УДК 621.833

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ С ДИСКОВЫМ ГЕНЕРАТОРОМ ВОЛН

С.Е. Люминарский, И.Е. Люминарский

Рассмотрено применение пространственной математической модели волновой зубчатой передачи для определения силового взаимодействия элементов волновой передачи с дисковым генератором волн. Расчет основан на использовании метода Бубнова – Галеркина. Исследовано изменение формы гибкого и жесткого колес при увеличении нагрузки волновой зубчатой передачи. Численными исследованиями подтверждена адекватность предложенной математической модели.

Ключевые слова: *волновая передача, гибкое колесо, жесткое колесо, генератор волн.*

Введение

В большинстве математических моделей волновых зубчатых передач (ВЗП) [1–3] все силы, действующие на элементы этих передач, приводятся к одной расчетной плоскости. Применение плоских математических моделей не позволяет определить пространственную деформацию гибкого колеса и распределение сил по длине зубчатого венца. Использование пространственной модели позволит более точно определять напряжения в гибком колесе и, следовательно, уточнять расчет на долговечность.

Кроме того, в работах [1–3] поверхностный контакт между элементами ВЗП заменен односторонним контактом в отдельных точках. Такая замена может привести к необоснованному увеличению напряжений в точках, расположенных вблизи односторонних связей.

В работе [4] предложена пространственная модель определения силового взаимодействия элементов ВЗП с кулачковым генератором волн, в которой поверхностные контакты элементов заменяются поверхностными силами с кусочно-линейными распределениями. Расчет основан на использовании метода Бубнова – Галеркина.

Постановка задачи

Рассмотрим применение предложенного в работе [4] метода для расчета волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. Для проверки адекватности предложенной модели проведены расчетные исследования передачи, изображенной на рис. 1. Результаты экспериментального исследования этой передачи приведены в работе [5].

Математическая модель

В расчетной модели (см. рис. 1) учитываются деформации гибкого колеса *1*, жесткого колеса *2*, дисков генератора волн *3*; контактные деформации в подшипниках *4*, изгибные деформации вала *5*, на котором установлены диски. Диски и наружные кольца подшипников представляются едиными телами, которые самоустанавливаются под действием сил со стороны гибкого колеса и со стороны тел качения подшипников. Далее диск с наружным кольцом подшипника будем называть диском. При определении перемещений точек дисков учитывается не только их деформация, но и их смещение как твердых тел. Векторы смещений дисков содержат по два элемента (поступательные смещения вдоль осей x, y) $\mathbf{a}_i=(a_{ix}, a_{iy})^{т}$ (i=2, 3).

Жесткое колесо и подшипники дисков установлены на валах, деформация которых

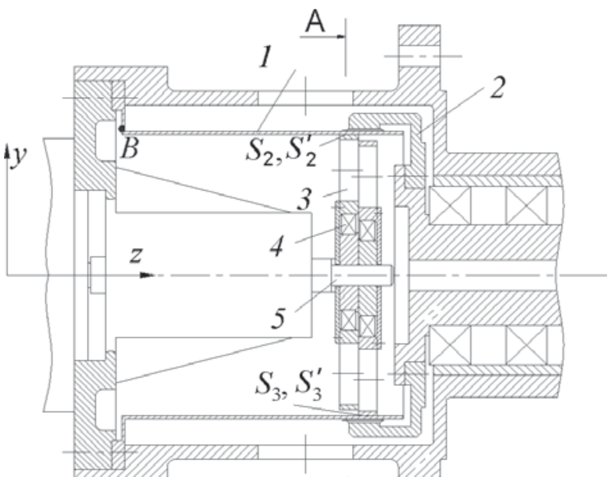


Рис. 1. Волновая зубчатая передача

приводит к смещению этого колеса и внутренних колец подшипников. Вектор смещения жесткого колеса содержит три элемента $\mathbf{a}_1 = \left(a_{1x},\ a_{1y},\ a_{1\varphi_z}\right)^{\mathrm{т}}$, а вектор смещения внутренних колец подшипников – два элемента $\mathbf{a}_4 = (a_{4x},\ a_{4y})^{\mathrm{т}}$.

Внутренние поверхности гибкого колеса S_2 и S_3 взаимодействуют с наружными поверхностями первого S_2' и второго S_3' дисков (см. рис. 1). Эти поверхности разбиваются на прямоугольные подобласти линиями, параллельными оси колеса, и окружностями, расположенными в поперечных сечениях гибкого колеса и диска. Каждому узлу сетки ставится в соответствие безразмерная функция Куранта φ_{ij} [6], которая представляет собой шестиугольную пирамиду с единичной высотой. В качестве базисных функций используются функции $u_{ij} = \dfrac{3}{S_{ij}}\varphi_{ij}$, где S_{ij} – площадь основания пирамиды. Базисные функции u_{ij} представляют собой шестиугольные пирамиды с единичным объемом (рис. 2, *а*) и имеют размерность м^{-2}. При одномерной нумерации базисные функции u_{ij} обозначены u_k.

Распределенные по поверхности силы взаимодействия гибкого колеса с первым и вторым дисками представляются следующим образом:

$$p^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_2} P_k^{(2)} u_k,\ p^{(3)} = \sum_{k=1}^{N_3} P_k^{(3)} u_k,$$

где N_2, N_3 – количество узловых точек на наружных поверхностях S_2' и S_3'; $P_k^{(2)}$, $P_k^{(3)}$ – коэффициенты.

Распределение поверхностной силы $P_k^{(2)} u_k$ имеет форму шестиугольной пирамиды. Коэффициенты $P_k^{(2)}$, $P_k^{(3)}$ имеют размерность силы и равны значению соответствующей равнодействующей рассматриваемой распределенной силы. Векторы $\mathbf{P}^{(2)} = \left(P_1^{(2)}\ \ldots\ P_{N_2}^{(2)}\right)^{\mathrm{т}}$ и $\mathbf{P}^{(3)} = \left(P_1^{(3)}\ \ldots\ P_{N_3}^{(3)}\right)^{\mathrm{т}}$ далее будем называть векторами сил поверхностного взаимодействия гибкого колеса с дисками.

Гибкое колесо может взаимодействовать с жестким колесом по рабочим и нерабочим боковым поверхностям зубьев. Боковые поверхности жесткого колеса обозначим S_1, гибкого колеса – S_1'. В развертке на плоскость поверхности S_1 и S_1' представляют собой прямоугольники, одна сторона которых (высота зуба) в несколько десятков раз меньше другой (ширины зуба). Для таких поверхностей использование непосредственно базисных функций u_{ij} является затруднительным. Во-первых, при их использовании количество узловых точек будет очень большим (несколько десятков тысяч), во-вторых, коэффициенты податливости гибкого колеса слабо изменяются по высоте зуба, поэтому матрица податливости ВЗП будет плохо обусловленной.

Поверхности S_1 и S_1' разбиваются взаимно перпендикулярными линиями, образуя сетки. Линии первой группы параллельны оси колеса, линии второй группы расположены в поперечных сечениях зубьев. Каждому поперечному сечению ставится в соответствие функция u_j^* (рис. 2, *б*), которая равна линейной комбинации базисных функций u_{ij} [4]:

$$u_j^* = \sum_{i=1}^{N_{q2}} \chi_{ij} u_{ij}\ ,$$

где χ_{ij} – безразмерные коэффициенты, характеризующие распределение сил взаимодействия боковых поверхностей зубьев по их высоте; N_{q_2} – количество узлов сетки, расположенных в одном поперечном сечении.

Суммирование выполняется по всем узлам, расположенным в одном поперечном сечении зуба. Функция u_j^* имеет размерность м$^{-2}$, по-

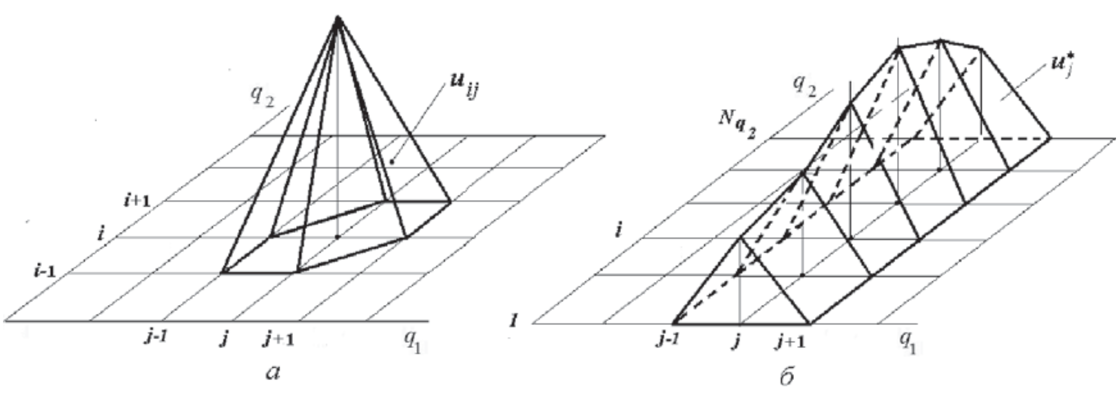


Рис. 2. Общий вид базисной функции u_{ij} (*а*) и функции u_j^* (*б*)

верхностный интеграл от этой функции равен единице. Коэффициенты χ_{ij} определяются итерационным способом [4], в пределах одной итерации коэффициенты χ_{ij} не изменяются.

Распределенная по боковым поверхностям зубьев сила $p^{(1)}$ с использованием линейной комбинации функций u_j^* представляется в виде

$$p^{(1)} = \sum_{j=1}^{N_1} P_j^{(1)} u_j^*,$$

где N_1 – количество узловых точек на боковых поверхностях зубьев.

Узловые точки функции u_j^* расположены на продольной оси зуба (q_1 – на рис. 2, *б*). Каждая узловая точка соответствует поперечному сечению зуба.

Коэффициент $P_j^{(1)}$ равен модулю равнодействующей распределенной силы $P_j^{(1)} u_j^*$, приложенной к *j*-му поперечному сечению. Вектор $\mathbf{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & \ldots & P_{N_1}^{(1)} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}$ далее будем называть вектором сил взаимодействия зубьев по боковым поверхностям.

Для составления разрешающей системы уравнений используем метод Бубнова – Галеркина. Уравнение взаимного непроникания поверхностей S_1, S_1' скалярно умножается на функции u_j^*, а уравнения взаимного непроникания поверхностей S_2 и S_2', S_3 и S_3' – на функции u_{ij} [4]. После добавления к этим уравнениям уравнений равновесия незакрепленных элементов и неравенств, учитывающих односторонний характер взаимодействия, получим следующую систему уравнений:

где $\tilde{\delta}^{(1)}, \tilde{\delta}^{(2)}, \tilde{\delta}^{(3)}$ – векторы приведенных зазоров между поверхностями S_1 и S_1'; S_2 и S_2'; S_3 и S_3' соответственно [4]; $\tilde{\delta}^{(4)}, \tilde{\delta}^{(5)}$ – векторы зазоров между телами качения и поверхностями S_4 и S_5; $\tilde{\delta}_0^{(1)}, \tilde{\delta}_0^{(2)}, \tilde{\delta}_0^{(3)}$ – векторы приведенных начальных зазоров между поверхностями S_1 и S_1'; S_2 и S_2'; S_3 и S_3' соответственно, т.е. зазоров между недеформированными элементами передачи; $\tilde{\delta}_0^{(4)}, \tilde{\delta}_0^{(5)}$ – векторы начальных зазоров между телами качения и поверхностями S_4 и S_5; $\tilde{\mathbf{D}}^{(11)}, \tilde{\mathbf{D}}^{(12)}, \ldots, \tilde{\mathbf{D}}^{(35)}$ – приведенные матрицы податливости [4]; $\mathbf{D}^{(42)}, \mathbf{D}^{(44)}, \mathbf{D}^{(53)}, \mathbf{D}^{(55)}$ – матрицы податливости; $\tilde{\mathbf{G}}^{(11)}, \tilde{\mathbf{G}}^{(22)}, \tilde{\mathbf{G}}^{(33)}, \mathbf{G}^{(42)}, \mathbf{G}^{(44)}, \mathbf{G}^{(53)}$, $\mathbf{G}^{(54)}$ – матрицы, связывающие векторы зазоров $\tilde{\delta}^{(1)}, \tilde{\delta}^{(2)}, \tilde{\delta}^{(3)}, \tilde{\delta}^{(4)}, \tilde{\delta}^{(5)}$ с векторами смещений $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$; $\mathbf{C}^{(b)}, \mathbf{C}^{(k)}$ – матрицы жесткости валов жесткого колеса и подшипников; $\tilde{\delta}_j$ – элементы векторов $\tilde{\delta}^{(1)}, \tilde{\delta}^{(2)}, \tilde{\delta}^{(3)}, \tilde{\delta}^{(4)}, \tilde{\delta}^{(5)}$; $\mathbf{P}^{(4)}$ и $\mathbf{P}^{(5)}$ – векторы сосредоточенных сил взаимодействия по внутренним поверхностям первого и второго дисков с телами качения подшипников.

Последние четыре строки системы линейных уравнений в системе уравнений (1) выражают уравнения равновесия жесткого колеса, двух дисков и вала, на котором они установлены. Например, шестая сверху строка системы уравнений соответствует трем уравнениям равновесия жесткого колеса:

$$\sum P_{ix}^{(1)} = 0, \ \sum P_{iy}^{(1)} = 0, \ \sum M_z(P_i^{(1)}) = M_B,$$

где M_B – момент сопротивления, приложенный к жесткому колесу.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{(11)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(12)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(13)} & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{G}}^{(11)} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{D}}^{(21)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(22)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(23)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(24)} & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{G}}^{(22)} & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{D}}^{(31)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(32)} & \tilde{\mathbf{D}}^{(33)} & 0 & \tilde{\mathbf{D}}^{(35)} & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{G}}^{(33)} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{(42)} & 0 & \mathbf{D}^{(44)} & 0 & 0 & \mathbf{G}^{(42)} & 0 & \mathbf{G}^{(44)} \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^{(53)} & 0 & \mathbf{D}^{(55)} & 0 & 0 & \mathbf{G}^{(53)} & \mathbf{G}^{(54)} \\ \tilde{\mathbf{G}}^{(11)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}^{(b)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{G}}^{(22)} & 0 & \mathbf{G}^{(24)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{G}}^{(33)} & 0 & \mathbf{G}^{(35)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{(44)} & \mathbf{G}^{(45)} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(1)} \\ \mathbf{P}^{(2)} \\ \mathbf{P}^{(3)} \\ \mathbf{P}^{(4)} \\ \mathbf{P}^{(5)} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}^{(1)} - \tilde{\delta}_0^{(1)} \\ \tilde{\delta}^{(2)} - \tilde{\delta}_0^{(2)} \\ \tilde{\delta}^{(3)} - \tilde{\delta}_0^{(3)} \\ \tilde{\delta}^{(4)} - \tilde{\delta}_0^{(4)} \\ \tilde{\delta}^{(5)} - \tilde{\delta}_0^{(5)} \\ \mathbf{B}^b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\delta}_j \geq 0 \quad (j = 1, N); \\ P_j \geq 0 \quad (j = 1, N); \\ \tilde{\delta}_j \cdot P_j = 0 \quad (j = 1, N), \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица $\mathbf{C}^{(b)}$ и вектор $\mathbf{B}^b$, расположенные в указанной строке, имеют следующий вид:

$$\mathbf{C}^{(b)}=\begin{pmatrix} C^b & 0 \\ 0 & C^b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}^b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_B \end{pmatrix},$$

где C^b – жесткость опоры жесткого колеса в направлениях осей x и y.

Последние два неравенства и уравнение системы (1) выражают односторонний характер взаимодействия поверхностей.

Рассмотрим определение векторов приведенных начальных зазоров между гибким колесом и дисками $\tilde{\delta}_0^{(2)},\tilde{\delta}_0^{(3)}$, входящих в систему уравнений (1). Зазоры между недеформированными телами далее будем называть начальными зазорами.

Представим функцию начальных зазоров в виде линейной комбинации базисных функций:

$$\delta_0^{(2)}\approx\sum\delta_{0k}^{(2)}\frac{S_k}{3}u_k,$$

где S_k – площадь поверхности, на которой функция u_k отлична от нуля; $\delta_{0k}^{(2)}$ – начальные зазоры в узлах сетки между поверхностями S_2 и S_2'.

Коэффициент $\dfrac{S_k}{3}$ введен для того, чтобы коэффициенты $\delta_{0k}^{(2)}$ были равны зазорам в узловых точках. На основании метода Бубнова – Галеркина функцию начальных зазоров скалярно умножим на базисные функции u_i, в результате чего получим формулу для определения приведенных зазоров:

$$\tilde{\delta}_{0i}^{(2)}=\sum_k\delta_{0k}^{(2)}\frac{S_k}{3}\left(u_k,\ u_i\right),\qquad (2)$$

где $\left(u_k,\ u_i\right)=\iint_S u_k\cdot u_i dS$ — скалярное произведение базисных функций.

Скалярное произведение (u_k, u_i) отлично от нуля только для соседних узлов, поэтому в формуле (2) суммирование выполняется только для узлов, которые являются соседними с узлом, имеющим номер i. В процессе решения системы уравнений (1) коэффициенты (u_k, u_i) не изменяются, поэтому их вычисляют только один раз.

Аналогично определяют элементы вектора приведенных начальных зазоров $\tilde{\delta}_0^{(3)}$ между поверхностями S_3 и S_3'.

При определении вектора приведенных начальных зазоров между боковыми поверхностями зубьев S_1 и S_1' функция начальных зазоров $\delta_0^{(1)}\approx\sum_{i,j}\delta_{0ij}^{(1)}\dfrac{S_{ij}}{3}u_{ij}$ скалярно умножается на функции u_l^* (см. рис. 2), после чего формула для определения приведенного начального зазора в произвольном l-м поперечном сечении примет вид

$$\tilde{\delta}_{0l}^{(1)}=(\delta_0^{(1)},u_l^*)=\sum_{k=1}^{N_{q_2}}\chi_{kl}\cdot\sum_{i,j}\delta_{0ij}^{(1)}\cdot\frac{S_{ij}}{3}\cdot(u_{ij},u_{kl}),\quad (3)$$

где $\delta_{0ij}^{(1)}$ – начальные зазоры в узлах сетки между боковыми поверхностями зубьев; S_{ij} – площадь поверхности, на которой функция u_{ij} отлична от нуля.

В формуле (3) используется двойная нумерация узлов исходной сетки. Суммирование по k выполняется для узлов, расположенных в одном поперечном сечении, суммирование по индексам i, j – для узлов, в которых скалярное произведение (u_{ij},u_{kl}) отлично от нуля.

Для определения элементов приведенной матрицы податливости $\tilde{\mathbf{D}}^{(22)}$ к каждому узлу поверхностей S_2 и S_2' поочередно прикладываются распределенные по поверхности силы $p_l^{(2)}=P^*\cdot u_1$ $(l=\overline{1,N_2};\ P^*=1)$. Определим приращения зазоров во всех узлах поверхностей S_2 и S_2' (коэффициенты влияния) от действия этих единичных сил:

$$d_{kl}^{(22)}=d_{kl}^{(S_2)}+d_{kl}^{(S_2')},$$

где $d_{kl}^{(S_2)},d_{kl}^{(S_2')}$ – коэффициенты влияния поверхностей S_2 и S_2', которые равны приращениям зазора в k-м узле от действия распределенной силы $p_l^{(2)}$, приложенной к поверхностям S_2 и S_2' соответственно.

При определении коэффициентов влияния любого элемента считали, что он не взаимодействует с другими элементами волновой передачи. Коэффициенты влияния гибкого колеса $d_{kl}^{(S_2)}$ определяли с использованием линейной теории оболочек путем разложения решения в ряд Фурье и численного интегрирования полученных дифференциальных уравнений. Коэффициенты $d_{kl}^{(S_2')}$ вычисляли методом конечных элементов. При определении этих коэффициентов предполагали, что диск испытывает плоское напряженное состояние. Коэффициенты влияния в различных продольных сечениях считали одинаковыми. Расчеты выполняли с использованием треугольных плоских конечных элементов. При расчете диск закрепляли таким образом, чтобы система была статически определимой. Тогда при действии на диск уравновешенной системы сил реакции в связях будут равны нулю и, следовательно, не окажут влияния на деформацию диска.

Приведенный коэффициент влияния $\tilde{d}_{il}^{(22)}$ (элемент матрицы $\tilde{\mathbf{D}}^{(22)}$) определяли по формуле (2), в которой начальные зазоры $\delta_{0k}^{(2)}$ заменяли коэффициентом $d_{kl}^{(22)}$. Аналогично определяли элементы матрицы $\tilde{\mathbf{D}}^{(33)}$.

Рассмотрим определение элементов матрицы $\tilde{\mathbf{D}}^{(11)}$. В каждом поперечном сечении к боковым поверхностям зубьев S_1 и S_1' прикладываются распределенные по поверхности силы $p_n^{(1)} = P^* u_n^*$ $(n = \overline{1, N_1}; P^* = 1)$. Указанные распределенные силы направлены в сторону внутренних нормалей к поверхностям. От действия этих сил определяют коэффициенты влияния $d_{(ij)n}$. Для узлов сетки, в которых определяют перемещения, использовали двойную нумерацию. Непрерывная функция приращения зазоров между поверхностями S_1 и S_1' от действия распределенной силы $p_n^{(1)}$ с использованием линейной комбинации базисных функций представляется в виде

$$d_n^{(11)} \approx \sum_{i,j} d_{(ij)n}^{(11)} \frac{S_{ij}}{3} u_{ij} .$$

Для определения приведенного коэффициента влияния $\tilde{d}_{ln}^{(11)}$ функция $d_n^{(11)}$ скалярно умножается на функцию u_l^*, в результате чего коэффициент $\tilde{d}_{ln}^{(11)}$ можно определить по формуле (3), в которой зазор $\delta_{0ij}^{(1)}$ необходимо заменить коэффициентом влияния $d_{(ij)n}^{(11)}$.

Коэффициенты влияния $d_{(ij)n}^{(11)}$ складываются из коэффициентов влияния поверхностей S_1 и S_1':

$$d_{(ij)n}^{(11)} = d_{M(ij)n}^{(S_1)} + d_{O(ij)n}^{(S_1)} + d_{M(ij)n}^{(S_1')} + d_{O(ij)n}^{(S_1')} , \qquad (4)$$

где n – номер узла, к которому приложена базисная функция u_n^* (используется одномерная нумерация узлов исходной сетки); i, j – номера узлов по длине (q_1) и высоте (q_2) зубьев (см. рис. 2) , в которых определяются перемещения (используется двойная нумерация узлов исходной сетки).

При определении коэффициентов влияния $d_{M(ij)n}^{(S_1)}$ зуб жесткого колеса закрепляется на жестком основании. К нему прикладываются распределенные силы $p_n^{(1)}$. От действия этих сил определяются перемещения узловых точек зубьев жесткого колеса $d_{M(ij)n}^{(S_1)}$, которые учитывают деформации зубьев [4]. Расчеты выполняли методом конечных элементов с использованием пространственных тетраэдральных элементов первого порядка. Аналогично вычисляются коэффициенты влияния зубьев гибкого колеса $d_{M(ij)n}^{(S_1')}$.

При определении коэффициентов влияния жесткого колеса без учета зубьев $d_{O(ij)n}^{(S_1)}$ его внутреннюю поверхность считали гладкой, т.е. предполагали малое влияние зубьев на деформацию жесткого колеса. К жесткому колесу прикладывали распределенные силы $\mathbf{q}_\tau = -\mathbf{q}_\tau'$, $\mathbf{q}_r = -\mathbf{q}_r'$, полученные при расчете деформации зубьев жесткого колеса (при определении $d_{M(ij)n}^{(S_1)}$). Распределенные по поверхности силы $\mathbf{q}_\tau'$, $\mathbf{q}_r'$ представляют собой силы, которые действуют на зуб со стороны жесткого основания. Расчеты выполняли методом конечных элементов с использованием кольцевых элементов [7].

Коэффициенты влияния гибкого колеса без учета зубьев $d_{O(ij)n}^{(S_1')}$ определяли аналогично. В отличие от жесткого колеса гибкое колесо заменяли ортотропной оболочкой с эквивалентными жесткостями в области зубчатого венца. Расчеты выполняли с использованием линейной теории оболочек.

Рассмотрим определение взаимной приведенной матрицы податливости $\tilde{\mathbf{D}}^{(21)}$. К боковым поверхностям гибкого колеса S_1' поочередно прикладывали единичные распределенные по поверхности силы $p_n^{(1)}$. От действия этих единичных сил определяли приращения зазоров в узловых точках поверхности S_2 (коэффициенты влияния), которые обозначаются $d_{kn}^{(21)}$. Приведенные коэффициенты влияния $\tilde{d}_{in}^{(21)}$ определяли по формуле (2), в которой $\delta_{0k}^{(2)}$ заменяли величиной $d_{kn}^{(21)}$.

Аналогично можно определить элементы других взаимных приведенных матриц податливости.

На рис. 3 представлена схема, поясняющая определение матрицы $\tilde{\mathbf{G}}^{(22)}$. При смещении первого диска на вектор $\mathbf{a}_2$ произвольная точка M получит смещение в направлении нормали $\boldsymbol{\nu}_M$:

$$g_{2M} = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{a}_2 ,$$

где $\mathbf{g}_2 = (-\cos\psi_M, \ -\sin\psi_M)$.

В области определения базисной функции u_k угол ψ_M (см. рис. 3) изменяется незначительно. Следовательно, в указанной области его можно принять постоянным. Тогда для определения приведенных коэффициентов матрицы $\tilde{\mathbf{G}}^{(22)}$ интегрирование можно не проводить. Погреш-

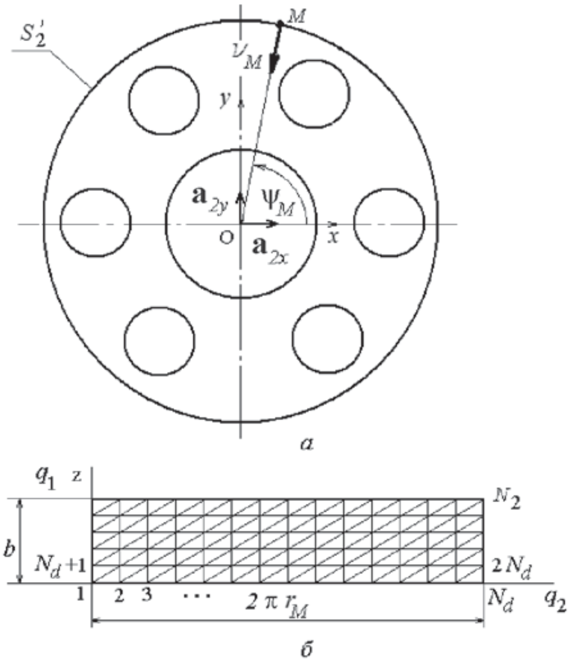


Рис. 3. Схема диска генератора волн (*а*) и развертка на плоскость поверхности S_2' (*б*)

ность вычисления не превысит 0,5 %. С учетом сделанного замечания матрицу $\tilde{\mathbf{G}}^{(22)}$ можно определить следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(22)} = \begin{pmatrix} -\cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \\ \dots & \\ -\cos\psi_{N_2} & -\cos\psi_{N_2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно определить матрицы $\tilde{\mathbf{G}}^{(11)}, \tilde{\mathbf{G}}^{(33)}, \mathbf{G}^{(42)}, \mathbf{G}^{(44)}, \mathbf{G}^{(53)}, \mathbf{G}^{(54)}$.

Для решения системы (1) можно использовать методы расчета упругих систем, ограниченных односторонними связями. При этом вместо зазоров в системе с односторонними связями используются приведенные зазоры, а вместо реакций в системе с односторонними связями – равнодействующие узловых распределенных по поверхности сил $P_j^{(1)}u_j^*$, $P_k^{(2)}u_k$, $P_k^{(3)}u_k$. В данной работе использован метод введения восстанавливающих сил [8].

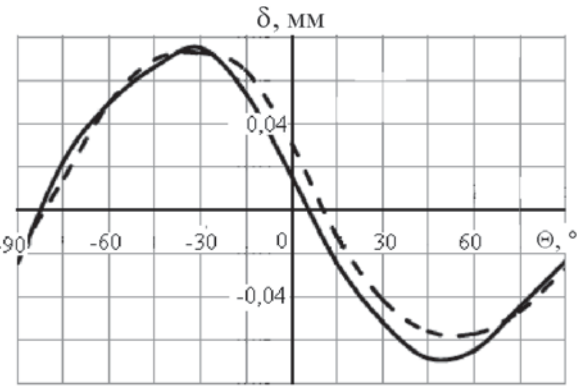
Результаты исследования

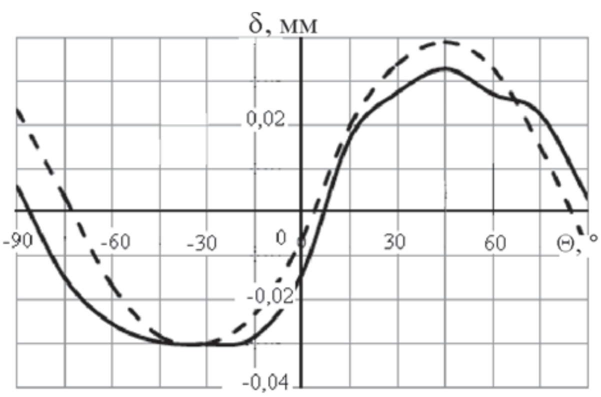
По предложенной методике проведен силовой расчет волновой передачи, изображенной на рис. 1. Эта передача спроектирована на кафедре ТММ МГТУ им. Н.Э. Баумана и имеет следующие основные параметры: число зубьев гибкого колеса $Z_g = 198$, число зубьев жесткого колеса $Z_B = 200$, модуль зацепления $m = 1$ мм, толщину обода гибкого колеса под зубчатым венцом $h_1 = 0{,}9$ мм, ширину зубчатого венца $b_w = 20$ мм, длину оболочки гибкого колеса $l = 210$ мм, толщину оболочки гибкого колеса $h_3 = 0{,}8$ мм, наружный диаметр дисков $D_p = 189{,}45$ мм, толщину обода жесткого колеса под зубчатым венцом $h_2 = 12$ мм. Зубья гибкого колеса нарезаны в деформированном состоянии на дисках волнообразователя.

В работе [5] экспериментальным путем были определены радиальные отклонения ободов гибкого и жесткого колес от начальных кривых при различных моментах, действующих на жесткое колесо M_B. Отклонения определяли в торцевом сечении жесткого колеса А–А (см. рис. 1) со стороны, не соприкасающейся с диском. Под начальными кривыми ободов гибкого и жесткого колес понимаются кривые наружных поверхностей этих колес при $M_B = 0$. В работе [5] приведены также осевые перемещения торца оболочки гибкого колеса в точке *B* (см. рис. 1).

Для исключения влияния отверстий на дисках на результаты измерений в работе [5] радиальные отклонения ободов определяли методом обращенного движения. Для этого волнообразователь с помощью входного вала редуктора последовательно поворачивали на $7°30'$ и закрепляли неподвижно. На валу жесткого колеса создавали крутящий момент M_B. При этом радиальные отклонения обода жесткого колеса определяли всегда в одной и той же точке. Аналогично определяли радиальные отклонения обода гибкого колеса.

Как показывают расчеты, изменение формы гибкого и жесткого колес при увеличении нагрузки сильно зависит от распределения сил, действующих на них. В связи с этим для подтверждения адекватности предложенной математической модели силового расчета волновой передачи расчетным путем были определены радиальные отклонения ободов гибкого и жесткого колес от начальных кривых при M_B=1500 Н·м и осевые перемещения торца гибкого колеса. Результаты расчета и эксперимента, проведенного в работе [5], представлены на рис. 4, 5. По горизонтальной оси отложен угол Θ между большой осью генератора волн и сечением, в котором определяли радиальные перемещения. Момент M_B направлен в противоположную сторону положительного отсчета угла Θ.





а *б*

Рис. 4. Радиальные отклонения обода жесткого колеса (*а*) и гибкого колеса (*б*):
- - - – эксперимент; ——— – расчет

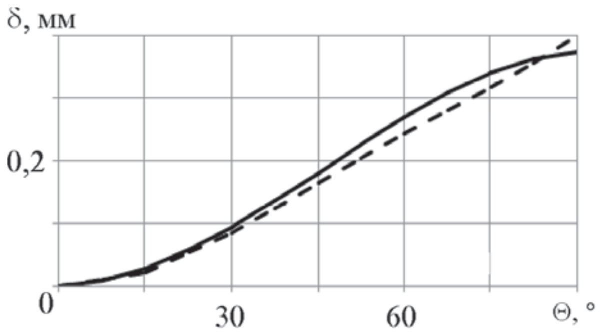


Рис. 5. Осевые перемещения торца гибкого колеса:
- - - – эксперимент; ——— – расчет

Заключение

По предложенной методике определения силового взаимодействия элементов волновой передачи с дисковым генератором волн проведен расчет радиальных перемещений ободов гибкого и жесткого колес, осевых перемещений торца гибкого колеса. Сравнение результатов расчета с результатами эксперимента показало, что использованная математическая модель волновой передачи адекватно описывает силовое взаимодействие ее элементов.

Список литературы

1. *Ковалев Н.А.* Передачи гибкими колесами. – М.: Машиностроение, 1979. –200 с.
2. *Клеников С.С.* Волновая передача как упругая система с односторонними связями // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. 1978. № 10. С. 51 – 55.
3. *Шувалов С.А.* Расчет сил, действующих на звенья волновой передачи // Вестник машиностроения. 1979. № 10. С. 5 – 9 .
4. *Люминарский И.Е., Люминарский С.Е.* Расчет сил взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011. Спец. вып. «Энергетическое и транспортное машиностроение». С. 230–240.
5. *Скворцова Н.А., Комаров В.А., Евдокимов А.Ф.* Экспериментальное определение деформаций элементов волновой передачи // Труды МВТУ. Теория механизмов. 1970. № 140. Вып. 5. С. 11 – 25.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики: учебное пос. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. С. 122– 126.
7. *Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др.* Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. / под общ. ред. В.И. Мяченкова: справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
8. *Люминарский И.Е., Люминарский С.Е.* Метод расчета линейных систем, ограниченных односторонними связями, при статическом нагружении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2009. № 2. С. 84–90.

Материал поступил в редакцию 29.02.2012

ЛЮМИНАРСКИЙ Станислав Евгеньевич

E-mail: **katjstas@mail.ru**
Тел.: **+7(495) 714-37-86 (дом.), (916) 594-54-35 (моб.)**

Кандидат технических наук, доцент кафедры теории механизмов и машин МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов – динамика и прочность зубчатых механизмов. Автор более 10 научных публикаций.

ЛЮМИНАРСКИЙ Игорь Евгеньевич

E-mail: **lie260@mail.ru**
Тел.: **+7(495) 423-11-17**

Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики и теории механизмов ФГБОУ ВПО «МГИУ». Сфера научных интересов – динамика и прочность зубчатых механизмов. Автор более 20 научных публикаций, в том числе монографии.