УДК 62.822

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛАХ И ГИДРОМАШИНАХ

А.А. Шейпак

ШЕЙПАК Анатолий Александрович

Доктор технических наук, профессор кафедры «Электротехника, теплотехника, гидравлика и энергетические машины» МГИУ. Академик Российской академии транспорта, профессор и действительный член Международной академии наук Сан-Марино, действительный член Международной академии наук и искусств. Заместитель председателя Научно-методического совета по теплотехнике, член Научно-методического совета по механике и председатель Научно-методической комиссии по гидравлике Министерства образования и науки Российской Федерации. Специалист в области термодинамики и теплотехники, гидравлических и тепловых машин различного назначения. Автор более 200 работ, в том числе трех монографий, учебника, 40 изобретений.

Введение

На практике достаточно часто встречается изотермическое течение газа в трубах. Чем больше отношение длины газопровода к его диаметру, тем более вероятным является изотермический процесс. Между тем в научной и учебной литературе обычно рассматривается либо адиабатическое течение, либо течение с подводом тепла в общем виде. При испытании гидромашин и гидропневмоаппаратов проверку герметичности обычно проводят воздухом или гелием. В этом случае целесообразно рассмотреть задачу об изотермическом течении газа через узкие щели (каналы). Число Рейнольдса при движении газа в канале постоянного сечения при изотермическом течении будет оставаться постоянным по длине газопровода.

Обычно для моделирования течений рабочего тела в энергетических машинах большой мощности – гидравлических турбинах и насосах, применяется модель газообразного рабочего тела [1]. Однако в случае принятия гипотезы несжимаемого рабочего тела со средним арифметическим значением плотности ее используют без достаточного обоснования граничных значений параметров режимов.

В настоящей работе представлены математические и физические модели течения газа в неподвижных (на примере трубы) и вращающихся (на примере насоса) каналах с целью определения пределов динамического подобия в предположении справедливости гипотезы несжимаемой сплошной среды со среднеарифметическим значением плотности.

Изотермическое ламинарное течение газа через плоский канал

Рассмотрим модельную задачу об изотермическом течении газа через плоский канал вдоль оси x, причем величина высоты канала по оси y $h=y(x)$ намного меньше длины канала. Изменением давления по оси y пренебрегаем.

Уравнение неразрывности в этом случае примет следующий вид:

$$V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) = 0. \qquad (1)$$

Уравнения движения в приближении Рейнольдса будут:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\,; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad (2)$$

где, μ – коэффициент динамической вязкости.

Плотность газа определяется уравнением состояния Клапейрона-Менделеева (термически совершенный газ):

$$\rho = \frac{pM}{RT}\,,\ \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{M}{RT}\frac{\partial p}{\partial x},$$

где M – молекулярная масса, R – универсальная газовая постоянная.

Интегрируя уравнение неразрывности по высоте канала

$$\int_0^h V_x \frac{M}{RT}\frac{\partial p}{\partial x} dy + \frac{pM}{RT}\left[\int_0^h \frac{\partial V_x}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right] = 0,$$

после несложных преобразований можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^h V_x dy + p\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h V_x dy = 0.$$

Будем искать решение для скорости в таком виде:

$$V_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y(y-h).$$

Тогда уравнение для поля давлений будет:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 \frac{h^3(x)}{6} + p\frac{h^3(x)}{6}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^2(x)}{2}\frac{dh}{dx} = 0. \quad (3)$$

При $h=const$ уравнение принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + p\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Обозначив $\frac{\partial p}{\partial x} = z,\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{dz}{dx} = z\frac{dz}{dp}$, получим уравнение

$$z + p\frac{dz}{dp} = 0,$$

для которого нетрудно получить аналитическое решение с учетом граничных условий $p(0) = p_1$, $p(l) = p_2$ в виде:

$$p = \sqrt{p_1^2 - \left(p_1^2 - p_2^2\right) x/l}\,, \qquad (4)$$

где p_1 – давление в начальном сечении канала; p_2 – давление в конечном сечении канала; l – длина канала.

Если $\rho=const$, то $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_1 - p_2}{l}$ и $p = p_1 - (p_1 - p_2)x/l$.

Сравнение эпюр давления термически совершенного газа и несжимаемой жидкости для двух значений начального давления представлено на рис1.

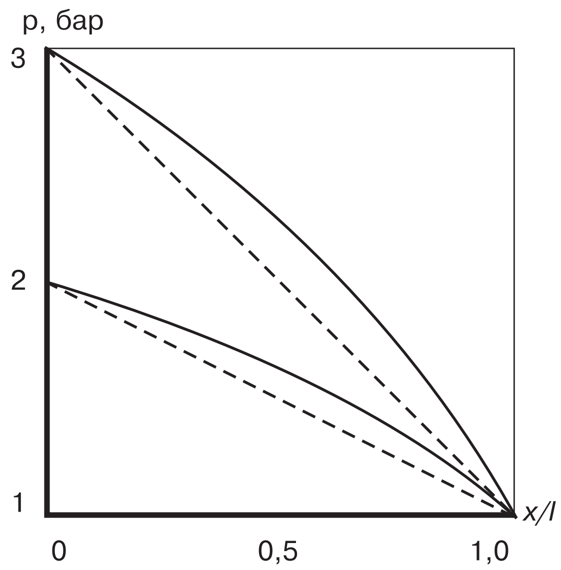

Рис. 1. Эпюра давлений для изотермического течения газа (сплошная кривая) и для жидкости с постоянной плотностью (пунктирная прямая)

Для изотермического течения газа

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_1^2 - p_2^2}{2pl} = -\frac{p_1^2 - p_2^2}{2l\sqrt{p_1^2 - \left(p_1^2 - p_2^2\right)x/l}} \qquad (5)$$

и эпюра скоростей будет описываться следующей формулой:

$$V_x = -\frac{1}{4\mu l}\frac{p_1^2 - p_2^2}{p} y(y-h) = -\frac{1}{4\mu l}\frac{p_1^2 - p_2^2}{\sqrt{p_1^2 - \left(p_1^2 - p_2^2\right)x/l}} y(y-h). \qquad (6)$$

Массовый расход газа можно подсчитать как

$$Q_M = \rho b \int_0^h V_x dy\,,$$

где b – размер канала в поперечном направлении.

После несложных преобразований получаем:

$$Q_M = -\frac{Mb}{RT}\frac{1}{4\mu l}\left(p_1^2 - p_2^2\right)\int_0^h y(y-h)\,dy = \frac{M}{RT}\frac{1}{4\mu l}\left(p_1^2 - p_2^2\right)\frac{h^3 b}{6}.$$

Вводя средние значения давления и плотности

$$p_{av} = \frac{p_1 + p_2}{2},\ \rho_{av} = \frac{p_{av}M}{RT},$$

получаем следующие формулы для массового и объемного расходов газа:

$$Q_M = \rho_{av}\frac{(p_1 - p_2)h^3 b}{12\mu l},\ Q = \frac{(p_1 - p_2)h^3 b}{12\mu l}. \quad (7)$$

Эти формулы верны при дозвуковой скорости газа, причем ее максимальное значение реализуется в выходном сечении канала:

$$V_{max} = \frac{h^2\left(p_1^2 - p_2^2\right)}{16\mu l p_2} \le a = \sqrt{kRT},$$

где a – скорость звука; k – показатель адиабаты.

После несложных преобразований можно получить формулу для предельной величины давления на входе в канал:

$$p_1^* = \sqrt{p_2^2 + \frac{16\mu l p_2\sqrt{kRT}}{h^2}}. \quad (8)$$

Например, для канала длиной 10 мм и высотой 0,1 мм при истечении воздуха в атмосферу предельное давление будет равно 2,77 бар, что соответствует отношению давлений $\varepsilon = \frac{p_2}{p_1} = 0{,}361$. Заметим, что при изоэнтропийном истечении критическое отношение давлений равно ε=0,528, а при изотермическом течении газа в трубе ε=0,605. Эти значения получены в предположении постоянного значения коэффициента гидравлического трения и равномерной эпюры скоростей, причем в случае изотермического течения при значении $M^2<1/k$ в цилиндрической трубе скорость по длине трубы возрастает, а при значениях $M^2>1/k$ скорость по длине трубы уменьшается. Следовательно, значение $M=\sqrt{1/k}$ для изотермического течения в трубе является таким же критическим (точнее предельным), как значение M=1 для адиабатного течения. Перейти через это значение M, которое при k=1,4 (в частности для воздуха) равно 0,845, сохраняя изотермическое течение, невозможно, так как малейшее отклонение числа M от предельного значения в сторону увеличения приводит к изменению знака приращения dM, и поток вновь возвращается к предельному состоянию.

В нашем случае при увеличении длины канала и уменьшении его высоты величина критического давления на входе в него возрастает.

Однако, по всей вероятности, уже при $p_1<p_1^*$ формулы (4)–(8) могут давать большие отклонения от действительных значений параметров рабочего тела из-за пренебрежения величинами конвективых составляющих ускорения в уравнениях движения (2).

Границу применимости полученного решения можно определить из обычно принимаемого условия: $M \le 0{,}3$. Тогда величину предельного значения давления на входе в канал можно определить по следующей формуле:

$$p_1^* = \sqrt{p_2^2 + \frac{5\mu l p_2\sqrt{kRT}}{h^2}}. \quad (9)$$

Разумеется, необходимо соблюдать условие по числу Рейнольдса [2]:

$$Re = \frac{M}{RT}\frac{\left(p_1^2 - p_2^2\right)h^3}{24\mu^2 l} \le 25. \quad (10)$$

Так, при длине канала l = 10 мм и высоте канала h = 0,01 мм число Рейнольдса будет равно 18.

Турбулентное изотермическое течение в трубе постоянного сечения

Потери давления на трение в трубе при турбулентном режиме течения на участке длиной dx можно вычислить по формуле Дарси:

$$dp = \lambda(dx/D)\,(\rho V^2/2), \quad (11)$$

где λ – коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси); D – диаметр трубы; $\rho = \rho(x)$, $V \equiv V_x = V(x)$.

Интегрируя в предположении, что λ=const от начального до конечного сечений, удаленных друг от друга на расстояние l, получим такое выражение:

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda\,(l/D)\,(\rho V)^2(RT).$$

Преобразуем его следующим образом:

$$(p_1 + p_2)\,(p_1 - p_2) = (l/D)\,(\rho_1 V_1)\,(\rho_2 V_2)\,(RT).$$

Считая среднее арифметическое и среднее геометрическое значения давления равными, приходим к расчетной формуле для гипотетической несжимаемой жидкости со средней плотностью:

$$(p_1 - p_2) = \lambda\,(l/D)\,(\rho_{av} V^2_{av}/2)\,. \qquad (11)$$

Если $2(p_1 - p_2)/(p_1 + p_2) < 0{,}2$, то ошибка от такой замены не превысит 1%. Следовательно, истинное изотермическое течение газа можно моделировать течением гипотетической несжимаемой жидкости с плотностью, равной средней плотности газа в начальном и конечном сечениях как для потерь на трение, так и для местных гидравлических сопротивлений.

Тогда коэффициент гидравлических потерь по формуле Вейсбаха можно подсчитать следующим образом:

$$\zeta = \frac{2\Delta p A^2}{\rho_{av} Q_M{}^2}\,, \qquad (12)$$

где $\Delta p = (p_1 - p_2)$ разность полных давлений для входа и выхода из канала.

Правомерность предложенной модели течения проверялась для двух гидравлических образцов. Исследовалось местное сопротивление в виде диафрагмы с острой входной кромкой диаметром d = 6 мм, размещенной в трубопроводе с внутренним диаметром D = 20 мм. Для определения потерь на трение испытывался трубопровод из хромоникелевой стали длиной 2134±2 мм и диаметром d =10 мм. Перед начальным сечением с кольцевым отбором давления был предусмотрен участок для стабилизации течения длиной l=100D .

Для проверки системы измерений были проведены эксперименты по определению коэффициента Дарси λ в функции числа Re для малых чисел Маха (M<0,2). Результаты экспериментов представлены на рис. 2, где показана и кривая, полученная по формуле Блазиуса. Совпадение экспериментальных результатов с теоретической зависимостью подтверждает корректность проведения экспериментов.

Зависимость коэффициента ζ от числа M, подсчитанного по величине отношения давлений в предположении изоэнтропичности (на нижней шкале отложена степень понижения давлений), представлена на рис. 3. Режимы испытаний при изменении числа M выбирались таким образом, чтобы число Рейнольдса оставалось постоянным и равным $6{\cdot}10^5$.

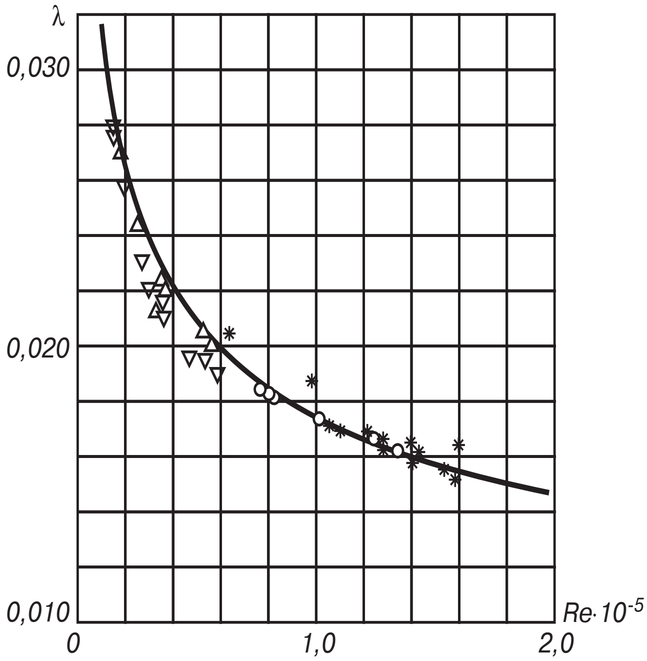

Рис. 2. Зависимость коэффициента Дарси от числа Рейнольдса

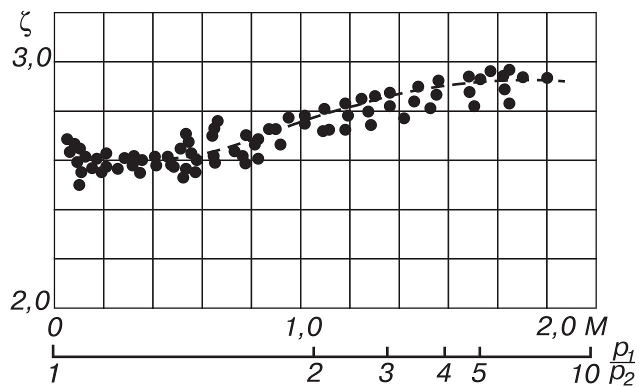

Рис. 3. Зависимость коэффициента местных гидравлических потерь z от величины числа Маха и отношения давлений

Из рассмотрения зависимостей, представленных на рис. 3, можно сделать заключение, что для M < 0,7 коэффициент местных гидравлических потерь не зависит от сжимаемости рабочего тела, причем его величина (ζ = 2,60) в пределах точности измерений совпадает с величной ζ для несжимаемой жидкости (данные И. Е. Идельчика [3]). Для М > 0,7, вплоть до второго критического режима, коэффициент ζ является слабо возрастающей монотонной функцией. Отличие в значениях коэффициента гидравлических потерь в области второго критического режима от аналогичных значений в области малых чисел М не превышает 10 %.

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента Дарси λ в функции изоэнтропийного числа М при постоянном числе Рейнольдса, равном 10^5.

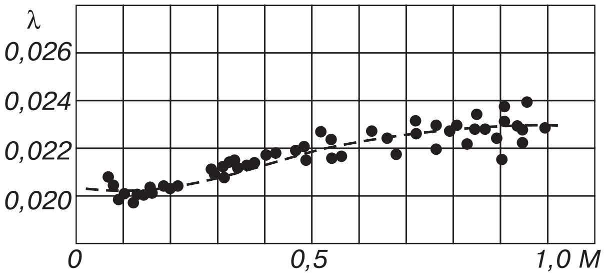

Рис. 4. Зависимость коэффициента Дарси λ от числа Маха М при $Re = 10^5$

Потери на трение зависят от сжимаемости рабочего тела, начиная с чисел М>0,3 (p_1/p_2 >1,1). Однако после области интенсивного увеличения коэффициента трения (0,3<М<0,7) для М>0,7, вплоть до режима запирания, величина практически не изменяется.

Моделирование работы двухступенчатого центробежного насоса

Гидравлическая машина состоит из совокупности неподвижных и подвижных каналов, совершающих возвратно поступательное или вращательное движения. Чаще реализуется турбулентный режим течения жидкости, однако при перекачке вязких жидкостей нередко наблюдается ламинарный режим, особенно в уплотнительных устройствах.

При испытаниях гидравлических машин реальное (натурное) рабочее тело часто заменяется газом (для уменьшения мощности). Обычно применяют воздух, однако в некоторых случаях для получения автомодельного режима по числу Рейнольдса целесообразно использовать газы с высокой молекулярной массой. Течение газа во вращающихся каналах машин в области оптимальных режимов работы близко к изоэнтропийному, при существенном отклонении от оптимального режима процесса приближается к изотермическому.

Можно показать, что для случая изоэнтропийного процесса использование величины напора H по средней плотности равносильно оставлению двух членов в разложении ряда $H = f(\frac{\Delta p}{p})$. Величина изоэнтропийного напора определяется по следующей формуле [4]:

$$H = \frac{k}{k-1}\frac{RT_1}{g}[(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{k-1}{k}} - 1] = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{g\rho_1}[(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{k-1}{k}} - 1].$$

Очевидно, что

$$(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{k}{k-1}} = 1 + \frac{k-1}{k}\frac{\Delta p}{p_1} + \frac{k-1}{k}(\frac{k-1}{k} - 1)\frac{1}{2}\{\frac{\Delta p}{p_1}\}^2 + \ldots .$$

Ограничиваясь членом с $(\frac{\Delta p}{p_1})^2$, получим:

$$H = \frac{\Delta p}{g\rho_1}[1 - \frac{1}{2k}\frac{\Delta p}{p_1}] \approx \frac{\Delta p}{g\rho_1}\frac{1}{1 + \frac{1}{2k}\frac{\Delta p}{p_1}} .$$

Так как $(\frac{\rho_2}{\rho_1})^k = \frac{p_2}{p_1}$, то $\rho_2 \approx \rho_1(1 + \frac{1}{k}\frac{\Delta p}{p_1})$ и

$$\rho_{av} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_1(1 + \frac{1}{2k}\frac{\Delta p}{p_1}) .$$

Тогда

$$H = \frac{\Delta p}{g\rho_{av}} .$$

Нами были проведены испытания двухступенчатого центробежного насоса для подачи жидкого водорода с осевой предвключенной ступенью на входе для обеспечения высоких антикавитационных характеристик. Обе ступени насоса имеют спиральные отводы. Плавающие кольца были подпружинены для гарантии их нормальной работы. В насосе между первой и второй ступенями имеется устройство для компенсации осевой силы (гидродинамическая пята). Наружный диаметр ступеней D_2=158мм, угол установки лопатки на выходе β_2=30 °.

Целью испытаний являлось получение напорной характеристики и, главное, проверка работоспособности гидродинамической пяты в большом диапазоне режимов работы.

Первая серия испытаний была проведена на насосе с фиксированной величиной зазора в пяте для сравнения напорных характеристик, полученных на воде, фреоне-22 и воздухе. Напорные характеристики в координатах $\overline{H} = \frac{H}{n^2}$ и $\overline{Q} = \frac{Q}{n}$ (Q – подача рабочего тела) практически совпали для всех рабочих тел за исключением области $\overline{Q} > 1{,}1 \cdot 10^{-6}$, где в случае воды появилась кавитация в горле диффузора. Значения приведенного напора $\overline{H}$ для номинального значения $\overline{Q} = 0{,}8 \cdot 10^{-6} \frac{м^3 \cdot мин}{об \cdot сек}$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

Приведенный напор для различных рабочих тел

Рабочее тело	вода	воздух	фреон-22
$\overline{H}, \ \frac{м \cdot мин^2}{об^2}$	$8{,}50 \cdot 10^{-7}$	$8{,}42 \cdot 10^{-7}$	$8{,}51 \cdot 10^{-7}$

Число Маха M_u (по окружной скорости) для воздуха равно 0,12, для фреона-22 – 0,14. Число Рейнольдса $Re = \frac{u_1 D_1}{\nu_1}$ изменялось при работе на воздухе от $1 \cdot 10^5$ до $2 \cdot 10^5$, при работе на фреоне-22 – от $1{,}5 \cdot 10^5$ до $8 \cdot 10^5$, при работе на воде $Re = 15 \cdot 10^5$. Меньшие значения приведенного напора в случае воздуха можно объяснить более низкими средними значениями числа Рейнольдса на границе автомодельности по этому критерию.

Проверка работы насоса при больших числах оборотов проводилась с использованием в качестве рабочего тела фреона-22 ($Re \approx 4 \cdot 10^5$) и фреона-318 ($Re \approx 3{,}5 \cdot 10^5$). Последний был выбран для проведения экспериментов потому, что на нем легко получать большие величины M_u при умеренных числах оборотов, ограниченных при автономных испытаниях насоса работоспособностью стенда.

Напор насоса и статический напор на диаметре рабочего колеса подсчитывался по среднему значению плотности ρ_{av}. Анализ экспериментальных данных показал, что полный напор за ступенью ($\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$ соответственно) не автомоделен по числу Маха, начиная с $M_u \geq 0{,}2$. В то же время статический напор ($\overline{H}_{c1}$ и $\overline{H}_{c2}$, соответственно) остается практически неизменным вплоть до $M_u = 0{,}4$. Таким образом, область моделирования при проверке работы гидродинамической пяты существенно больше, чем при моделировании напорной характеристики.

На основании приведенных результатов можно сделать заключение о возможности моделирования осевых сил при работе насосов на режимах, когда нельзя пренебрегать влиянием сжимаемости рабочего тела.

Для обобщения напорных характеристик в области больших чисел M_u была применена поправка Прандтля-Глауэрта [1] для расчета обтекания профиля крыла в дозвуковом потоке газа. Для насоса она будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{H} = \frac{\widetilde{H}}{\sqrt{1 - M_u^2}} ,$$

где $\widetilde{H}$ – приведенный напор при работе насоса на несжимаемом рабочем теле; $\overline{H}$ – приведенный напор – на сжимаемом рабочем теле.

Или, поскольку течение происходит в спиральном отводе, более корректна поправка по абсолютной, а не по переносной скорости:

$$\overline{H} = \frac{\widetilde{H}}{\sqrt{1 - M_{v2}^2}} .$$

Обобщение экспериментальных данных по числу M_{v2} дало несколько лучшие результаты. В табл. 2 приведены дисперсии рассеяния величин приведенных напоров $\overline{H}$ и $\widetilde{H}$ относительно соответствующих средних значений.

Пересчет полных напоров на несжимаемую жидкость ведет к уменьшению дисперсии, статических – к ее увеличению. Различия между дисперсиями значимы по критерию Фишера с уровнем значимости 0,05.

Таблица 2

Сравнение дисперсий приведенных напоров

Дисперсии	Рабочее тело	
	Фреон-22, n=5	Фреон-318, n=4
$D\,(\overline{H})\cdot 10^4$	4,3	9,2
$D\,(\tilde{H})\cdot 10^4$	0,5	1,0
$D\,(\overline{H}_1)\cdot 10^4$	1,3	1,0
$D\,(\tilde{H}_1)\cdot 10^4$	0,2	0,3
$D\,(\overline{H}_2)\cdot 10^4$	0,44	0,41
$D\,(\tilde{H}_2)\cdot 10^4$	0,14	0,29
$D(\overline{H}_{c1})\cdot 10^4$	0,002	0,06
$D(\tilde{H}_{c1})\cdot 10^4$	0,02	1,5
$D(\overline{H}_{c2})\cdot 10^4$	0,1	0,01
$D(\tilde{H}_{c2})\cdot 10^4$	0,3	0,16

Выводы

1. В приближении Рейнольдса получено аналитическое решение задачи изотермического течения газа через узкий канал постоянного сечения.

2. Установлена граница применимости режимов приближенного моделирования гидравлических устройств, включающих местные гидравлические сопротивления и сопротивления трения на сжимаемых рабочих телах.

3. Показана возможность моделирования работы центробежных насосов на сжимаемых рабочих телах.

Список литературы

1. Повх И.Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении, – М.Л.: Машиностроение, 1965. – 480 с.
2. Шейпак А.А. Гидравлика и гидропневмопривод: Учебник. Ч. 1: Основы механики жидкости и газа. 5-е изд., перераб. и доп. – М.: МГИУ, 2006. – 266 с.
3. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям.– М.Л.: Госэнергоиздат, 1960. – 464 с.
4. Теплотехника / Под ред В.Н. Луканина. – М.: Высшая школа, 2000. – 672 с.