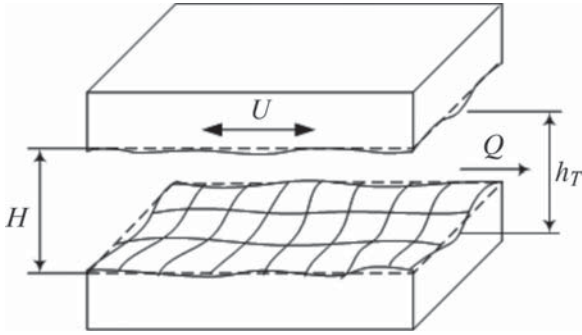


Рис. 1. Модель участка соединения

между их средними плоскостями. Текущий зазор задается как

$$h_T(x, y) = H + h_1(x, y) + h_2(x, y),$$

где H – средний зазор; h_T – текущий зазор; Q – утечки.

В разработанной модели для расчета течения рабочей среды в герметизируемых подвижных соединениях используется уравнение Навье – Стокса в приближении О. Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_T^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_T^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu U \frac{\partial h_T}{\partial y}, \quad (1)$$

где p – давление; μ – динамическая вязкость; U – скорость относительного движения поверхностей вдоль оси Oy ;

Значения коэффициентов потока рассчитываются на небольшом характерном участке соединения и далее могут быть использованы для расчета утечек в соединении в целом.

Для данной характерной прямоугольной области S размером $L_x \times L_y$ численно решается уравнение (1) с граничными условиями:

- 1) $p = p_A$ при $y = 0$;
- 2) $p = p_B$ при $y = L_y$;
- 3) $\partial p / \partial x = 0$ при $x = 0$, $x = L_x$.

Для решения задачи применялся метод конечных элементов. При построении конечно-элементной модели использованы двумерные треугольные симплекс-элементы. Дифференциальное уравнение было заменено эквивалентной вариационной задачей нахождения минимума функционала:

$$\chi = \iint_S h_T^3 \left[\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right)^2 \right] + 12\mu U \frac{\partial h_T}{\partial y} \cdot \tilde{p} dx dy \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $\tilde{p}$ – пробная функция.

Пробная функция на конечных элементах – линейная:

$$\tilde{p}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad x, y \in e_i, \quad (4)$$

где $\alpha_1^{e_i}, \alpha_2^{e_i}, \alpha_3^{e_i}$ – коэффициенты аппроксима-

ции. Пробная функция на элементе [7]:

$$\tilde{p}^{e_i}(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (a_i + b_i x + c_i y) \bar{p}_i + \\ + (a_j + b_j x + c_j y) \bar{p}_j + \\ + (a_m + b_m x + c_m y) \bar{p}_m \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$a_i = x_j y_m - x_m y_j$; $b_i = y_j - y_m$; $c_i = x_m - x_j$;
 $a_j = x_m y_i - x_i y_m$; $b_j = y_m - y_i$; $c_j = x_i - x_m$;
 $a_m = x_i y_j - x_j y_i$; $b_m = y_i - y_j$; $c_m = x_j - x_i$,
 где Δ – площадь треугольного элемента; i, j, m – узлы элемента.

Элементарный вклад в значение функционала:

$$\begin{aligned} \chi^{e_i} = & \frac{\iint_{e_i} h_T^3 dx dy}{4\Delta^2} \cdot \left[(b_i \bar{p}_i + b_j \bar{p}_j + b_m \bar{p}_m)^2 + \right. \\ & \left. + (c_i \bar{p}_i + c_j \bar{p}_j + c_m \bar{p}_m)^2 \right] + \\ & + \frac{6\mu}{\Delta} \cdot U \frac{\partial h_T}{\partial y} \times \left(\bar{p}_i \iint_{e_i} (a_i + b_i x + c_i y) dx dy + \right. \\ & + \bar{p}_j \iint_{e_i} (a_j + b_j x + c_j y) dx dy + \\ & \left. + \bar{p}_m \iint_{e_i} (a_m + b_m x + c_m y) dx dy \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где $\bar{p}_i$, $\bar{p}_j$ и $\bar{p}_m$ – значения давления в узлах конечного элемента e_i .

В точке минимума частные производные функционала по каждому узловому значению $\bar{p}_r$ обращаются в ноль. Для вычисления данной производной сначала вычисляются производные от функционала на всех элементах, содержащих узел r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{e_i}}{\partial \bar{p}_r} = & \frac{\iint_{e_i} h_T^3 dx dy}{2\Delta^2} \cdot \left[b_r (b_r \bar{p}_r + b_s \bar{p}_s + b_t \bar{p}_t) + \right. \\ & \left. + c_r (c_r \bar{p}_r + c_s \bar{p}_s + c_t \bar{p}_t) \right] + \\ & + \frac{6\mu}{\Delta} \cdot U \frac{\partial h_T}{\partial y} \cdot \iint_{e_i} (a_r + b_r x + c_r y) dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Затем полученные зависимости суммируются по всем элементам, содержащим $\bar{p}_r$, и приравниваются к нулю. После добавления граничных условий система линейных уравнений может быть записана в матричной форме:

$$\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{B}, \quad (8)$$

где $\mathbf{K}$ – матрица коэффициентов; $\bar{\mathbf{p}}$ – столбец решений; $\mathbf{B}$ – столбец свободных членов.

Полученные в результате расчетов карты давлений используются для нахождения утечек на участке соединения и расчета коэффициентов потока. В каналах с неподвижными стенками ($U = 0$) вычисляется только статический коэф-

фициент потока. При наличии относительного движения стенок канала коэффициенты потока вычисляются отдельно для статической и динамической составляющих потока.

При вычислении коэффициента статического потока ϕ_y принимаются условия наличия градиента давления и отсутствия скорости. Он находится как отношение утечек, рассчитанных с учетом шероховатости Q_{ys} и без ее учета $\bar{Q}_{ys}$ (расчет $\bar{Q}_{ys}$ производится по известной аналитической зависимости [8]):

$$\phi_y = Q_{ys} / \bar{Q}_{ys}; \quad (9)$$

$$Q_{yd} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{((h_T)_i)^3}{12\mu} \frac{(p_i^m - p_i^{m-1})}{\Delta y} + \frac{U(h_T)_i^m}{2} \right) \Delta x;$$

$$\bar{Q}_{ys} = -L_x \frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (10)$$

где n – количество разбиений сетки по оси Ox ; m – количество разбиений сетки по оси Oy .

При нахождении коэффициента динамического потока θ_y принимаются условия наличия скорости и отсутствия градиента давления. Также как коэффициент статического потока, он вычисляется как отношение утечек, рассчитанных с учетом шероховатости Q_{yd} и без ее учета $\bar{Q}_{yd}$ ($\bar{Q}_{yd}$ определяется по известной

аналитической зависимости [8]):

$$\theta_y = Q_{yd} / \bar{Q}_{yd};$$

$$Q_{yd} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{((h_T)_i)^3}{12\mu} \frac{(p_i^m - p_i^{m-1})}{\Delta y} + \frac{U(h_T)_i^m}{2} \right) \Delta x; \quad (11)$$

$$\bar{Q}_{yd} = L_x \left(-\frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{UH}{2} \right).$$

Оба коэффициента потока безразмерны и не зависят от конкретных значений давления, вязкости и скорости относительного перемещения стенок. Значения коэффициентов определяются отношением среднего зазора к высоте шероховатости и формой шероховатости. Если исследуемый канал не имеет других видов неровностей поверхности стенок, кроме шероховатости, то полученные коэффициенты потока могут быть непосредственно подставлены в аналитическое выражение для определения утечек.

Для конечно-элементного моделирования течения сплошной среды в узких каналах с учетом трехмерной топографии их поверхности и расчета коэффициентов потока авторами разработана программа *PenetrMv**. На рисунке 2 представлено одно из основных окон программы.

* Программа зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам.

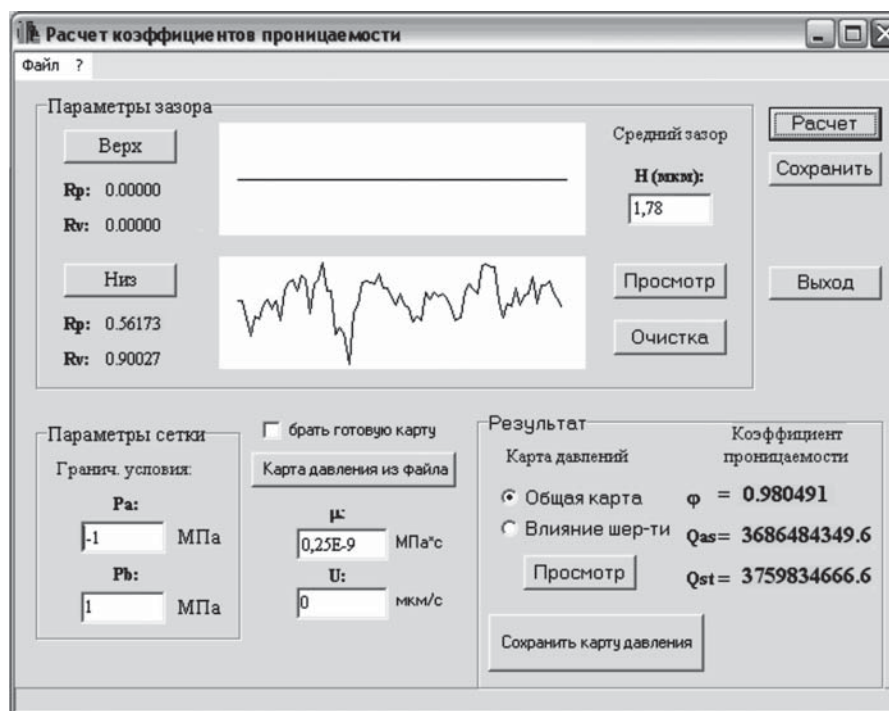


Рис. 2. Главное окно программы *PenetrMv*

Сравнительный анализ результатов расчета течения на участке неподвижного соединения

Для проверки адекватности разработанной модели был проведен сравнительный анализ результатов, полученных с помощью программы *PenetrMv* и универсального сертифицированного расчетного пакета *ANSYS*.

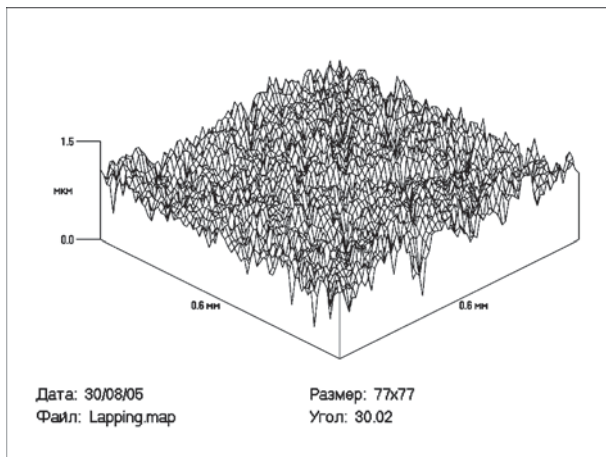
В качестве исходных данных о топографии канала были использованы результаты измерения реальных технологических поверхностей. Исследования проводились для изотропной поверхности после притирки и для поверхности с ярко выраженными следами токарной обработки (рис. 3). Неровности поверхностей после токарной обработки при проведении расчетов располагались как вдоль, так и перпендикулярно градиенту давления. Это позволило оценить

точность расчетов для трех характерных областей значения коэффициента анизотропии шероховатости поверхности γ ($\gamma < 1$, $\gamma \approx 1$, $\gamma > 1$).

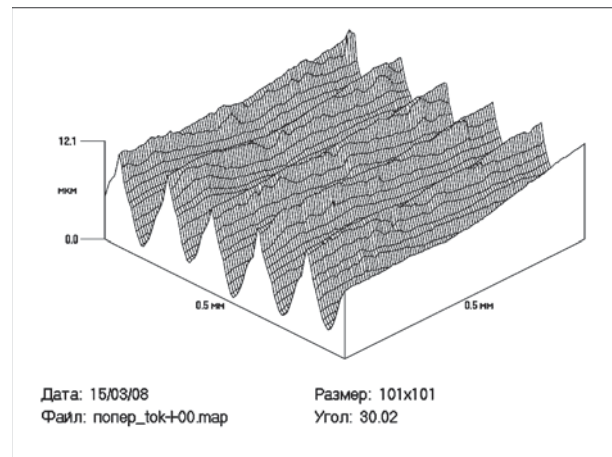
Из-за того, что пакет *ANSYS* предъявляет большие требования к вычислительным ресурсам, расчеты для поверхности после притирки выполнялись на области размером $0,25 \times 0,25$ мм с наибольшей высотой профиля $R_{\max} = 1,22$ мкм и коэффициентом анизотропии $\gamma = 0,87$. При построении конечно-элементной модели канала одна поверхность принималась гладкой, а другая – после притирки (рис. 4).

Была проведена серия расчетов со значениями среднего зазора H от 0,7 до 2 мкм. В качестве рабочей среды задавалось масло с вязкостью 30 мПа·с. Перепад давлений задавался равным 10 кПа.

Карта давления в канале, полученная с по-

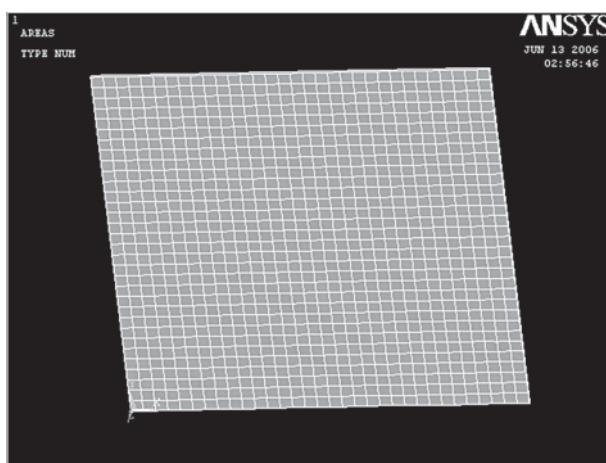


а

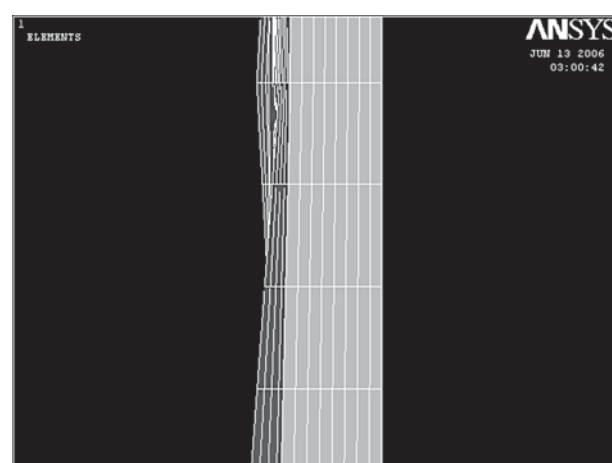


б

Рис. 3. Топографические карты поверхностей:
а – после притирки; б – после токарной обработки



а



б

Рис. 4. Конечно-элементная модель канала, где одна поверхность после притирки, а другая – гладкая

мощью программы *PenetrMv* (рис. 5, а), далее используется для нахождения утечек. Для наглядности и возможности количественной оценки влияния топографии на распределение давлений в канале программа позволяет выделить влияние шероховатости на отдельной карте (рис. 5, б).

Характер зависимости величины утечек от зазора практически одинаковый, как при расчете с помощью программы *PenetrMv*, так и в среде *ANSYS* (рис. 6). Поскольку рассматриваемая поверхность имеет анизотропию, близкую к 1, утечки, полученные при численном моделировании, незначительно отличаются от расхода, вычисленного по аналитической зависимости без учета шероховатости, что объясняется извилистостью каналов, образованных неровностями. При малых значениях зазора,

когда вершины неровностей почти перекрывают поток, возрастает боковая утечка.

Расчеты для поверхности после токарной обработки проводились на области размером $0,16 \times 0,16$ мм с наибольшей высотой профиля $10,09$ мкм, при ориентации неровностей перпендикулярно градиенту давлений, коэффициент анизотропии $\gamma=0,14$. При построении модели канала одна поверхность принималась гладкой, а другая – после точения (рис. 7).

Величина среднего зазора менялась от $6,5$ до 12 мкм, что в относительных величинах соответствует диапазону изменения зазора в предыдущем эксперименте. Полученные карты распределения давления в канале (рис. 8) показывают, что при небольшой величине зазора наблюдаются две области – высокого и низкого давлений. Эти области разделены сужением

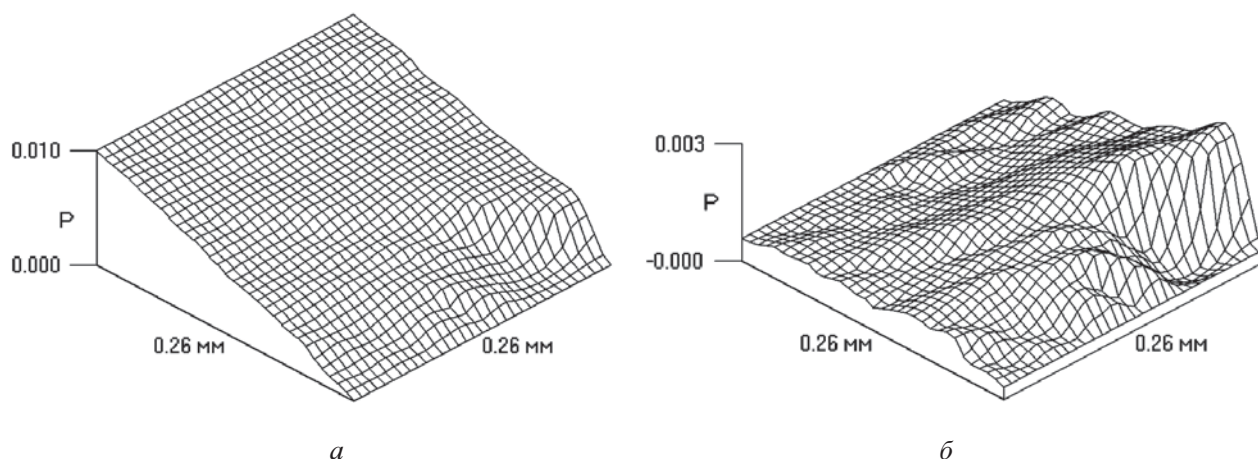


Рис. 5. Карты давления p (МПа) с учетом влияния шероховатости в канале с поверхностью после притирки при $H = 0,7$ мкм:
а – общее распределение давления; б – влияние шероховатости

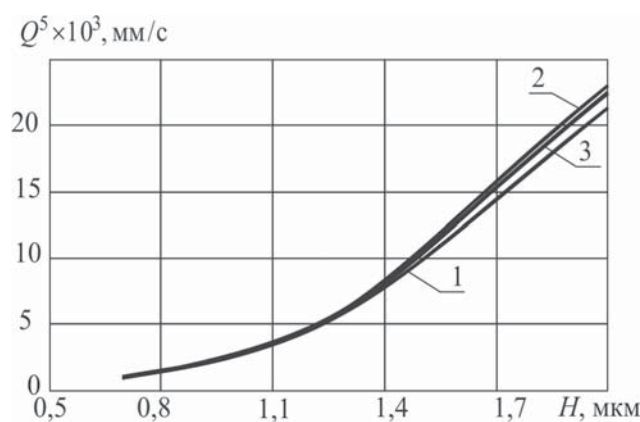


Рис. 6. Зависимость утечек от величины зазора для канала с поверхностью после притирки:
1 – расчет в *ANSYS*; 2 – аналитический расчет (10); 3 – расчет в *PenetrMv*

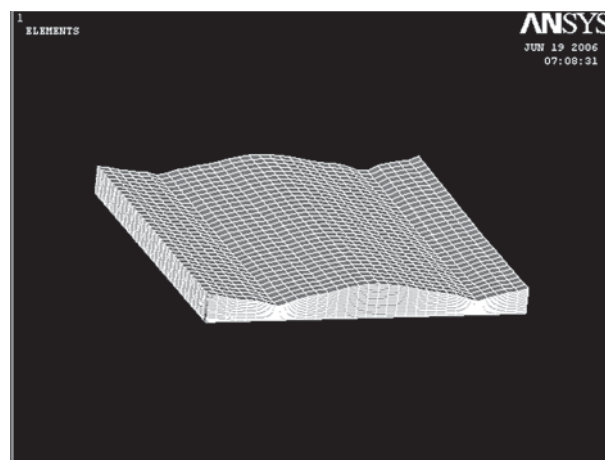


Рис. 7. Конечно-элементная модель канала, где одна поверхность после токарной обработки, а другая – гладкая

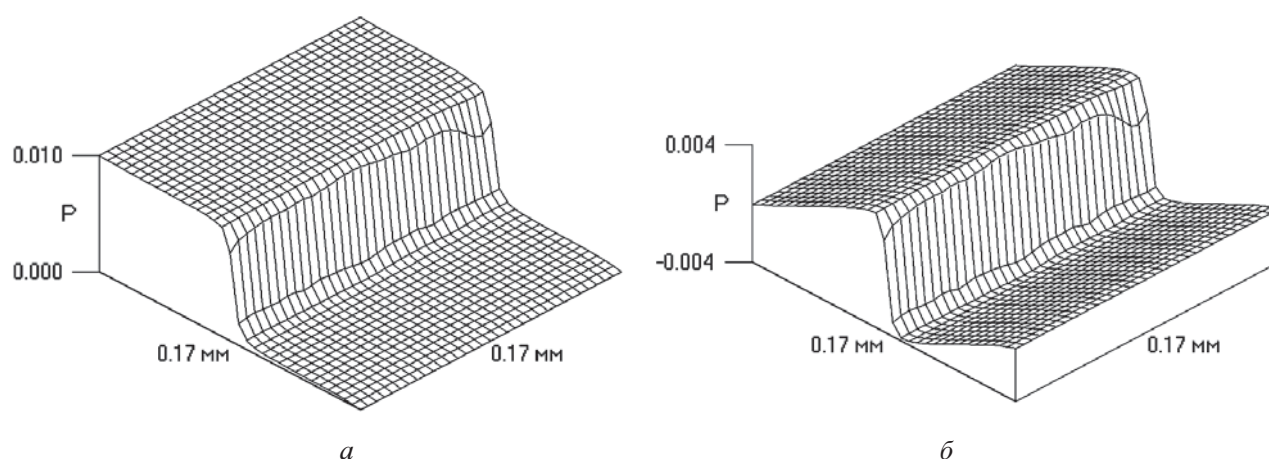


Рис. 8. Карты давления p (МПа) с учетом влияния шероховатости в канале с поверхностью после токарной обработки (следы обработки перпендикулярны потоку) при $H=6,5$ мкм:
а – общее распределение давления; б – влияние шероховатости

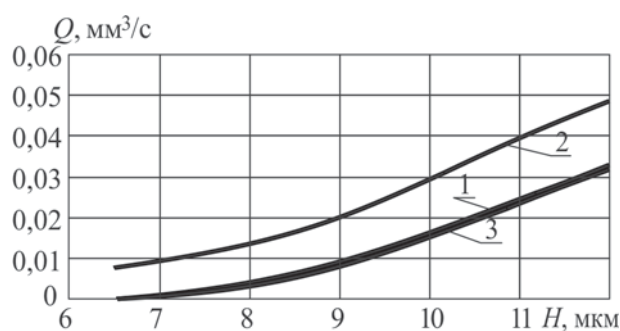


Рис. 9. Зависимость величины утечки от зазора для канала с поверхностью после токарной обработки (следы обработки перпендикулярны потоку): 1 – расчет в ANSYS; 2 – аналитический расчет (10); 3 – расчет в PenetrMv

канала, на котором происходит резкий перепад давления. Аналогичное поведение давления наблюдается и на картах, полученных с помощью пакета ANSYS.

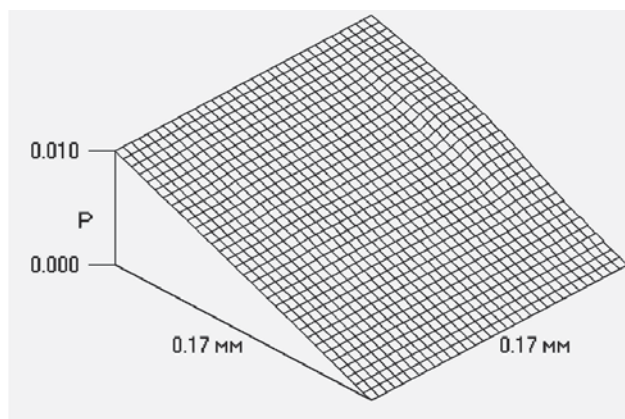
Расчетные значения утечек представлены на рис. 9. При ориентации неровностей поверхности перпендикулярно градиенту давления расход, полученный с помощью разработанной программы и пакета ANSYS, значительно меньше, чем найденный по аналитической зависимости при заданном среднем значении зазора. Это объясняется тем, что такая ориентация неровностей приводит к уменьшению поперечного сечения зазора. Характер зависимости вели-

чины утечек от зазора практически одинаковый при расчете с помощью программы PenetrMv и в среде ANSYS.

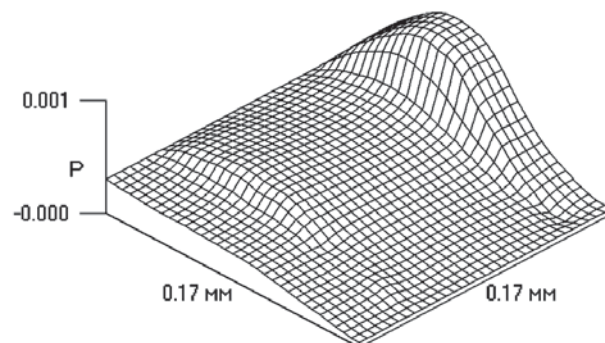
Аналогичные расчеты были проведены для поверхности после токарной обработки с неровностями, ориентированными вдоль заданного градиента давлений. При этом значение коэффициента анизотропии $\gamma=3,36$, а все прочие размеры и параметры остались неизменными. Величина зазора изменялась аналогично предыдущему эксперименту от 6,5 до 12 мкм.

Карты распределения давления, полученные при помощи программы PenetrMv (рис. 10), показывают, что давление изменяется практически линейно даже при небольших значениях зазора. Это происходит потому, что продольная ориентация шероховатости поверхности оказывает незначительное влияние на характер течения жидкости в зазоре по сравнению с течением в гладком зазоре.

Зависимость величины утечек от зазора (рис. 11) показывает незначительное расхождение между результатами расчета в ANSYS и в программе PenetrMv. Из-за продольной ориентации шероховатости, приводящей к увеличению поперечного сечения зазора, расход, полученный при численном моделировании, несколько больше чем расход, вычисленный аналитически без учета шероховатости.



а



б

Рис. 10. Карты давлений p (МПа) с учетом влияния шероховатости в канале с поверхностью после токарной обработки (следы обработки вдоль потока) при $H=6,5$ мкм:

а – общее распределение давления; б – влияние шероховатости

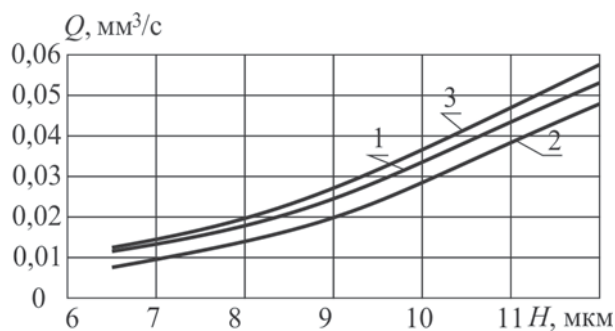


Рис. 11. Зависимость величины утечки от зазора для канала с поверхностью после токарной обработки (следы обработки вдоль потока):

1 – расчет в ANSYS;

2 – аналитический расчет (10);

3 – расчет в PenetrMv

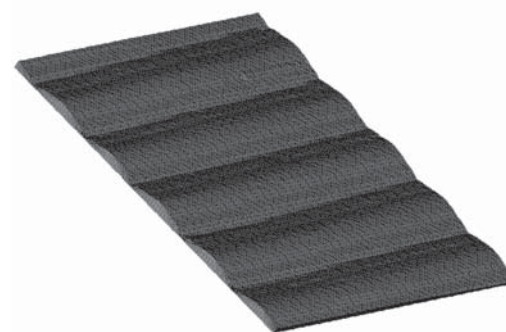


Рис. 12. Геометрическая модель канала на участке соединения в среде StarCD

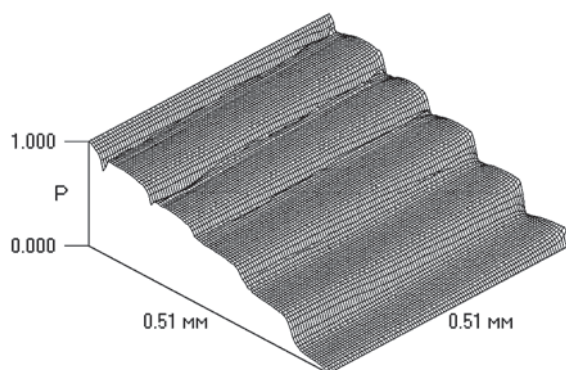


Рис. 13. Карта давления p (МПа) в канале при $U=10$ м/с

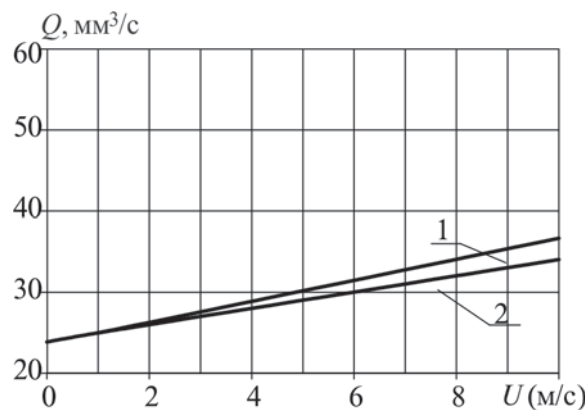


Рис. 14. Зависимость величины утечки от скорости для участка подвижного соединения с поверхностью после токарной обработки 1 – расчет в PenetrMv; 2 – расчет в StarCD

Сравнительный анализ результатов расчета течения на участке подвижного соединения

Для сопоставления результатов расчета утечек на участке подвижного соединения проведена серия вычислительных экспериментов с использованием программы *PenetrMv* и расчетного пакета *StarCD*.

Топография поверхности после токарной обработки размером 0,5×0,5 мм с неровностями, ориентированными перпендикулярно градиенту давления, была портирована в среду *StarCD* и использована для построения геометрической модели канала на участке подвижного соединения (рис. 12).

При расчетах динамическая вязкость жидкости принята 1 мПа·с (вода), перепад давлений – 1 МПа; средний зазор в соединении – 9 мкм; значение скорости движения стенки соединения варьировалось от 0 до 10 м/с. Полученная с помощью программы *PenetrMv* карта давлений в канале (рис. 13) используется для вычисления утечек.

На рисунке 14 приведены графики утечек, рассчитанных с использованием программы *PenetrMv* и пакета *StarCD*. При значениях скорости от 0 до 1 м/с разница между полученными результатами не превышает 0,02%, при значении 10 м/с она составляет ≈ 7% для заданных условий.

Заключение

Сопоставление результатов, полученных с помощью разработанного программного комплекса и универсальных расчетных пакетов, показало их хорошее согласование. В практических расчетах герметичности щелевых каналов универсальные расчетные пакеты требуют больших временных затрат, чем специализированная программа *PenetrMv*. Кроме того, программа *PenetrMv* легче в использовании и освоении, чем ориентированный на специалиста пакет *ANSYS*.

Предложенная математическая модель и разработанная на ее основе программа *PenetrMv* могут применяться на стадии проектирования подвижных и неподвижных герметизируемых

металл-металлических соединений для предварительной оценки их герметичности с учетом микротопографии поверхности.

Список литературы

1. Patir, N., Cheng, H.S. An average flow model of determining effects of three dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication // ASME Journal of Lubrication Technology. 1978. Vol. 100. No. 1. P. 12–17.
2. Patir N., Cheng H.S. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces // ASME Journal of Lubrication Technology. 1979. Vol. 101. No. 1. P. 220–229.
3. Lunde, L., Tonder, K. Numerical simulation of the effects of three dimensional roughness on hydrodynamic lubrication: – effects of boundary conditions / Proc. of 4th Int. Trib. Conference Austrib'94: Australia, 1994. P. 113–118.
4. Lunde, L., Tonder, K. Pressure and shear flow in a rough hydrodynamical bearing, flow factor calculation // ASME Journal of Tribology. 1997. Vol. 119. No. 3. P. 549–555.
5. Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Сыромятникова А.А. Математическая модель течения рабочей среды в подвижных металл-металлических соединениях с учетом трехмерной топографии рабочих поверхностей // Вест. Брянского государственного технического университета. 2008. № 2(18). С. 97–102.
6. Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Сыромятникова А.А. Течение рабочей среды в подвижных соединениях с учетом трехмерной топографии их рабочих поверхностей / Перспективные технологии, оборудование и аналитические системы для материаловедения и наноматериалов: Труды 7-ой международной Казахстанско-Российско-Японской научной конференции: М.: МГИУ, 2009. С. 433–446.
7. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

Материал поступил в редакцию 25.01.2010

**ПОРОШИН
Валерий
Владимирович**

E-mail: nis@msiu.ru
Тел. +7 (495) 677-96-70

Доктор технических наук, профессор кафедры «Технология и металлорежущие системы автомобилестроения» МГИУ. Область научных интересов – трибология и линейные измерения. Автор более 130 научных трудов, патентов и свидетельств.

**БОГОМОЛОВ
Дмитрий Юрьевич**

E-mail: nis@msiu.ru
Тел. +7 (495) 677-96-70

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Общая и прикладная математика» МГИУ. Область научных интересов – измерение и анализ топографии поверхности, моделирование течения и тепломассопереноса в тонких слоях. Автор более 40 научных трудов.

**СЫРОМЯТНИКОВА
Анна Алексеевна**

E-mail: ann_lik@mail.ru
Тел. +7 (495) 677-96-70

Старший научный сотрудник научно-исследовательского отдела МГИУ. Область научных интересов – математическое моделирование герметичности подвижных соединений. Автор более 10 научных публикаций.