УДК 629.7

К ВОПРОСУ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕНЗОРА МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ КА В ПОЛЕТЕ

Е. А. Алексанов, К. Б. Алексеев, А. В. Шадян

Статья посвящена определению динамических параметров космического аппарата расчетно-экспериментальным способом. Сущность способа состоит в приложении пробных моментных воздействий к аппарату и обработке реакции аппарата на эти воздействия. Число таких воздействий может быть достаточно велико, что не всегда допустимо. Использование признаков динамической асимметрии аппарата, обоснование и использование которых приводится в статье, позволяет устранить этот недостаток. Наряду с уменьшением числа воздействий сама процедура идентификации тензора инерции при этом способе приобретает физическую наглядность.

Ключевые слова: *тензор инерции, главные оси инерции, космический аппарат, динамическая асимметрия.*

Введение

При разработке системы управления ориентацией космического летательного аппарата (КЛА) в качестве его математической модели принимается абсолютно твердое тело [1]. На первый взгляд трудно представить себе более простую модель объекта управления. Однако динамические параметры такой модели, определяемые тензором его моментов инерции, подвержены изменениям при длительном полете. Это приводит к утрате системой управления тех оптимальных свойств в смысле энергосбережения, быстродействия и т. д., которые были заложены при ее синтезе. Для их сохранения знание текущих значений тензора инерции делает возможным систематическую коррекцию законов формирования управляющих воздействий на аппарат.

Из сказанного следует необходимость измерения тензора инерции в полете. Наиболее известный расчетно-экспериментальный способ решения этой задачи основан на организации пробных воздействий на аппарат с последующей обработкой его реакции. Основным его недостатком может стать большое число пробных воздействий, обусловленное неопределенностью выбора направлений их приложения. Использование признаков динамической асимметрии аппарата, предложенное авторами, позволяет устранить этот недостаток и тем самым снизить отрицательное влияние пробных воздействий на управляемый процесс ориентации аппарата, предусмотренный программой полета. Для организации пробных воздействий здесь используются двигатели-маховики. Это преобразует модель аппарата как твердого тела в механическую систему, включающую в себя корпус аппарата и двигатели-маховики как исполнительные устройства системы управления ориентацией.

Основы расчетно-экспериментального способа

Приложение к аппарату пробных воздействий вызывает неоднозначную реакцию аппарата, которая зависит от значений его динамических параметров. Это проявляется во взаимном расположении векторов кинетического момента корпуса аппарата $\vec{K}$, совпадающего с вектором пробного воздействия $\vec{H}$ и угловой скоростью $\vec{\omega}$ в пространстве. Обозначим углы, образуемые указанными векторами с искомой осью главного момента инерции, как γ и μ, соответственно. Уже после первого воздействия значения этих углов дают исходную информацию о выборе направления второго пробного воздействия и т.д. Для конкретизации этого выбора введем два ортогональных координатных базиса $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре масс аппарата и жестко связанных с ним. Оси первого базиса совместим с его строительными осями, относительно которых создаются управляющие и пробные воздействия. В осях этого базиса определяется также тензор моментов инерции аппарата $\mathbf{I}$=$\mathbf{I}_{ij}$ $(i, j = \overline{1,3})$ [2, 3]. Оси второго базиса являются осями его главных моментов инерции $\mathbf{I}_d$=diag(J_{ii}). Будем считать, что пробные воздействия создаются тремя двигателями-маховиками, установленными по строительным осям. Обозначим векторы кинетических моментов корпуса и двигателей-маховиков как $\vec{K}$ и $\vec{H}$, соответственно. Тогда вектор кинетического момента аппарата будет $\vec{K}_a = \vec{K} + \vec{H}$. Пренебрегая влиянием возмущающих воздействий на аппарат в течение проведения сеанса эксперимента, можно записать

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{d\vec{H}}{dt}, \qquad (1)$$

где $\vec{K} = \sum_{n=1}^{3} K_n \vec{i}_n$, $\vec{H} = \sum_{n=1}^{3} H_n \vec{i}_n$, $\vec{\omega} = \sum_{n=1}^{3} \omega_n \vec{i}_n$. K_n, H_n, ω_n – проекции векторов кинетического момента корпуса аппарата, угловой скорости аппарата и кинетического момента двигателей-маховиков на строительные оси, соответственно.

Принимая начальное значение кинетического момента аппарата, равным нулю ($\vec{K}_a(0) = 0$), после окончания воздействия, имеем:

$$\mathbf{I}\vec{\omega} = -\vec{H}. \qquad (2)$$

При синтезе системы управления ориентацией КЛА одноименные оси базисов совпадают и, следовательно, равенство (2) может быть переписано в виде:

$$\mathbf{I}_d\vec{\omega} = -\vec{H}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{I}_d$ =diag(J_{ii}) – диагональная матрица моментов инерции. При известных значениях $\vec{H}$ и $\vec{\omega}$ моменты инерции определяются очевидным равенством:

$$J_{ii} = H_i / \omega_i \qquad (4)$$

при условии, что пробные воздействия прикладываются по каждой главной оси последовательно.

При изменении начальной массы аппарата или ее перераспределении оси указанных базисов приобретают угловые рассогласования. Равенство (2) сохраняет свой вид, но тензор инерции принимает форму симметрической матрицы $\mathbf{I}$=$\mathbf{I}_{ij}$ $(i, j = \overline{1,3})$. Теперь приложение пробного воздействия по одной строительной оси вызывает возникновение угловых скоростей по всем трем осям. Другими словами, если в первом случае при приложении пробных воздействий векторы $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$ совпадают, то во втором – нет. Следовательно, задача идентификации заключается в определении такого вектора пробного воздействия, при котором векторы $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$ совпадают. Это и составляет наглядную физическую основу расчетно-экспериментального способа идентификации. Основная трудность, возникающая при его применении, связана с определением направления приложения вектора $\vec{H}$. Одним приложением решить эту задачу не удается, тем более что оно реализуется по априорной информации о нахождении строительных осей в окрестностях осей главных моментов инерции. Поиски направления приложения вектора $\vec{H}$, при котором векторы $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$ совпадают, осуществляются путем многократного повторения эксперимента. Использование признаков динамической асимметрии аппарата позволяет специализировать выбор последовательности пробных воздействий и в итоге уменьшить их число.

Признаки динамической асимметрии

Возможные изменения и перераспределения массы аппарата приводят к угловому отклонению осей базисов $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$ (рис.1). Максимально допустимое отклонение, если измерять его углом конечного поворота, составляет порядка 10 град. Данное обстоятельство упрощает задачу определения осей главных моментов инерции, когда указанные базисы не совпадают. Так, если ось Ox_1 первоначально совпадает со строительной осью OX_1, то при изменении массы аппарата она будет расположена где-то в окрестности этой оси. Для определения ее точного расположения по отношению к базису $OX_1X_2X_3$ приложим к аппарату пробное воздействие. Возникающие после этого векторы $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$ (обозначая их направляющие косинусы в осях главных моментов инерции как $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T$ и $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3]^T$, соответственно), спроектируем на искомые оси главных моментов инерции.

Тогда в окрестности оси с минимальным моментом инерции $J_{\min}$ имеем следующее равенство:

$$J_{\min}\left|\vec{\omega}\right|\nu_1 = \left|\vec{K}\right|\beta_1\,, \tag{5}$$

где $\left|\vec{\omega}\right| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ – модуль вектора угловой скорости, $\left|\vec{K}\right| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$ – модуль вектора кинетического момента корпуса. С учетом того, что кинетический момент прикладывается по первой оси строительной системы координат, уравнение (5) можно переписать:

$$J_{\min}\left|\vec{\omega}\right|\nu_1 = K_1\,\beta_1\,. \tag{6}$$

Учитывая, что $\omega_1 >> \omega_2$ и ω_3, $I_{11} >> I_{12}$ и I_{13}, можно приближенно записать:

$$J_{\min}\,\nu_1 \cong I_{11}\,\beta_1\ . \tag{7}$$

Так как $J_{\min} < I_{11}$, то $\nu_1 > \beta_1$. Аналогичные рассуждения действительны в окрестности оси с максимальным моментом инерции: $J_{\max}\nu_3 \cong I_{33}\,\beta_3$, где $J_{\max} > I_{33}$, а $\nu_3 < \beta_3$.

Описанные выкладки были проверены путем численного моделирования динамических уравнений Эйлера (методом Рунге–Кутта 4–5 порядка) [4], записанных для общего случая:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z + \\ +\omega_y(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z) - \\ -\omega_z(I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z) = M_x \\ I_{yx}\dot{\omega}_x + I_y\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z + \\ +\omega_z(I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) - \\ -\omega_x(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z) = M_y \\ I_{zx}\dot{\omega}_x + I_{zy}\dot{\omega}_y + I_z\dot{\omega}_z + \\ +\omega_x(I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z) - \\ -\omega_y(I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) = M_z \end{cases}. \tag{8}$$

Обращаясь к введенным ранее углам γ и μ, имеем следующую картину расположения векторов $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$ по отношению к осям главных моментов инерции (рис. 2).

В случае приложения управляющего момента по строительной оси OX_3 (см. рис. 2, *а*) в окрестности оси с наибольшим значением момента инерции вектор $\vec{K}$ располагается ближе к главной оси Ox_3, чем вектор $\vec{\omega}$, и $\mu > \gamma$.

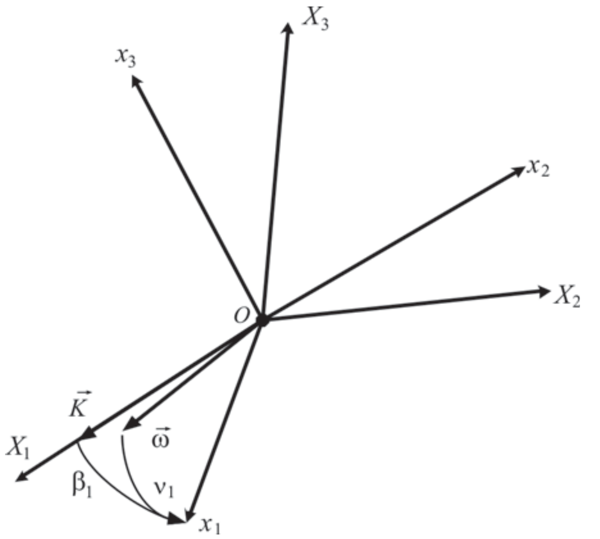

Рис. 1. Базисы осей ГМИ и ССК

В случае же приложения управляющего момента по строительной оси OX_1 (рис. 2, б) в окрестности оси с наименьшим значением момента инерции вектор $\vec{\omega}$ располагается ближе к главной оси Ox_1, чем вектор $\vec{K}$, и $\mu < \gamma$.

Методика идентификации осей главных моментов инерции

Согласно физическим признакам динамической асимметрии, расположение векторов $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$ по отношению к осям Ox_1 различно:

– при определении направления оси с минимальным значением момента инерции $J_{\min}$ пробные воздействия, начиная со второго, необходимо прикладывать по оси, совпадающей с вектором $\vec{\omega}$, до тех пор, пока вектор $\vec{\omega}$ не совпадет с единичным вектором оси Ox_1. Методика идентификации в данном случае заключается в формировании каждого последующего j+1 пробного воздействия по направлению предыдущего j вектора угловой скорости. Значение искомого минимального главного момента инерции $J_{\min}$ определяется по формуле

$$J_{\min} = H_j / \omega_j, \tag{9}$$

где H_j – величина кинетического момента при j-м пробном воздействии; ω_j – величина угловой скорости аппарата при j-м воздействии, когда направления $\vec{H}$ и $\vec{\omega}$ совпадают;

– при определении направления оси с максимальным значением момента инерции $J_{\max}$ пробные воздействия, начиная со второго, необходимо прикладывать по оси, являющейся зеркальным отображением вектора $\vec{\omega}$ относительно вектора $\vec{K}$ в плоскости указанных векторов (рис. 3).

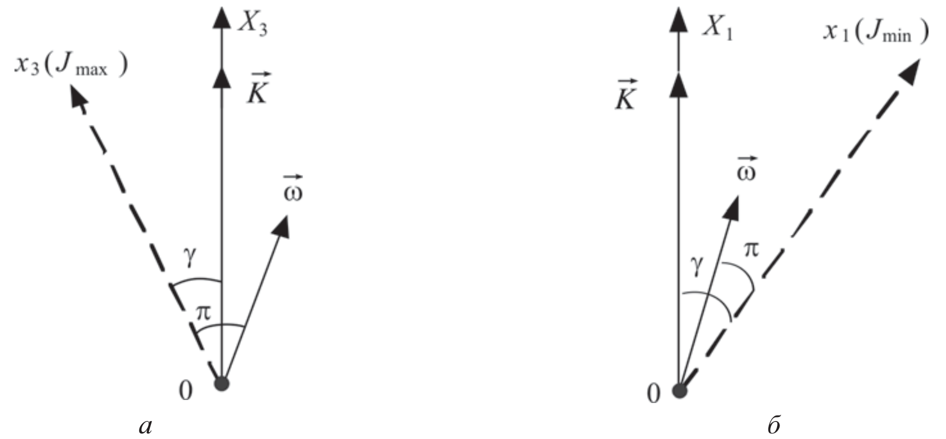

Рис. 2. Расположение векторов $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$: а – возле оси J_{max}; б – возле оси J_{min}

Идентификация оси максимального момента инерции J_{max} заключается в формировании каждого последующего пробного воздействия по направлению, полученному в результате зеркального отражения вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ от предыдущего пробного воздействия. Значение искомого главного момента инерции J_{max} определяется так же, как и в рассмотренном выше случае. Определение оси со средним значением момента инерции J_{mid} осуществляется аналогично.

Результаты математического моделирования

Рассмотрим модель аппарата, у которого моменты инерции относительно главных осей следующие: J_1=100 кг·м^2; J_2=120 кг·м^2; J_3=160 кг·м^2. Отклонение осей базиса $Ox_1x_2x_3$ от $OX_1X_2X_3$ зададим углом конечного поворота, равным 10 град. Ограничения на управляющие моменты двигателей-маховиков по каждой оси $\left|\vec{M}\right| \le 1$. Определим, согласно методике, положение оси с минимальным моментом инерции.

Приложим первое пробное воздействие по строительной оси OX_1. Решив уравнение (2), построим плоскость, в которой расположены вектора $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$, и оценим угол α между ними. Далее определим направление вектора $\vec{K}$ для следующего пробного воздействия. В данном случае (в окрестности оси с минимальным моментом инерции J_{min}) вектор $\vec{K}$ будет ориентирован по полученному направлению вектора $\vec{\omega}$ от первого пробного воздействия. Эксперименты проводятся до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left|\vec{e}_k^{\,i} \times \vec{e}_\omega^{\,j}\right| \le \varepsilon \tag{10}$$

с заранее заданной точностью ε, т.е. угол α→0.

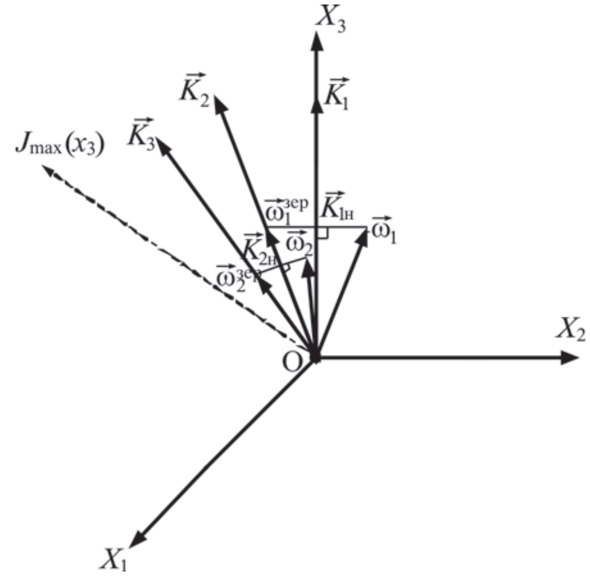

Рис. 3. Зеркальное отображение вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ относительно вектора $\vec{K}$

Здесь $\vec{e}_k^{\,j}$ и $\vec{e}_\omega^{\,j}$ – единичные орты векторов кинетического момента $\vec{K}$ и угловой скорости аппарата $\vec{\omega}$ при j-м эксперименте, когда направления $\vec{H}$ и $\vec{\omega}$ совпадают. Все результаты пробных воздействий приведены в табл. 1

В результате моделирования найдена ось минимального момента инерции OJ_{min}. Аналогичные исследования проводятся и для оси максимального момента инерции OJ_{max}, согласно вышеизложенной методике.

Данный способ показывает преимущество по сравнению со способом, предложенным в [5]. Для сравнения было проведено математическое моделирование, в котором за исходный тензор инерции принят:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 100 & -8 & -10 \\ -8 & 120 & -6 \\ -10 & -6 & 160 \end{pmatrix}.$$

Таблица. 1

Параметры пробных воздействий в окрестности момента инерции J_{min}

№ пробного воздействия	Составляющие вектора $\vec{H}$, Н·м·с	Составляющие вектора $\vec{\omega}$, рад/с	Составляющие вектора $\vec{K}$, Н·м·с	Угол α между $\vec{K}$ и $\vec{\omega}$, град.
1	H_x =-1	ω_x = 0,009937	K_x = 1	2,6013
	H_y =0	ω_y = 0,000194	K_y = 0	
	H_z =0	ω_z = -0,000408	K_z = 0	
2	H_x =-0,998969	ω_x =0,009947	K_x = 0,998969	1,7098
	H_y =-0,019457	ω_y = 0,000348	K_y = 0,019457	
	H_z =0,041004	ω_z = -0,000663	K_z = -0,041004	
3	H_x =-0,997178	ω_x = 0,009942	K_x = 0,997178	1,1483
	H_y =-0,034923	ω_y = 0,000472	K_y = 0,034923	
	H_z =0,066460	ω_z = -0,000820	K_z = -0,066460	
...	...	...	...	...
j-е	H_x =-0,989083	ω_x = 0,009891	K_x = 0,989083	0,0009
	H_y =-0,103857	ω_y = 0,001039	K_y = 0,103857	
	H_z =0,104538	ω_z = -0,001045	K_z= -0,104538	

Направление осей главных моментов инерции, предложенных в [5], удалось определить за 102 шага (60 шагов для нахождения J_{min} и 42 шага для нахождения J_{max}), тогда как с помощью предлагаемой методики – за 67 шагов (35 шагов для нахождения J_{min} и 32 шага для нахождения J_{max}).

Таким образом, предлагаемая методика позволяет уменьшить число пробных воздействий в 1,5 раза по сравнению со способом, рассмотренным в работе [5]. Большое число пробных воздействий предполагает проведение указанных экспериментов на пассивных участках орбиты или во время маневрирования, предусмотренного программой полета.

Заключение

Предложена методика расчетно-экспериментального способа идентификации динамических параметров аппарата, позволяющая улучшить эффективность существующего способа с точки зрения числа пробных воздействий. Ее основой является использование признаков динамической асимметрии аппарата, которые впервые получили свое обоснование и конкретное применение. Уменьшение числа пробных воздействий с учетом этих признаков, несомненно, будет способствовать улучшению качества управления процессом ориентации аппарата.

Список литературы

1. Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1990. – 480 с.
2. Трухан Н.М. Динамика твердого тела: учебн.-метод. пособ. – М.: Изд. МФТИ, 2000. – 42 с.
3. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: учебник. – 2-е изд., перераб. и дополн. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 719 с.
4. Андреев Г.М., Алексеев К.Б., Киселев М.И. Об определении тензора инерции космического аппарата в полете // Космические исследования. 1978. Т. 16. № 3. С. 456–459.
5. Алексеев К.Б., Злодырева О.В., Синильников О.В. К вопросу определения тензора инерции аппарата в полете // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 2. С. 90–93.

Материал поступил в редакцию 02.11.2010

АЛЕКСАНОВ Евгений Александрович

E-mail: **akb2@mail.msiu.ru**
Тел. +**7 (495) 620-39-34**

Асистент кафедры автоматики, информатики и систем управления ГОУ МГИУ. Сфера научных интересов – механика твердого тела.

АЛЕКСЕЕВ Кир Борисович

E-mail: **akb2@mail.msiu.ru**
Тел. +**7 (495) 620-39-34**

Доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры автоматики, информатики и систем управления ГОУ МГИУ. Сфера научных интересов – автоматическое управление и автоматизация. Автор более 100 научных трудов.

ШАДЯН Армен Владимирович

E-mail: **akb2@mail.msiu.ru**
Тел. +**7 (495) 620-39-34**

Аспирант кафедры автоматики, информатики и систем управления ГОУ МГИУ. Сфера научных интересов – механика твердого тела и управление ориентацией космических летательных аппаратов.