УДК 621.31

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВИБРАЦИЙ В МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ПОГРУЖНЫХ НАСОСАХ ДЛЯ НЕФТЕДОБЫЧИ

О. В. Бармина, О. А. Волоховская

В статье предложена методика расчета внешних и внутренних колебаний системы «ротор–статор», основанная на представлении подсистем «ротор» и «статор» балками постоянной плотности с приведенными инерционными и жесткостными характеристиками, связанных между собой через масляные и нефтяные слои подшипников и направляющих аппаратов. Вследствие неопределенности расположения неуравновешенностей на валу в произвольно взятом объекте осуществлено моделирование их распределения вдоль оси ротора методом Монте-Карло. Методика продемонстрирована примером расчета вибраций секции насоса при ее установке на стенде.

Ключевые слова: *центробежный насос, многоступенчатые конструкции, вибрационная активность, силы дисбаланса, масляный слой, матрица податливостей, вынужденные колебания, случайное распределение.*

Введение

В Российской Федерации более 65 % нефти добывается с помощью скваженных электроприводных центробежных насосов (ЭЦН). Широкое применение ЭЦН обусловлено в основном простотой в обслуживании при больших отборах жидкости из скважин по сравнению с компрессорной добычей и подъемом жидкости насосами других типов, а также относительно низкими энергетическими затратами (коэффициент полезного действия ЭЦН может достигать 0,35) [1].

По конструкции ЭЦН являются весьма сложными многоэлементными динамическими системами (многосекционными и многоступенчатыми). В связи с этим основным фактором, отрицательно влияющим на надежность и ресурс насосов, является их вибрационная активность, на уровень которой накладываются весьма жесткие ограничения. Многочисленные примеры из практики эксплуатации насосов показывают, что под действием вибрационных сил систематически выходят из строя подшипники, появляется односторонний износ цапф, что ведет к сокращению срока службы ЭЦН. В связи с этим выявление факторов, в наибольшей степени влияющих на вибрационную активность ЭЦН, и создание методов количественной оценки уровней вызываемых ими вибраций являются необходимыми составляющими решения актуальной научно-технической проблемы снижения виброактивности насосов и повышения их надежности.

Данная работа посвящена созданию методики оценки вибрационных характеристик секции погружного нефтяного насоса в стендовых условиях (то есть при его установке на горизонтальном испытательном стенде) с целью возможного сопоставления с результатами стендовых испытаний секции в условиях, приближенных к полевым, если таковые будут проведены в будущем. При таких испытаниях насос располагается на горизонтальном стенде, но испытывается при рабочих расходах жидкости и на рабочих частотах вращения.

Структурная схема насосной секции и анализ ее функционирования как динамической системы

Рабочим органом скважинного ЭЦН служит насосная ступень с цилиндрическими или наклонно-цилиндрическими лопатками, состоящая из рабочего колеса и направляющего аппарата. Ступени размещаются в расточке цилиндрического корпуса каждой секции. В собранном виде ЭЦН обычно состоит из нескольких соединенных между собой секций (рис. 1), каждая из которых содержит несколько десятков рабочих ступеней (от 30 до 200 в зависимости от их монтажной высоты). Для возможности сборки ЭЦН с таким количеством ступеней и разгрузки вала от осевой силы применяется плавающее рабочее колесо, которое удерживается от проворота призматической шпонкой, но может свободно перемещаться в осевом направлении в промежутке между опорными поверхностями направляющих аппаратов.

Особенностями работы насосной секции в полевых условиях являются неопределенность опирания статора секции на обсадную трубу и неопределенность величины и распределения по оси вала неуравновешенности рабочих колес. Оба фактора приводят к невозможности определения с достаточной точностью вибрационных характеристик секции ЭЦН даже по данным исследований ее вибраций в лабораторных условиях, а все проведенные ниже численные расчеты носят оценочный характер.

В системе такой конструкции, как ЭЦН, необходимо рассматривать колебания ротора и статора относительно друг друга («внутренние» колебания) и статора насоса относительно обсадной трубы («внешние» колебания). Взаимодействие статора с обсадной трубой в данной работе не рассматривается.

В экспериментальных исследованиях [2] измерялись характеристики только внешних колебаний, какие-либо сведения или даже упоминания о колебаниях ротора и статора относительно друг друга в работе [2] и известных авторам источниках отсутствуют.

Структурная схема для динамического анализа секции ЭЦН в стендовых условиях (характер крепления на стенде не конкретизирован) состоит из следующих подсистем, включающих в себя основные элементы рассматриваемого объекта (рис. 2) [3]:

– ***валопровод (ротор)*** – вал с втулками и рабочими колесами, находящийся под действием возбуждающих сил неуравновешенности и опорных реакций (природа опорных реакций может быть различной, а их характер и значения зависят, в том числе, от способа крепления секции на стенде). Сюда же включен ротор приводного электродвигателя;

– ***совокупность масляных (нефтяных) слоев*** в подшипниках, между втулками рабочих колес и направляющими аппаратами (коэффициенты динамической жесткости и демпфирования в подшипниках и между втулками рабочих колес и направляющими аппаратами имеют различные значения для стендовых и полевых условий, так как зависят от радиальной силы, действующей на подшипники. Но различия в их значениях незначительны из-за малых удельных нагрузок на подшипники и втулки колес.);

– «***статор–фундамент***» (статор включает в себя корпус, направляющие аппараты, подшипники, концевые элементы, а также статор приводного электродвигателя; фундамент – обсадная труба, представляет собой упругое, но достаточно жесткое основание, взаимодействие

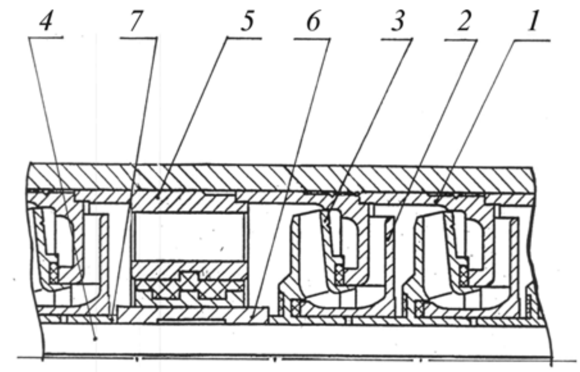


Рис. 1. Фрагмент секции ЭЦН: 1, 2 – направляющий аппарат; 3 – рабочее колесо; 4 – вал; 5 – промежуточный подшипник; 6 – втулка подшипника; 7 – защитная втулка вала

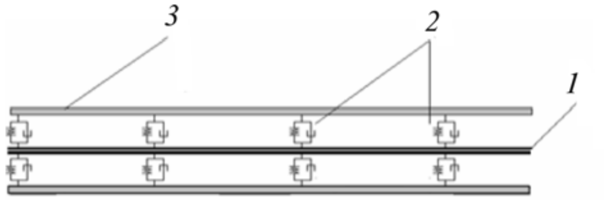


Рис. 2. Структурная схема секции ЭЦН при ее расположении на горизонтальном стенде: 1 – ротор; 2 – масляные слои; 3 – статор

с которым в данной работе не рассматривается).

Анализ конструкции ЭЦН и экспериментальных данных [2] позволяет сделать ряд заключений.

1. Из всех существующих в турбомашинах видов колебаний в рассматриваемом объекте основными являются вынужденные колебания под воздействием сил инерции от неуравновешенности рабочих колес, имеющие частоту, равную частоте вращения вала. Причинами неуравновешенности вращающихся деталей могут быть отклонения в размерах за счет допусков на обработку, монтажные неточности в соединении полумуфт, раковины в литых металлах, неравномерный износ в процессе эксплуатации и т.п. Интенсивность вынужденных колебаний высока только на критических или близких к ним частотах вращения, т.е. в областях резонансов. По данным работы [2], наибольшая вибрация в системе наблюдается именно с оборотной частотой.

2. В установках ЭЦН возможно возбуждение параметрических колебаний, характерных для роторов с анизотропной жесткостью вала. Для возникновения таких колебаний необходимым условием является неравножесткость сечения вала по двум главным осям инерции ротора и действие поперечных сил собственного веса ротора. В данном случае анизотропия жесткости сечения вала существует и вызвана наличием шпоночного паза в вале и ступицах рабочих колес. В экспериментальных исследованиях [2] в ряде случаев в частотном спектре секции насоса, снятом при рабочих и критических оборотах, была обнаружена интенсивная вибрация двойной и учетверенной частоты, свидетельствующая о возникновении параметрических колебаний.

3. Из опыта эксплуатации сходных объектов известно, что вторым по распространенности видом вибрации в турбомашинах являются поперечные *самовозбуждающиеся колебания (автоколебания)* [4, 5].

Однако, как отмечается в работе [2], при исследовании вибраций насосной секции ДВС5-50 автоколебания не были обнаружены. Причиной автоколебаний являются неконсервативные силы, возникающие в масляном слое в подшипниках («масляное» возбуждение), в лабиринтных уплотнениях (лабиринтные силы) и на рабочих колесах (венцовые силы) [4]. В данном объекте наблюдается масляное возбуждение в подшипниках. Аналогичное возбуждение существует в нефтяном слое между втулками рабочих колес и ступицами направляющих аппаратов, что провоцирует прямую прецессию. Лабиринтные силы отсутствуют, так как нет лабиринтных уплотнений. Венцовые силы, действующие на рабочие колеса насосов, провоцируют обратную прецессию и поэтому их действие противоположно действию масляного возбуждения. В насосах масляные и венцовые силы частично или полностью компенсируют друг друга.

Известно, что частота самовозбуждающихся колебаний совпадает с одной из собственных частот колебаний системы. Условием возникновения автоколебаний является достижение частотой вращения ротора так называемого порогового значения $n_{пор}$ [4]. Тот факт, что самовозбуждающиеся колебания не были обнаружены при испытании секции насоса в работе [2], означает, что пороговая частота вращения при всех режимах испытаний была выше рабочей частоты вращения ротора: $n_{пор} > n_{раб}$=50 об/с.

В данной работе проведено исследование вынужденных колебаний отдельно взятой секции ЭЦН (системы «ротор–статор») под воздействием динамических сил от неуравновешенности рабочих колес, так как именно этот вид колебаний является основным в данном объекте.

Методика расчета опорных реакций и динамических смещений в системе «ротор–статор» ЭЦН

Для расчета колебаний системы «ротор–статор» секции ЭЦН в соответствии со структурной схемой (см. рис. 2) будем рассматривать ротор и статор как однородные балки (постоянного сечения с приведенными инерционными параметрами), связь между которыми осуществляется через масляные слои подшипников и нефтяные пленки между втулками рабочих колес и направляющими аппаратами. Погонные массы ротора $\nu_р$ и статора $\nu_с$ определяются соотношениями:

$$\nu_р = (m_в + m_{вт.в} + m_{кол})/\, l_р; \qquad \nu_с = (m_{тр} + m_{вт.т} + m_{н.а})/\, l_с, \tag{1}$$

где $l_р$ – длина ротора секции; $l_с$ – длина статора (трубы); $m_в$ – масса вала; $m_{вт.в}$ – масса всех втулок на валу; $m_{кол}$ – масса всех рабочих колес; $m_{тр}$ – масса участка трубы длиной $l_с$; $m_{вт.т}$ – суммарная масса втулок на трубе; $m_{н.а}$ – масса всех направляющих аппаратов.

Для проведения расчета нужно знать величины и распределение по валу возбуждающих сил от неуравновешенности рабочих колес. Поскольку масса колес существенно превосходит массу вала, то соответствующими валу распределенными силами неуравновешенности можно пренебречь и назначить число n_p сечений, где приложены силы дисбаланса колес, и координаты их расположения на валу. При этом максимальное значение n_p равно числу колес.

На рисунке 3 показаны колесо со шпоночным пазом и параметр его линейной неуравновешенности – вектор-эксцентриситет **e**, характеризуемый модулем e и углом φ .

Проекции $f_1^{(\alpha)}$ и $f_2^{(\alpha)}$ силы инерции от неуравновешенности колес в сечении с номером α ротора на оси x_1 и x_2 равны [4]:

$$f_1^{(\alpha)} = F_1^{(\alpha)} \cos\omega t + F_3^{(\alpha)} \sin\omega t; \quad f_2^{(\alpha)} = F_2^{(\alpha)} \cos\omega t + F_4^{(\alpha)} \sin\omega t; \tag{2}$$

$$F_1^{(\alpha)} = F_4^{(\alpha)} = m^{(\alpha)}\omega^2 e_1^{(\alpha)}; \quad F_2^{(\alpha)} = -F_3^{(\alpha)} = m^{(\alpha)}\omega^2 e_2^{(\alpha)}, \tag{3}$$

где $m^{(\alpha)}$ – масса участка вала; $e_1^{(\alpha)}$, $e_2^{(\alpha)}$ – составляющие эксцентриситета; ω – частота вращения вала; $F_1^{(\alpha)}=F_4^{(\alpha)}$, $F_2^{(\alpha)}=-F_3^{(\alpha)}$ – проекции силы инерции от неуравновешенности в сечении с номером α ротора на подвижные оси x_1' и x_2'.

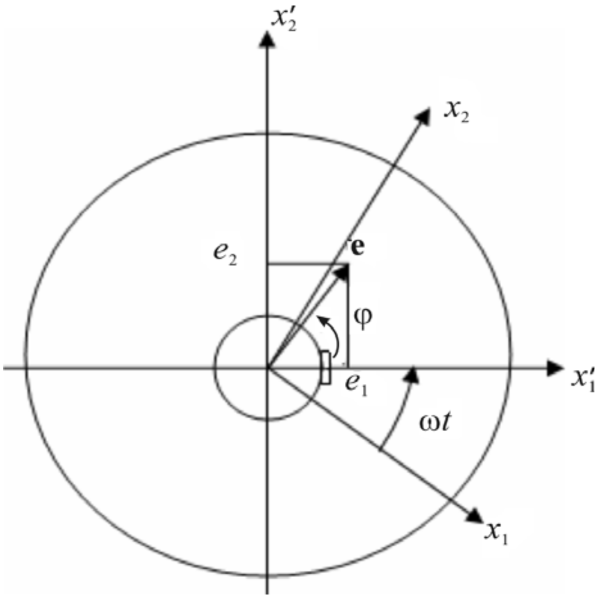


Рис. 3. Схема рабочего колеса со шпоночным пазом и неуравновешенностью: e_1, e_2 – проекции вектора-эксцентриситета **e** *на подвижные оси координат x_1' и x_2', связанные с колесом (x_1' – в плоскости шпоночного паза, x_2' – перпендикулярно к ней); x_1 и x_2 – неподвижные оси координат*

Опорами в рассматриваемой системе являются как подшипники, так и втулки рабочих колес, которые располагаются внутри направляющих аппаратов. Дополнительные динамические реакции со стороны масляного (нефтяного) слоя в каждой такой опоре, возникающие при малом отклонении цапфы подшипника или втулки рабочего колеса от равновесного положения, определяются через динамические коэффициенты слоя соотношениями:

$$-\mathbf{q} = \mathbf{C}^{(\mathrm{M})}\,\mathbf{w} + \mathbf{B}^{(\mathrm{M})}\,\dot{\mathbf{w}}; \tag{4}$$

$$\mathbf{C}^{(\mathrm{M})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}^{(\mathrm{M})} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{q}$, $\mathbf{w}$, $\dot{\mathbf{w}}$ – векторы второго прядка: **q** – сила (реакция) масляного (нефтяного) слоя; **w** – вектор смещения цапфы подшипника или втулки рабочего колеса относительно равновесного положения; $\dot{\mathbf{w}}$ – вектор соответствующей скорости; $\mathbf{C}^{(\mathrm{M})}$ – матрица коэффициентов жесткости; $\mathbf{B}^{(\mathrm{M})}$ – матрица коэффициентов демпфирования. $\mathbf{C}^{(\mathrm{M})}$ и $\mathbf{B}^{(\mathrm{M})}$ – матрицы второго порядка, зависящие от конструктивных параметров и частоты вращения ротора (называемые матрицами динамических коэффициентов масляного слоя) [4].

Возмущающие силы от неуравновешенности рабочих колес являются гармоническими функциями с частотой вращения ω. В предположении о линейности системы «ротор–статор» **q, w** и смещения статора $\mathbf{w}_0$ также будут гармоническими функциями той же частоты.

Тогда составляющие смещения вала $\mathbf{w}^{(\beta)}$ в произвольном сечении β и смещения $\mathbf{w}_0^{(\gamma)}$ центра расточки подшипника или среднего сечения γ (принятого за опору) участка статора с направляющими аппаратами в проекциях на неподвижные оси x_1 и x_2 запишутся в виде [4]:

$$w_1^{(\beta)} = W_1^{(\beta)} \cos\omega t + W_3^{(\beta)} \sin\omega t; \quad w_2^{(\beta)} = W_2^{(\beta)} \cos\omega t + W_4^{(\beta)} \sin\omega t; \tag{6}$$

$$w_{01}^{(\gamma)} = W_{01}^{(\gamma)} \cos\omega t + W_{03}^{(\gamma)} \sin\omega t; \quad w_{02}^{(\gamma)} = W_{02}^{(\gamma)} \cos\omega t + W_{04}^{(\gamma)} \sin\omega t, \tag{7}$$

В соотношениях (6) и (7) $W_1^{(\beta)},..., W_4^{(\beta)}, W_{01}^{(\gamma)},..., W_{04}^{(\gamma)}$ – проекции векторов $\mathbf{w}^{(\beta)}$ и $\mathbf{w}_0^{(\gamma)}$ на подвижные оси x_1' и x_2'.

Составляющие реакции $\mathbf{q}^{(\varsigma)}$ в произвольной опоре ς, т. е. усилия действующего на цапфу подшипника или центр одного из участков ротора и статора также могут быть представлены в виде:

$$q_1^{(\varsigma)} = Q_1^{(\varsigma)} \cos\omega t + Q_3^{(\varsigma)} \sin\omega t;$$
$$q_2^{(\varsigma)} = Q_2^{(\varsigma)} \cos\omega t + Q_4^{(\varsigma)} \sin\omega t, \qquad (8)$$

где $Q_1^{(\varsigma)},..., Q_4^{(\varsigma)}$ – проекции вектора $\mathbf{q}^{(\varsigma)}$ на подвижные оси x_1' и x_2'.

Совокупность величин $W_i^{(k)}$ (i=1, 2, 3, 4; k=1, 2,..., $n_{оп}$; $n_{оп}$ – число опор) образует вектор смещений вала **W**. Аналогично образуются векторы $\mathbf{W}_0$ смещений статора и **Q** опорных реакций. Размерности векторов **W, W**$_0$, **Q** равны $4n_{оп}$. Вектор **F** считается заданным в сечениях α (α =1,..., $n_р$) и имеет размерность $4n_р$, где $n_р$ – число сечений с учитываемыми неуравновешенностями. Все эти векторы можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1^{(1)} \\ W_2^{(1)} \\ W_3^{(1)} \\ W_4^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ W_1^{(n_{оп})} \\ W_2^{(n_{оп})} \\ W_3^{(n_{оп})} \\ W_4^{(n_{оп})} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} W_{01}^{(1)} \\ W_{02}^{(1)} \\ W_{03}^{(1)} \\ W_{04}^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ W_{01}^{(n_{оп})} \\ W_{02}^{(n_{оп})} \\ W_{03}^{(n_{оп})} \\ W_{04}^{(n_{оп})} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \\ Q_4^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ Q_1^{(n_{оп})} \\ Q_2^{(n_{оп})} \\ Q_3^{(n_{оп})} \\ Q_4^{(n_{оп})} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ F_1^{(n_р)} \\ F_2^{(n_р)} \\ F_3^{(n_р)} \\ F_4^{(n_р)} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Векторы **W**, **W**$_0$, **Q** не зависят от времени, а зависят от частоты вращения ротора ω и распределения неуравновешенностей по длине вала.

Динамические характеристики подсистем

Каждая из подсистем задается динамической характеристикой, представляющей собой линейное матричное соотношение между динамическими и кинематическими величинами. Матрицы связи состоят из коэффициентов влияния подсистем.

Характеристика подсистемы «валопровод (ротор)» может быть представлена как

$$\mathbf{W=VQ+UF}. \qquad (10)$$

Здесь матрицы **V** и **U** представляют собой динамические податливости в соответствующих точках ротора от динамических усилий, приложенных в точках опор (**V**), и динамических усилий от неуравновешенностей в местах их расположения (**U**).

Характеристика подсистемы «статор–фундамент» описывается следующим образом:

$$\mathbf{W}_0 = -\mathbf{\Delta Q}, \qquad (11)$$

где **Δ** – матрица податливостей для статора.

Характеристику подсистемы «совокупность масляных (нефтяных) слоев» можно представить выражением:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{K}(\mathbf{W} - \mathbf{W}_0), \qquad (12)$$

где **K** – квазидиагональная матрица, составленная из подматриц $\mathbf{C}^{(M)}$ и $\mathbf{B}^{(M)}$ (4) .

Для системы «ротор–статор», имеющей $n_{оп}$ опор и $n_р$ точек приложения неуравновешенностей, порядок квадратных матриц **V** , **K** и **Δ** равен $4n_{оп}$, а матрица **U** – прямоугольная, имеющая $4n_{оп}$ строк и $4n_р$ столбцов:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(1,1)} & \mathbf{V}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{V}^{(1,n_{оп})} \\ \mathbf{V}^{(2,1)} & \dots & \dots & \mathbf{V}^{(2,n_{оп})} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{V}^{(n_{оп},1)} & \dots & \dots & \mathbf{V}^{(n_{оп},n_{оп})} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1,1)} & \mathbf{U}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{U}^{(1,n_р)} \\ \mathbf{U}^{(2,1)} & \dots & \dots & \mathbf{U}^{(2,n_р)} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{U}^{(n_{оп},1)} & \dots & \dots & \mathbf{U}^{(n_{оп},n_р)} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

$$\mathbf{V}^{(i,j)}=\mathbf{U}^{(i,j)}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{A} \end{pmatrix}; \mathbf{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

где $\mathbf{V}^{(i,j)}$ (i=1,..., $n_{оп}$; j=1,..., $n_{оп}$) – матрицы 4-го порядка, связывающие динамическое смещение ротора в сечении i с гармонической силой, приложенной в сечении j (i, j – номера опор); $\mathbf{U}^{(i,j)}$ (i=1,..., $n_{оп}$; j=1,..., $n_р$) – матрицы 4-го порядка, связывающие динамическое смещение ротора в сечении i с гармонической силой инерции, вызываемой сосредоточенной неуравновешенностью в сечении j; **A** и **D** – матрицы второго порядка.

Матрицы **K** и **Δ** имеют такую же структуру, что и матрица **V** (13). Их подматрицы $\mathbf{K}^{(i,j)}$ и $\mathbf{\Delta}^{(i,j)}$ по структуре такие же, как (14). Так, подматрица $\mathbf{K}^{(i,j)}$ равна:

$$\mathbf{K}^{(i,j)} = \begin{pmatrix} C^{(M)} & \omega B^{(M)} \\ -\omega B^{(M)} & C^{(M)} \end{pmatrix} \text{ при } i=j; \qquad (15)$$

$$\mathbf{K}^{(i,j)} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Опорные реакции в системе «ротор–статор» определяются из уравнения (12):

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{V}+\mathbf{K}^{-1}+\mathbf{\Delta})^{-1}\mathbf{UF}. \qquad (16)$$

Смещения подсистем «валопровод» и «статор–фундамент» получают подстановкой (16) в соотношения (10) и (11).

Определение матриц связи подсистем

Матрицы связи в соотношениях (10)–(12) состоят из коэффициентов влияния подсистем, поэтому для проведения расчетов необходимо предварительно определить матрицы податливостей **V**, **U** и **Δ**.

В проекциях на оси x_1 и x_2 уравнения колебаний ротора имеют вид:

$$(Dw_1'')'' + 2h\nu_p \dot{w}_1 + \nu_p \ddot{w}_1 = \sum_{k=1}^{n_p} f_1^{(k)}(t)\delta(z-z_k) + \sum_{k=1}^{n_{оп}} q_1^{(k)}(t)\delta(z-z_k);$$

$$(Dw_2'')'' + 2h\nu_p \dot{w}_2 + \nu_p \ddot{w}_2 = \sum_{k=1}^{n_p} f_2^{(k)}(t)\delta(z-z_k) + \sum_{k=1}^{n_{оп}} q_2^{(k)}(t)\delta(z-z_k); \qquad (17)$$

$$D = EJ.$$

Здесь D – жесткость сечения вала при изгибе (E – модуль упругости материала, J – момент инерции поперечного сечения); h – коэффициент сопротивления; w_1, w_2 – составляющие прогиба; $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, q_1^{(k)}, q_2^{(k)}$ – составляющие сил дисбаланса и опорных реакций в сечении или опоре с номером k, задаваемые формулами (2),(3) и (8) соответственно; $\delta(z-z_k)$ – функция Дирака; z_k – осевая координата точки приложения силы неуравновешенности или реакции опоры с номером k; символом «″» обозначена вторая производная по осевой координате z.

Для определения матриц **U** и **V** в силу линейности и несвязанности системы (17) нужно найти ее решение с правыми частями, для получения которых в представлениях (2) и (8) следует последовательно положить:

$$F_1^{(k)} = F_2^{(k)} = F_3^{(k)} = F_4^{(k)} = 1;$$
$$Q_1^{(k)} = Q_2^{(k)} = Q_3^{(k)} = Q_4^{(k)} = 1,$$

где k – номер координаты точки приложения рассматриваемой единичной (безразмерной) силы дисбаланса для матрицы **U** ($k = 1,..., n_p$) или реакции опоры для матрицы **V** ($k = 1,..., n_{оп}$) соответственно.

Эта задача сводится к решению для каждой из составляющих вектора **w** двух несвязанных уравнений вида:

$$(Dw_l'')'' + 2h\nu_p \dot{w}_l + \nu_p \ddot{w}_l = \delta(z-z_k)\cos\omega t;$$
$$(Dw_l'')'' + 2h\nu_p \dot{w}_l + \nu_p \ddot{w}_l = \delta(z-z_k)\sin\omega t, \qquad (18)$$

где l= 1, 2 – номер оси координат.

Будем искать решение уравнений (18) для w_l в виде ряда по формам собственных колебаний однородного стержня постоянного сечения $X_m(z)$ (m=1,..., ∞). Вид функций $X_m(z)$ зависит от краевых условий, которые определяются способом закрепления концов стержня на стенде. Считая эти функции известными [6] и одинаковыми для w_1 и w_2 в силу осевой симметрии системы, запишем:

$$w_l^{(c)}(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{(c)}(t) X_m(z);$$

$$w_l^{(s)}(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{(s)}(t) X_m(z), \qquad (19)$$

где $H_m^{(c)}(t)$ и $H_m^{(s)}(t)$ – функции, зависящие только от времени.

Подставим представления (19) в уравнения (18), учитывая тот факт, что для главных форм выполнено соотношение $(DX_m'')'' = \nu_p p_m^2 X_m$ [4], где p_m – частота собственных колебаний ротора. Затем проинтегрируем полученные выражения по длине ротора, умножив предварительно каждое из них на $X_n(z)$. В силу ортогональности главных форм колебаний получим уравнения для определения функций $H_m^{(c)}(t)$ и $H_m^{(s)}(t)$ (заменяя в результате индекс n на m) и найдем их решения:

$$\ddot{H}_m^{(c)} + 2h\dot{H}_m^{(c)} + p_m^2 H_m^{(c)} = q_m^{(k)}\cos\omega t,$$
$$\ddot{H}_m^{(s)} + 2h\dot{H}_m^{(s)} + p_m^2 H_m^{(s)} = q_m^{(k)}\sin\omega t, \qquad (20)$$

$$H_m^{(c)}(t) = \frac{q_m^{(k)}}{p_m^2}\lambda_m \cos(\omega t - \gamma_m);$$
$$H_m^{(s)}(t) = \frac{q_m^{(k)}}{p_m^2}\lambda_m \sin(\omega t - \gamma_m); \qquad (21)$$

$$q_m^{(k)} = X_m(z_k) \Big/ \left[\nu_p \int_0^l X_m^2(z)dz\right]; \qquad (22)$$

$$\lambda_m = \left[(1-\alpha_m^2)^2 + \alpha_m^2 \beta_m^2\right]^{-1/2}, \quad \operatorname{tg}\gamma_m = \alpha_m \beta_m \big/ (1-\alpha_m^2),$$
$$\alpha_m = \omega / p_m, \quad \beta_m = 2h / p_m. \qquad (23)$$

Составляющие прогиба ротора в сечении $z=z_i$ от единичной силы, приложенной в сечении $z=z_k$, определятся из соотношений (19):

$$w_l^{(c)}(z_i, t) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m^{(i,k)} \cos(\omega t - \gamma_m);$$
$$w_l^{(s)}(z_i, t) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m^{(i,k)} \sin(\omega t - \gamma_m); \qquad (24)$$
$$G_m^{(i,k)} = \frac{q_m^{(k)}}{p_m^2} \lambda_m X_m(z_i).$$

Вектор прогиба $\mathbf{W}^{(i)}$ ротора в сечении $z=z_i$ от сил неуравновешенности, действующих в сечении $z=z_k$, найдем из соотношения (10):

$$\mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i,k)} \mathbf{F}^{(k)}, \qquad (25)$$

где $\mathbf{W}^{(i)} = (W_1^{(i)}, ..., W_4^{(i)})$ и $\mathbf{F}^{(k)} = (F_1^{(k)}, ..., F_4^{(k)})$ – векторы и их компоненты в представлениях (6) и (7), (2) и (3).

Из уравнения (25) с помощью соотношений (2), (5), (23) и (24), собирая члены при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим для $w_1(z_i)$ и $w_2(z_i)$:

$$\begin{aligned} w_1(z_i) &= (C^{(i,k)} F_1^{(k)} - S^{(i,k)} F_3^{(k)}) \cos\omega t + \\ &+ (C^{(i,k)} F_1^{(k)} + S^{(i,k)} F_3^{(k)}) \sin\omega t; \\ w_2(z_i) &= (C^{(i,k)} F_2^{(k)} - S^{(i,k)} F_4^{(k)}) \cos\omega t + \\ &+ (C^{(i,k)} F_2^{(k)} + S^{(i,k)} F_4^{(k)}) \sin\omega t. \end{aligned} \qquad (26)$$

$$C^{(i,k)} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m^{(i,k)} \cos\gamma_m, \quad S^{(i,k)} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m^{(i,k)} \sin\gamma_m. \quad (27)$$

Наконец, из сопоставления уравнений (5), (25) и (26) определим матрицу податливостей:

$$\mathbf{U}^{(i,k)} = \begin{bmatrix} C^{(i,k)} & 0 & -S^{(i,k)} & 0 \\ 0 & C^{(i,k)} & 0 & -S^{(i,k)} \\ S^{(i,k)} & 0 & C^{(i,k)} & 0 \\ 0 & S^{(i,k)} & 0 & C^{(i,k)} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Из (28) следует, что матрица $\mathbf{U}^{(i,k)}$ имеет трехдиагональную структуру. Из сравнения (11) и (28) найдем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C^{(i,k)} & 0 \\ 0 & C^{(i,k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -S^{(i,k)} & 0 \\ 0 & -S^{(i,k)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Матрица податливостей $\mathbf{V}^{(i,k)}$ имеет ту же структуру, что и матрица $\mathbf{U}^{(i,k)}$, а ее компоненты определяются по формулам (27), но координаты $z = z_k$ приложения сил $\mathbf{Q}$, вообще говоря, будут другими. Матрица податливостей $\Delta^{(i,k)}$ статора по виду тоже идентична (28), и ее элементы $C^{(i,k)}$ и $S^{(i,k)}$ также выражаются через главные формы колебаний статора (совпадающие с $X_n(z)$) по формулам (27). Однако значения $C^{(i,k)}$ и $S^{(i,k)}$ для матрицы $\Delta^{(i,k)}$ будут иными, чем для $\mathbf{U}^{(i,k)}$ и $\mathbf{V}^{(i,k)}$ за счет отличия коэффициентов $q_m^{(k)}, \lambda_m$ и γ_m статора и ротора (23) вследствие несовпадения их механических характеристик и коэффициентов демпфирования. Координаты приложения реакций $\mathbf{Q}$ для статора и ротора совпадают, но сами реакции имеют противоположные знаки.

Пример расчета вибрационных характеристик секции ЭЦН

В работе [2] измерены три первые собственные частоты колебаний секции насоса с пятью промежуточными опорными подшипниками, полученные методом импульсного возбуждения в горизонтальной плоскости вертикально вывешенного насоса (табл. 1). Достаточно высокая точность измерения собственных частот была обеспечена применением акселерометров фирм «Брюль и Кьер» и RFT типов 4332, 4333, КД-35, КД-39.

Сопоставим экспериментальные данные с теоретическими отношениями в предположении, что вертикально вывешенная секция рассматривается как стержень постоянной жесткости и постоянной линейной плотности со свободными концами. Запишем теоретическое решение уравнения частот поперечных колебаний стержня (см., например [5]) в виде:

$$f_k = \frac{\xi_k^2}{2\pi} \cdot \frac{a}{l^2} i, \; a = (E/\rho)^{1/2}, \; i = (J/F_c)^{1/2}, \quad (30)$$

где f_k – k-я собственная частота стержня, Гц;

Таблица 1

Значения частот свободных колебаний секции

Частоты и их отношения	f_1, Гц	f_2, Гц	f_3, Гц	$f_3 / f_2 / f_1$
Эксперимент	27,48	79,42	154,66	$5{,}628 : 2{,}890 : 1$ *
Расчет	27,48	75,76	148,50	$5{,}404 : 2{,}757 : 1$ **

* Отношение измеренных частот секции, вычисленное по экспериментальным данным.
** Отношение расчетных частот секции, полученных по предложенной методике.

ξ_k – k-й корень частотного уравнения; l – длина стержня; a – скорость звука в материале; E – модуль упругости материала стержня; ρ – плотность материала; J, i, $F_с$ – момент инерции, радиус инерции и площадь поперечного сечения стержня.

В формулах (30) неизвестным является один параметр – приведенный радиус инерции сечения i. Вычислить его значение теоретически весьма сложно (если ни невозможно), так как он характеризует приведенное сечение стержня, полученное путем равномерного распределения по длине масс всех колес, направляющих аппаратов и соединительных элементов, содержащихся в секции. В связи с этим определим его значение из экспериментальных данных.

Значения ξ_k в формуле (30) для стержня со свободными концами [6] равны: $\xi_1 = 4{,}7300$; $\xi_2 = 7{,}8532$; $\xi_3 = 10{,}9960$. Поскольку расчетные величины f_k пропорциональны ξ_k^2, то их отношения $f_3 / f_2 / f_1 = \xi_3^2 / \xi_2^2 / \xi_1^2$ = 5,404 : 2,757 : 1 имеют значения, достаточно близкие к экспериментальным (см. табл. 1). В связи с этим есть основания считать, что как динамическая система секция насоса в сборке (ротор и статор) действительно может быть схематизирована стержнем, что позволяет приближенно оценить собственные частоты колебаний насосной секции по стержневой теории (формула (30). Приняв это допущение, рассчитаем приведенный радиус инерции сечения насосной секции $i_{пр}$ из условия совпадения первой экспериментальной и расчетной частот собственных колебаний:

$$f_1^{Э} = \frac{\xi_1^2}{2\pi} \cdot \frac{a}{l^2} i_{пр} . \qquad (31)$$

Полагая для стали a=5064 м/с; l=3,45 м; ξ_1 =4,73; $f_1^{Э}$=27,48 Гц, из (31) найдем $i_{пр}$= 0,1814.

Зная корни частотного уравнения для стержня со свободными концами, подставим найденную из соотношения (31) величину $i=i_{пр}$ в формулу (30) и рассчитаем значения второй и третьей частот секций по стержневой модели. Соответствующие значения частот приведены во второй строке табл. 1.

Зная $i_{пр}$, по формуле (30) можно оценить спектр частот секции для любых вариантов ее крепления на стенде (граничных условиях для стержня), определив корни соответствующего частотного уравнения ξ_k $(k = 1, 2, ..., \infty)$.

В качестве объекта для динамического расчета системы «ротор–статор» возьмем секцию ЭЦН типа ДВС5-50 длиной 3 м с 96 рабочими колесами, посаженными на вал диаметром 21 мм, при ее горизонтальной установке на стенде и закреплении на одном конце хомутом, а на другом – муфтой.

Проведенные выше расчеты собственных частот обосновывают правомерность использования балочной модели даже для секции в сборке. Используем теперь балочную схематизацию для расчета системы «ротор–статор», считая ротор и статор однородными балками постоянного сечения, связанными между собой через масляные слои подшипников и направляющих аппаратов. Граничные условия считаем соответствующими установке неподвижного и подвижного шарниров на концах балок (рис. 4).

Погонные массы статора и ротора принимаем $\nu_с$ = 31 кг/м и $\nu_р$ = 8 кг/м, частоту вращения вала считаем стандартной и равной 50 с$^{-1}$. Значения коэффициентов жесткости и демпфирования всех опор, рассчитанные по методике [4] и предполагавшиеся одинаковыми для всех элементов данного типа, приведены в табл. 2.

Для расчета вынужденных колебаний секции под действием центробежных сил от дисбаланса колес необходимо задать значения эксцентри-

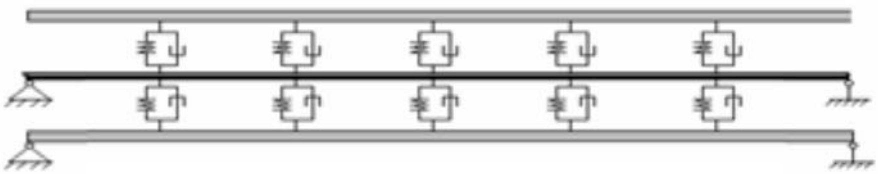


Рис. 4. Расчетная схема секции при ее установке на стенде

Таблица 2

Коэффициенты жесткости и демпфирования в опорах

Коэффициенты жесткости, Н/м				Коэффициенты демпфирования, Н·с/м			
c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}
1,62·10^{-6}	0,58·10^{-6}	–4,07·10^{-6}	2,82·10^{-6}	6,36·10^{-3}	–7,59·10^{-3}	–7,59·10^{-3}	29,2·10^{-3}

ситетов для каждого из колес и значения углов отклонения вектора дисбаланса от какой-то оси, выбранной за начало отсчета (см. рис. 3). Современные технологии позволяют измерить оба этих параметра.

Во взятом произвольно экземпляре секции распределение вдоль оси вала эксцентриситетов и углов отклонения вектора дисбаланса колес является случайным. Поэтому для задания этих величин были использованы выборочные реализации их значений, полученные методом статистического моделирования (методом Монте-Карло) равномерного распределения на интервале (0, 1), представленные на рис. 5. Проекции векторов эксцентриситетов на оси x_1' и x_2' в соответствии с рис. 3 составляют $e_1 = e\cos\varphi$ и $e_2 = e\sin\varphi$.

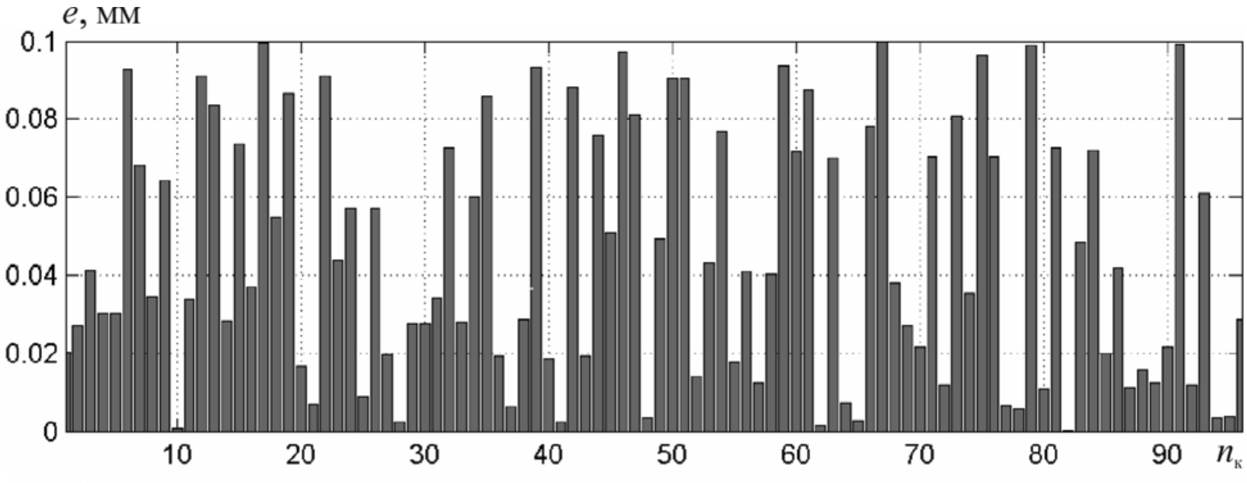
На рисунке 6 приведены амплитуды колебаний ротора (рис. 6, *а*) и статора (рис. 6, *б*) в двух ортогональных плоскостях, рассчитанные по предложенной методике для выборочной реализации распределения дисбалансов колес вдоль оси вала, представленной на рис. 5.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

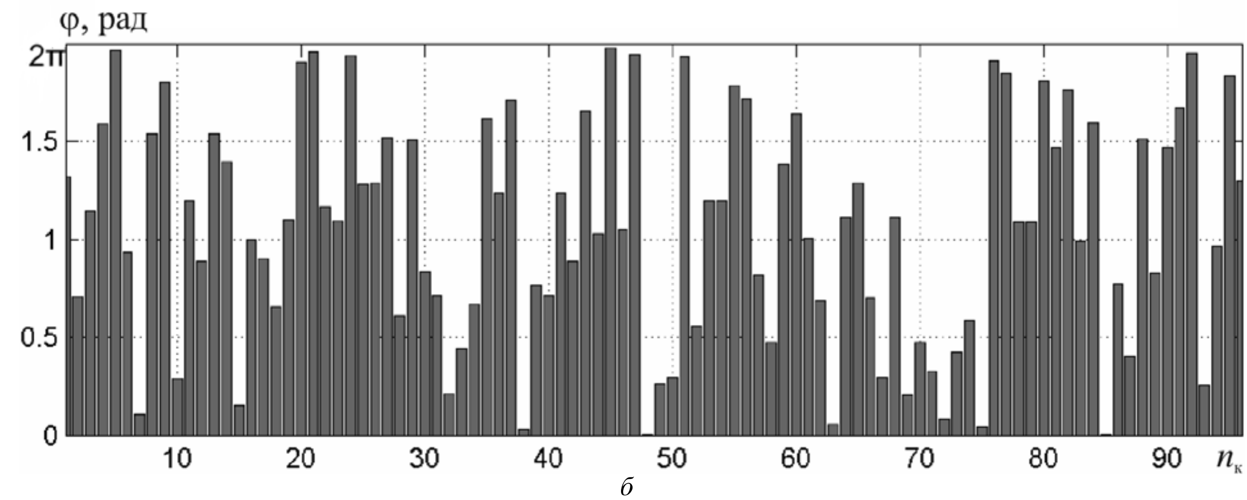
Амплитуды колебаний ротора существенно превышают амплитуды колебаний статора, что вполне объясняется конструкцией секции (жесткость ротора существенно меньше жесткости статора). Однако величина этих амплитуд на порядок меньше величины зазоров между статором и ротором – около 0,1 мм.

Влияние демпфирования на рабочей частоте несущественно, что свидетельствует о достаточно хорошей отстройке системы от резонанса.

Наблюдающийся минимум амплитуд в середине пролета скорее всего объясняется полученным при моделировании распределением дисбалансов колес по углу φ в этой части ротора (см. рис. 5, *б*), при котором векторы дисбалансов направлены в противоположные стороны и уравновешивают друг друга.



а



б

Рис. 5. Эксцестриситеты в рабочих колесах $n_к$ (а) и углы отклонения вектора дисбаланса колес (б) для секции ЭЦН

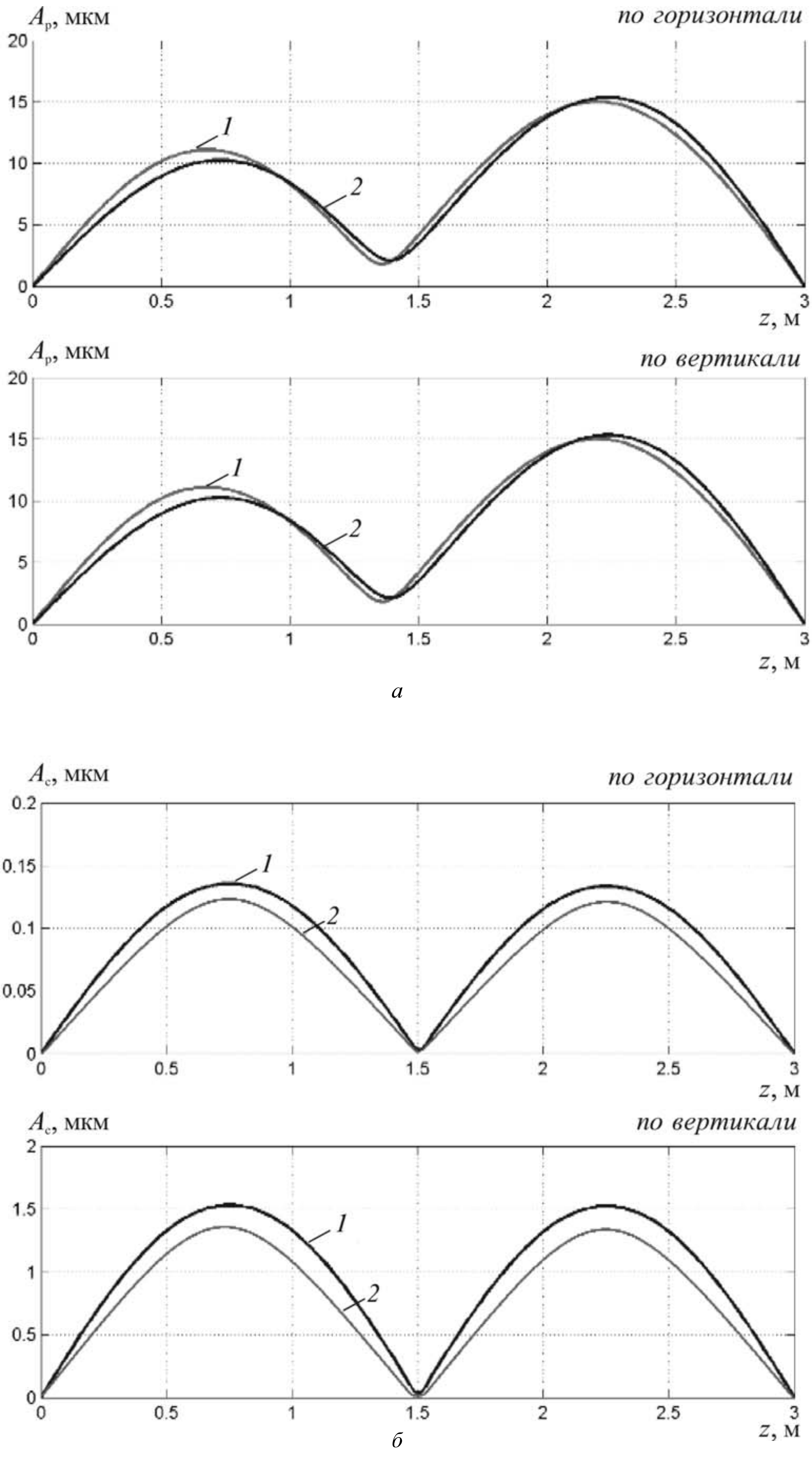


Рис. 6. Амплитуды колебаний ротора $A_р$ (а) и статора $A_с$ (б) секции ЭЦН ($l_р = l_с = 3$ м): 1 – при $h_р = h_с = 0$; 2 – при $h_р = h_с = 14$ 1/с

Заключение

Предложенная методика расчета колебаний системы «ротор–статор», основанная на представлении подсистем «ротор» и «статор» балками постоянной плотности с приведенными инерционными и жесткостными характеристиками, позволяет рассчитать вибрационные характеристики конструкции для любого заданного распределения векторов неуравновешенности рабочих колес вдоль оси ротора.

Использование метода Монте-Карло для задания распределения дисбалансов вдоль оси вала (вследствие неопределенности в расположении неуравновешенностей на валу в каждом объекте) позволяет определить динамические характеристики для «модельной» серии объектов и получить представительную выборку их реализаций, пригодную для проведения анализа результатов с помощью вероятностного подхода. Данные анализа «модельной» серии могут быть положены в основу формулировки достоверных рекомендаций по внесению технологических и конструктивных изменений в секцию ЭЦН с целью снижения ее виброактивности.

Предложенная методика также может быть использована для расчета динамических характеристик валопроводов в любых турбомашинах с учетом влияния статора.

Список литературы

1. Установки центробежных насосов для добычи нефти. Международный транслятор - справочник / под ред. В.Ю. Аликперова, В.Я. Кершенбаумана. – М.: Наука и техника, 1999. – 387 с.
2. Исследование вибрации насосной секции нефтяного насоса. Отчет заключительный / Ю.И. Белоусов, В.Ю. Мачнев, В.Б. Степанов, Р.В. Антонов. – М.: ОАО «Борец», 2005. – 138 с.
3. Волоховская О.А. Расчет вибрационных характеристик многоступенчатых погружных насосов для перекачки нефти // Труды международной конференции «ГЕРЛИКОН-2008», Перемышль, 2008. Т. 1. С. 69–75.
4. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение, 1980. – 544 с.
5. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 479 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 т. Т. 3 / под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 587 с.

Материал поступил в редакцию 13.07.2010

БАРМИНА Ольга Владимировна

E-mail: **barminao@yandex.ru**
Тел. **+7 (499) 135-40-64**

Научный сотрудник лаборатории вибрационной механики Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Область научных интересов – теория колебаний, динамика роторных систем. Автор трех научных работ.

ВОЛОХОВСКАЯ Ольга Аскольдовна

E-mail: **olgagaavol@yandex.ru**
Тел. **+7 (499) 135-55-84**

Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории вибрационной механики Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Область научных интересов – механика микронеоднородных сред, теория колебаний, динамика роторных систем. Автор более 60 научных работ.