УДК 539.3

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ИЗВЕСТНЯКОВОЙ ПОРОДЕ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Н.С. Пахалина, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко

Рассмотрено применение вариационного метода для определения развития трещины в грунте вокруг скважины, находящейся под давлением. Задача осесимметричная и на заданной глубине трещина приобретает форму раскрытого зонтика, след пересечения которого с вертикальной диаметральной плоскостью подлежит определению. Уравнение Эйлера-Лагранжа соответствующего функционала решается численно с помощью пользовательского пакета «Математика». Получены траектории трещин для ряда краевых условий.

Ключевые слова: *вариационный принцип, трещина, известковая порода.*

Введение

Гидравлический разрыв пласта представляет нагнетание в него жидкости при достаточно высоком давлении, чтобы вызвать раскрытие трещин в породе. Гранулируемые материалы, называемые «расклинивающими агентами» («пропантами»), включающие естественные пески и достаточно дорогие синтетические материалы, закачиваются внутрь образованной трещины в виде суспензии. Они поддерживают образовавшуюся трещину в открытом виде [1]. Вопросы образования и развития трещин около скважин имеют прямое отношение к расчету объемов газодобычи. Существенный вклад в развитие теории гидроразрыва нефтегазоносных пластов внесен Ю.П. Желтовым [2].

В настоящее время форма и размеры искусственно вызываемых трещин известны только предположительно. Поэтому расчет траектории терщины может быть полезен, в частности, для последующего исследования возможности оптимизации ее геометрии. Цель данной работы состояла в попытке расчета траектории трещины, возникающей в известняковой породе вокруг скважины от действия внутреннего давления. Обычно трещина разрывает породу вдоль образующей скважины. Однако нельзя исключать и другие возможности распространения трещины. Сделано предположение, что трещина принимает куполообразную форму, и задача является осесимметричной. Нужно определить образующую этого купола. Рассматривается напряженное состояние от нагрузки в виде внутреннего давления в скважине и вертикальной составляющей от веса грунта (всестороннее сжатие на глубине и специфика механики грунтов не учитывались).

Для решения этой задачи использован интегральный метод, предполагающий поиск уравнения траектории трещины как экстремали некоторого функционала, зависящего от исходного напряженного состояния (невозмущенного трещиной).

Основные положения вариационного принципа

Использованный в работе метод исходит из того, что трещина представляет обобщенную геодезическую линию [3]. Обычная геодезическая линия на плоскости доставляет экстремум функционалу вида $\int_A^B ds$. Однако напряженное состояние искажает метрику пространства и элемент длины примет вид $\Phi(x,y,y')\,ds$, где $y = y(x)$. Функция Φ выбирается из дополнительных условий. В новом пространстве линия трещины $y(x)$ есть обобщенная геодезическая линия, определяемая условием $\left(ds = \sqrt{1+y'^2}\ dx\right)$

$$\delta\int_A^B \Phi(x,y,y')\,ds = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, экстремаль $y = y(x)$ – это уравнение траектории трещины, а условия на концах трещин могут быть разными в зависимости от постановки задачи [4, 5].

Траектория трещины полностью определяется видом функции Φ, которую следует задавать в соответствии с классическими теориями прочности через напряжения или деформации в теле без трещины. Хрупкое разрушение, как известно, описывается первой или второй теориями прочности. Поскольку на глубине в основном действуют сжимающие напряжения, целесообразно воспользоваться второй теорией прочности (теория наибольшей относительной деформации), поэтому примем

$$\Phi = k\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right].$$

Условие экстремума (1) приводит к уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right) = 0, \qquad (2)$$

решение которого дает траекторию трещины $y = y(x)$.

Безусловно, этот метод не может претендовать на полное решение задачи о пути распространения трещины, и его можно использовать только в качестве ориентировочной оценки [6].

Постановка и решение задачи

Воспользуемся выше приведенным методом. Пусть трещина на заданной глубине образуется по всей окружности стенки цилиндрической скважины и растет, оставаясь осесимметричной относительно оси скважины. Введем цилиндрическую систему координат с началом на уровне поверхности земли на оси скважины так, что ось y совпадает с осью скважины, x – радиус, θ – угловая координата (рис. 1).

Выпишем компоненты напряженного состояния в среде вокруг скважины [7]:

$$\sigma_x = -\frac{(p + \gamma_p y)\,a^2}{x^2};$$
$$\sigma_\theta = \frac{(p + \gamma_p y)\,a^2}{x^2};\ \sigma_y = -\gamma\,y, \qquad (3)$$

где p – давление жидкости в скважине; γ_ρ – удельный вес жидкости; γ – удельный вес грунта; a – радиус скважины; σ_x – радиальное напряжение; σ_θ – окружное напряжение; σ_y – напряжение, обусловленное весом грунта.

Рассмотрим две диаметральные плоскости, угол между которыми равен $d\theta = dl/x$. Искомое уравнение линии трещины на обеих плоскостях одинаково, но расстояние между ними растет пропорционально радиусу x. Это следует учесть при выборе подфункционального выражения.

Примем, что функция Φ пропорциональна эквивалентному напряжению по второй теории прочности и умножим её на x для учета расхождения между диаметральными плоскостями. Эквивалентное напряжение равно

$$\sigma_{eq} = \sigma_\theta - \nu(\sigma_x + \sigma_y) =$$
$$= \frac{p\,a^2(1+\nu)}{x^2} + \frac{\gamma_p\,y\,a^2(1+\nu)}{x^2} + \nu\gamma\,y, \qquad (4)$$

где ν – коэффициент Пуассона грунта.

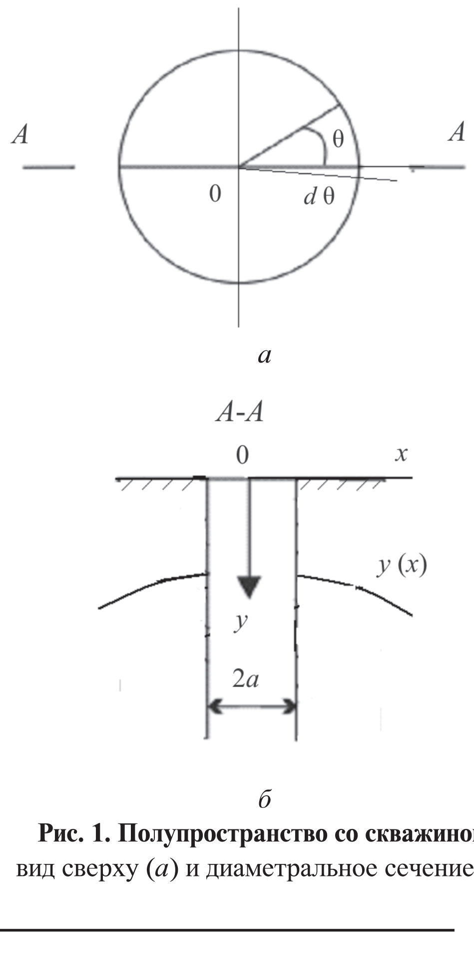


Рис. 1. Полупространство со скважиной:
вид сверху (*а*) и диаметральное сечение (*б*)

Таким образом, условие (1) примет вид:

$$\delta\int_a^x \Phi(x,y)\,x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\delta\int_a^x F(x,y,y')\,dx=0. \quad (5)$$

Уравнение Эйлера (2) в нашем случае будет:

$$y''=\frac{\left(\frac{A}{x^2}+\frac{B\,y}{x^2}-C\,y\right)y'}{\frac{A}{x}+\frac{B\,y}{x}+C\,y\,x}-\frac{1}{1+(y')^2}+\frac{A+(y+1)(B+C\,x^2)}{A+By+C\,y\,x^2}; \quad (6)$$

$$A=pa^2(1+\nu),\ B=\gamma_p a^2(1+\nu),\ C=\nu\gamma. \quad (7)$$

Структура полученного уравнения

$$y''=f(x,y,y')$$

позволяет использовать численные методы для его решения.

Результаты расчетов траектории трещины

В качестве грунта возьмем известняковую породу, а в качестве жидкости в скважине – воду со следующими свойствами:

для грунта $\nu=0{,}1$, $\gamma=19000\ \text{Н}/\text{м}^3$, для воды $\gamma_p=9982\ \text{Н}/\text{м}^3$.

Приняты следующие значения давления воды: $p=50$ атм $=5$ МПа, $p=75$ атм $=7{,}5$ МПа и $p=100$ атм $=10$ МПа.

Краевые условия:

при $y=h$, $x=a$, $y'=0$.

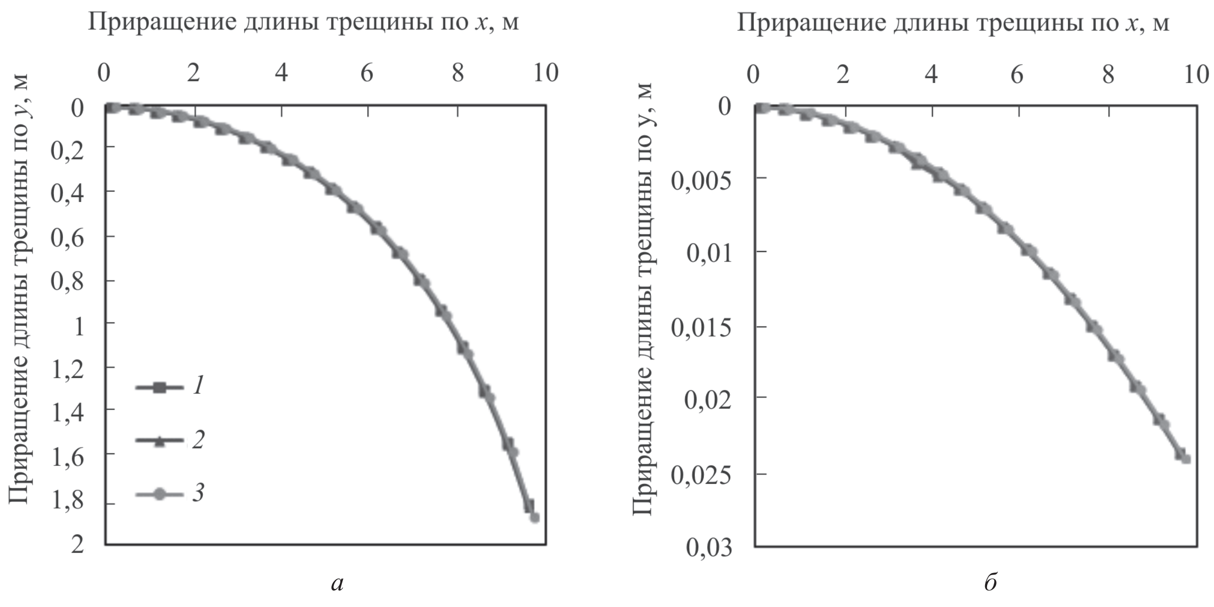
Глубина, с которой начинают развиваться трещины, $h=20$, 200 и 1000 м, радиус скважины $a=0{,}1$ и $a=0{,}2$ м. Расчет протяженности трещины вокруг скважины проводили до диаметра трещины 20 м.

Применение пользовательских программ позволило получить численное решение за приемлемое время без дополнительных преобразований. Решения получены в пакете Wolfram Research Mathematica 9.0.

Результаты расчета представлены на рис. 2–4.

Трещина имеет форму зонтика выпуклостью вверх. Изменение диаметра скважины практически не влияет на траекторию трещины (рис. 2). В то же время изменение глубины h инициирования трещины гидроразрыва значительно сказывается на траектории: увеличение h приводит к более плоским, пологим трещинам (рис. 3).

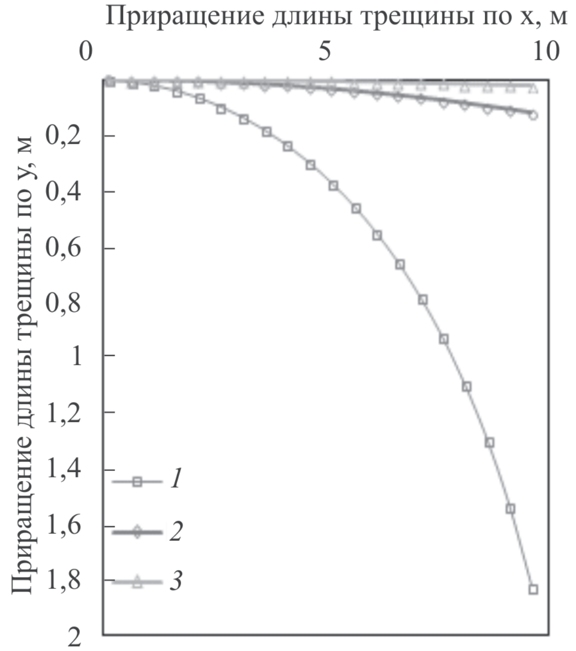
Можно отметить незначительное расхождение траектории трещины при изменении внутреннего давления в скважине от 5 МПа до 10 МПа лишь на малых глубинах (рис. 4 *а*). Существенное увеличение глубины инициирования трещины гидроразрыва нивелирует влияние внутреннего давления в скважине (рис. 4 *б* и *в*).



а *б*

Рис. 2. Траектория трещины в диаметральной плоскости

для $h=20$ (*а*), $h=1000$ (*б*) м и различных диаметров скважины: 1 – $a=0{,}075$ м; 2 – $a=0{,}1$ м; 3 – $a=0{,}2$ м



а

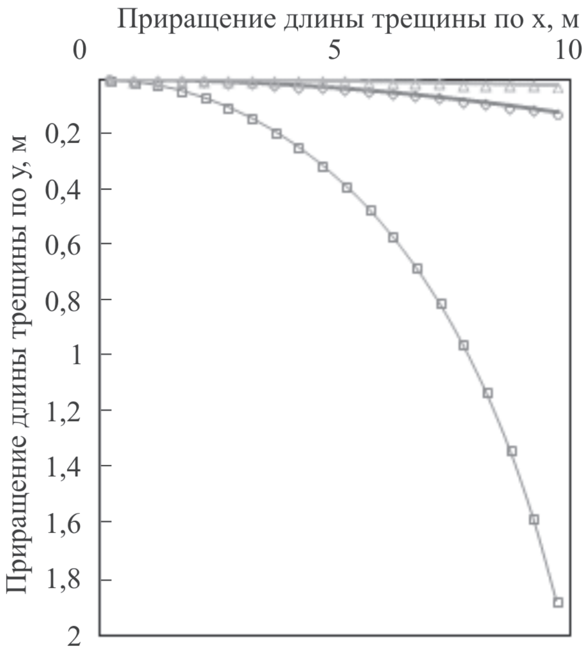
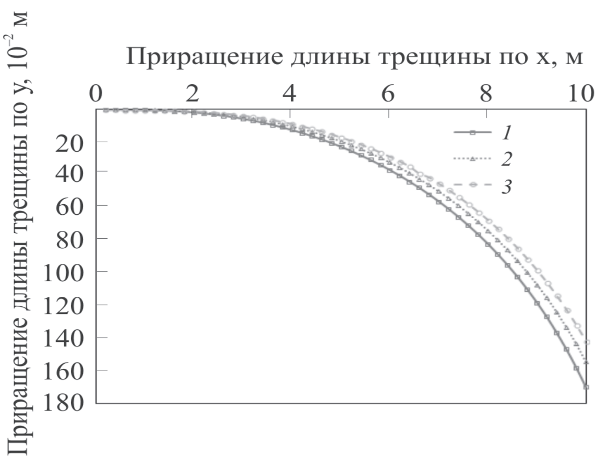
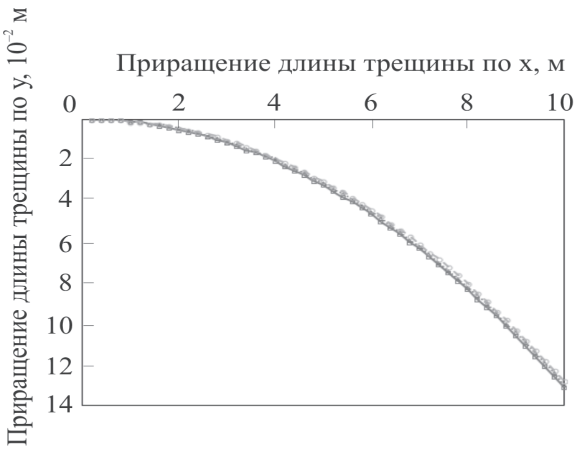


Рис. 3. Траектория трещины в диаметральной плоскости для a = 0,1 (*а*) и a = 0,2 (*б*) м и различной глубины скважины: 1 – h = 20 м; 2 – h = 200 м; 3 – h = 1000 м



а



б

в

Рис. 4. Траектории трещин в скважине для глубины h = 20 м (*а*); h = 200 м (*б*); h = 1000 (*в*) м **при разных давлениях воды:** 1 – p = 5 МПа; 2 – p = 7,5 МПа; 3 – p = 10 Мпа

Заключение

В работе рассмотрена применимость вариационного метода для определения траектории развития трещины в грунте вокруг скважины, находящейся под давлением. В частности, приведены результаты расчета траектории трещины гидравлического разрыва нефтегазоносных пластов. Дальнейшее развитие вариационного метода для определения траектории трещины гидравлического разрыва предполагает решение задачи механики грунтов с учетом неоднородности среды.

Список литературы

1. *Экономидес М.*, *Олини Р.*, *Валько П.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследовани, 2007. – 236 с.
2. *Желтов Ю.П.* Механика нефтегазоносного пласта. – М.: «Недра», 1975, 216 с.
3. *Фридман Я.Б.*, *Морозов Е.М.* Траектории трещин хрупкого разрушения как геодезические линии на поверхности тела // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139. №1. С. 87–90.
4. *Kirzhanov D.*, *Matvienko Yu.G.*, *Morozov E.M.* Comparing variational criteria used to predict the path of a crack. In: Proceeding of 18th ECF Fracture of Materials and Structures from Micro to Macro Scale, 30 Aug. – 3 Sept. 2010, Dresden, Germany, pp. 1–8.
5. *Морозов Е.М.* Возможно ли отыскание траектории трещины сразу в целом? // Мировое сообщество: проблемы и пути решения. 2001. №11. С. 27–38.
6. *Партон В.З.*, *Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. 504 с.
7. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов: Учебник для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ, 2000. – 592 с.

Материал поступил в редакцию 13.01.2014

ПАХАЛИНА Наталия Сергеевна

E-mail: **pakhalina-09@yandex.ru**
Тел.: **(916) 614-63-27**

Студент 5-го курса Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Сфера научных интересов: механика разрушения.

МОРОЗОВ Евгений Михайлович

E-mail: **evgeny-morozov@mtu-net.ru**
Тел.: **(906) 793-21-96**

Доктор технических наук, профессор кафедры «Физика прочности» Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Сфера научных интересов: механика разрушения. Автор более 300 научных трудов.

МАТВИЕНКО Юрий Григорьевич

E-mail: **matvienko7@yahoo.com**
Тел.: **(499) 135-77-71**

Доктор технических наук, профессор, заведующий отделом в институте машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Сфера научных интересов: прочность, живучесть и безопасность машин. Автор более 200 научных трудов.