УДК 614.8.084, 519.863, 519.816, 378.046.04

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНОВ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ПРЕДПРИЯТИЙ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

А.В. Майструк

Представлена математическая модель задачи оптимизации планов обучения специалистов предприятий с учетом требований безопасности по критерию минимума затрат. Рассмотрены особенности ее формализации в виде двухиндексной модифицированной задачи целочисленного линейного программирования, а также методические подходы для приведения нестандартных задач линейного программирования к стандартному виду. Эффективность моделей подтверждена результатами моделирования. Приведен пример и показан способ решения задачи оптимизации с помощью программы электронных таблиц MS Excel.

Ключевые слова: *безопасность производственных процессов, охрана труда, обучение, риск, специалисты, компетентность, потенциально опасные объекты, оптимизация, математическое моделирование*

Введение

В современных условиях экономического развития ключевой проблемой, связанной с обеспечением эффективности функционирования сложных систем, является оптимизация управления (планов, программ, режимов функционирования и т.п.) с учетом особенностей планируемых периодов эксплуатации. Знание основных принципов и законов управления, основанных на математических методах оптимизации, позволяет эффективно управлять сложными организационными системами, производством и прогнозировать финансовые и эксплуатационные риски.

Проблема совершенствования научно-методического аппарата оптимизации планов подготовки работников (специалистов) предприятий в настоящее время особо актуальна и обусловлена несколькими факторами [1]. Так, по данным Роструда, в 2013 г. произошло 9216 несчастных случаев с тяжелыми последствиями. Несчастные случаи на производстве с тяжелыми последствиями обусловлены типичными причинами организационного характера и так называемым «человеческим фактором»: неудовлетворительная организация производства; нарушения требований безопасности труда; нарушения трудовой дисциплины. Так, только по причине неудовлетворительной организации производства в 2013 г. произошел почти каждый третий (30,7%) несчастный случай. Технологические и технические (техногенные) факторы послужили причинами 8% несчастных случаев с тяжелыми последствиями.

Многие причины в основном связаны с игнорированием требований по безопасности и охране труда как работников, так и работодателей, а также с отсутствием мотивации к их исполнению. При этом очевидно, что среди основных причин несчастных случаев, преднамеренное нарушение требований безопасности или немотивированный риск составляет не более 50%.

Согласно ГОСТ Р 12.0.007-2009 [2], обеспечить требуемую безопасность производственных процессов возможно только при условии, что работники организации (в том числе рабочие) имеют соответствующее образование и специальную профессиональную подготовку в области охраны труда, приобретаемую в процессе обучения, а также повышения квалификации и переподготовки. При этом работодателям предписано своевременно корректировать мероприятия, обеспечивающие выполнение требований охраны труда, и совершенствовать систему непрерывного обучения персонала.

Повышение профессиональной подготовки и переподготовки следует проводить с учетом следующих принципов (рис. 1):

– гибкости при регулировании объема и содержания обучения в зависимости от потребностей и особенностей обучающихся;

– оптимальном соотношении теоретических знаний с практическим освоением и формированием навыков;

– оперативности в развитии и обновлении программ обучения в результате изменения технологии и состава персонала;

– относительно небольших затрат времени и средств на обучение при высокой отдаче.

Соответственно, программы подготовки и переподготовки работников должны [2]:

– учитывать содержание и объем подготовки, вид, характер и особенности производственной деятельности организации;

– охватывать всех работников организации;

– иметь различные уровни требуемых знаний и ответственности для различных категорий обучаемых;

– содержать оценку доступности и прочности усвоения материала подготовки;

– предусматривать своевременную (соответствующую периодичность) и эффективную как первоначальную, так и повторную подготовку;

– периодически анализироваться и по мере необходимости корректироваться с целью обеспечения их соответствия законодательству, современному уровню и эффективности, а также технологическим особенностям производства;

– содержать требования по оформлению результатов проверки знаний и быть документально оформленными.

Реализация данных требований и принципов обучения работников предприятия возможна только в том случае, если для обоснования (адаптации) системы подготовки работников предприятий будет применяться научно-методический аппарат, разработанный на основе современных математических методов оптимизации, при этом он должен быть максимально адаптирован к получив-

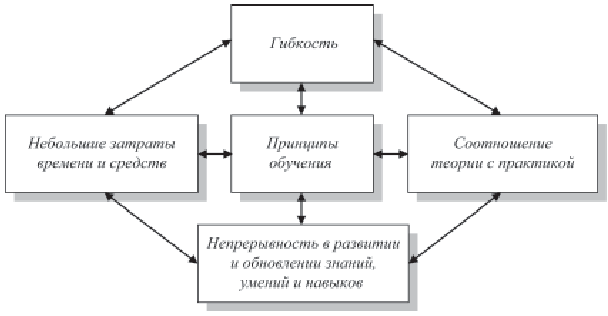

Рис. 1. Основные принципы обучения

шим широкое распространение программам типа MATLAB, MathCAD и MS Excel, не требующих специализированных электронно-вычислительной средств и особой подготовки исполнителей.

Оптимизация систем обучения работников предприятий с учетом технологических особенностей и требований безопасности производственных процессов по критерию минимальных затрат являются одной из актуальных практических задач.

Многие задачи оптимизации управления из области экономики, военного дела, планирования и эксплуатации технических систем могут быть сведены к моделям линейного программирования [3–8]. Научные достижения в области линейного программирования во многом способствовали разработке методов и алгоритмов решения задач оптимизации, относящихся к классу нелинейного, целочисленного или комбинаторного программирования. Применительно к рассматриваемой проблеме цель предложенной задачи оптимизации состоит в определении оптимального плана обучения (переподготовки) работников предприятия с учетом требований безопасности, устанавливаемых для каждой специальности, в учебных центрах, обладающих различными возможностями, эффективностью и стоимостью обучения.

Особенности формализации и решения задачи оптимизации

При решении вопросов теории безопасности сложных систем может с успехом использоваться большой класс прикладных задач оптимизации, относящихся к задачам целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП). Например, это задачи оптимального планирования ремонта техники, оптимального резервирования аппаратуры, выбора класса точности измерительных приборов, оптимизации комплектов запасных приборов (ЗИП), оптимального планирования мероприятий безопасности потенциально опасных объектов (ПОО), обучения специалистов предприятий и т.п. [3].

Общими особенностями всех задач целочисленного программирования являются:

– целочисленный характер решения, что определяется физическим смыслом этих задач;

– дискретный и нелинейный характер целевых функций и ограничений, большая размерность и отсутствие во многих случаях аналитических зависимостей.

В общем случае дискретные задачи характеризуются тем, что область допустимых решений невыпукла и несвязна, а это делает невозможным решение их с помощью стандартных методов, применяемых для решения регулярных задач математического программирования, к которым относятся задачи линейного и выпуклого программирования. Однако путем введения дополнительных переменных и модификации некоторых ограничений задача целочисленного программирования может быть преобразована в задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Математическая постановка задачи целочисленного линейного программирования, которая отличается от обычной задачи линейного программирования только тем, что на искомые переменные дополнительно накладываются ограничения целочисленности, может быть сформулирована в следующем виде. Требуется найти

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

из условия

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min_{x \in \Delta_\beta}, \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\Delta_\beta = \left\{ \Delta \middle| \, q_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (=) b_k \right\},$$

$$k \in \{1, 2, \ldots, m\}; \qquad (2)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0; \qquad (3)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{Z} \qquad (4)$$

где $\mathbf{X}$ – вектор параметров оптимизации; Δ_β – область допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям рассматриваемой задачи оптимизации.

Задача минимизации линейной целевой функции (1) при ограничениях типа равенств и неравенств (2) может быть сведена к задаче максимизации, поскольку условие $f(x) \to \min$ эквивалентно условию $-f(x) \to \max$. Обобщая задачи максимизации и минимизации, часто говорят о нахождении экстремума задачи оптимизации, а саму теорию решения задач оптимизации называют теорией решения экстремальных задач.

Введение дополнительного требования (4) целочисленности значений переменных приводит к принципиальному изменению не только характера соответствующих задач, но и возможных методов их решения. Так, применительно к задачам целочисленного линейного программирования оказывается неприменим аналитический способ решения, основанный, например, на методе множителей Лагранжа, поскольку понятие дифференцируемости целевой функции и ограничений для целочисленных значений переменных теряет свой исходный смысл. Поэтому задачи целочисленного линейного программирования требуют разработки специальных алгоритмических методов для своего решения, которые учитывают специфические особенности и дискретный характер множества допустимых решений. Из алгоритмических методов, обеспечивающих нахождение точного решения задачи целочисленного линейного программирования, наибольшее распространение получили метод ветвей и границ, метод динамического программирования и метод отсечений Гомори.

Однако, несмотря на то, что к настоящему времени разработаны специальные методы решения целочисленных задач оптимизации [4, 5, 6, 8], ни один из них не обеспечивает желаемой эффективности соответствующих вычислительных процедур в случае увеличения размерности задачи. Так, в отличие от задач линейного программирования, время решения которых относительно невелико, реализация методов и алгоритмов решения задач целочисленного линейного программирования в ряде случаев затруднительна без использования современных электронно-вычислительных средств и информационных технологий.

Специализированные пакеты программ типа MATLAB, MathCAD и MS Excel позволяют находить точное решение задач целочисленного линейного программирования, что значительно расширяет область их практического применения, возможности по исследованию и управлению сложными системами и процессами. Для оценки точности получаемых решений можно сравнить полученные различными способами оптимальные решения отдельных практических задач.

Опишем задачу оптимизации. Предположим, что на предприятии, связанным с эксплуатацией потенциально опасных объектов (ПОО), в результате внедрения новых технологий (модернизации, замене оборудования и т.п.) необходимо организовать переподготовку специалистов определенной номенклатуры. Каждая группа (категория) специалистов в рамках технологического процесса связана с выполнением потенциально опасных операций (работ), имеющих различную степень опасности, определяемую тяжестью последствий (аварий, катастроф), в результате ошибочных действий работника. Для каждой группы предъявляются свои требования по уровню обученности с точки зрения безопасного (безошибочного и своевременного) выполнения потенциально опасных операций.

Пусть имеется n групп $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ кандидатов на обучение в учебных центрах (УЦ). Каждая группа $A_i \; \forall i \in i = \overline{i,n}$ обучаемых состоит из a_i кандидатов определенной специальности, которые в дальнейшем будем обозначать соответствующими индексами, совпадающими с номерами групп. Примем допущение, что все кандидаты (специалисты) в обязательном порядке должны пройти обучение в любом из учебных центров, имеющих соответствующую аккредитацию. Известен перечень учебных центров $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_m$, укомплектованных преподавательским составом различной квалификации, и обладающих различной учебно-материальной базой. Поэтому, учебные центры отличаются друг от друга как по стоимости и эффективности (уровня) обучения, так и по количеству обучаемых в одном потоке. Возможности учебных центров по общему количеству обучаемых по всем специальностям ограничены и определяются величиной $-b_j$ ($j \in j = \overline{1,m}$). Известна стоимость c_{ij} обучения одного кандидата j-ой специальности в j-м УЦ. Эффективность УЦ определяется уровнем полученных знаний и приобретенных умений и навыков, которые позволяют работнику j-ой специальности выполнять функциональные обязанности с требуемыми показателями безопасности P_i^{mp} деятельности. В качестве требуемых показателей безопасности деятельности персонала принята вероятность P_i^{mp} безошибочного и своевременного выполнения операций, определяемых должностными обязанностями.

В общем случае возможны две постановки задач оптимизации планов обучения персонала, позволяющих обеспечить:

– максимально возможные значения показателей безопасности работы специалистов при заданных ограничениях на затраты, связанных с реализацией плана обучения;

– требуемые значения показателей безопасности работы специалистов при минимально возможных затратах на их обучение.

В качестве примера рассмотрим задачу, в которой требуется разработать такой план обучения (переподготовки) работников предприятия, который из условия минимальной стоимости его реализации обеспечит выполнение квалификационных требований по всем категориям обучаемых.

Для того чтобы свести общую задачу дискретного программирования к стандартной задаче целочисленного линейного программирования необходимо модифицировать ограничения, устанавливающие требования к уровню обученности специалистов предприятия, которые должны быть выполнены при реализации плана обучения. При этом аналитические зависимости должны быть представлены в аддитивной форме, т.е. быть линейной функцией от параметров оптимизации.

Для этого предполагается следующий подход [3]. Очевидно, что в ситуациях, когда безопасность технологического процесса определяется слаженностью и безошибочностью действий всех специалистов группы (бригады, расчета, смены, отдела, службы), то показатель безопасности P деятельности группы, состоящей, например, из a_i специалистов может быть представлен в виде

$$P = \prod_{i=1}^{a_i} P_i = \prod_{i=1}^{a_i} [1 - Q_i], \quad i = \overline{1, a_i}, \tag{5}$$

где Q_j – вероятность ошибочных и (или) несвоевременных действий j-го специалиста; a_i – общее количество специалистов в группе.

Поскольку $P_i = 1 - Q_i$, то с учетом формулы (5) получим выражение

$$Q = 1 - P = 1 - \prod_{i=1}^{a_i} [1 - Q_i], \tag{6}$$

где Q – вероятность происшествия (аварии, катастрофы) в результате ошибочных и (или) несвоевременных действий специалистов, связанных с выполнением потенциально опасных операций технологических процессов.

В случае если $Q < 0{,}1$, то выражения (5) и (6) могут быть упрощены путем разложения в ряд до линейных членов, то есть

$$Q \approx \sum_{i=1}^{a_i} Q_i,$$

$$P \approx 1 - \sum_{i=1}^{a_i} Q_i. \qquad (7)$$

Погрешность формул (7) всегда положительна (т.е. фактические значения показателей безопасности выше, чем расчетные), так как

$$1 - \prod_{i=1}^{a_i} [1 - Q_i] < \sum_{i=1}^{a_i} Q_i, \qquad (8)$$

причем величина ошибок не превосходит $0{,}5 \cdot \left[\sum_{i=1}^{a_i} Q_i \right]^2$. При этом погрешность после линеаризации выражения (5) тем меньше, чем больше значения a_i и P_i (меньше Q_i). Например, необходимо оценить безопасность работы бригады P, состоящей из трех специалистов ($a_i = 3$). Ошибочные действия любого из членов бригады являются независимыми событиями и расцениваются как предпосылки к происшествию (аварии, катастрофе), происходящие с вероятностью: а) $Q_i' = 0{,}01$; б) $Q_i'' = 0{,}001$. Результаты расчетов, полученные точными (5) и приближенными (7) методами, а также их погрешности, представлены в табл. 1.

Из расчетов видно (см. табл. 1), что в первом случае погрешность составила $\Delta_1 \approx -0{,}031\%$ в сторону занижения показателя безопасности работы бригады, а во-втором – $\Delta_2 \approx -0{,}003\%$. При этом обоснованность применения предлагаемого подхода подтверждается соизмеримостью приведенных в табл. 1 исходных данных, величинам, полученных статистическим путем из практики эксплуатации сложных систем. Например, вероятность ошибки оператора при принятии решения составляют [8]:

а) при проверке логических условий И, ИЛИ – соответственно, 0,0040 и 0,0034;

б) при выстраивании объектов в очередь на обслуживание с учетом уровня подготовленности оператора (высокий, средний, низкий) – соответственно, 0,001, 0,052 и 0,093;

в) при выполнении обобщенной операции «Принятие решения», в зависимости от числа логических условий, составляет 0,005 и выше.

Кроме того, на практике не все ошибки являются потенциально опасными, и при моделировании учитываются только те ошибки, которые не были своевременно обнаружены и устранены самим исполнителем операции или другими контролирующими лицами. Поэтому вероятностные показатели Q_i ошибочных действий персонала, непосредственно влияющих на безопасность операции, могут иметь еще меньшие значения.

Исходя из вышеизложенного, показатель безопасности деятельности группы работников в количестве a_i специалистов, примет следующий вид:

$$P = \prod_{i=1}^{a_i} P_i \approx 1 - \sum_{i=1}^{a_i} Q_i, \;\; i = \overline{1, a_i}. \qquad (9)$$

На основании формулы (9) можно сделать важный с точки зрения приведения практических задач оптимизации к задачам линейного программирования вывод о том, что

$$\max P = \max \prod_{i=1}^{a_i} P_i \equiv \min \sum_{i=1}^{a_i} Q_i. \qquad (10)$$

Введем в рассмотрение переменные x_{ij}, отражающие количество обучаемых i-ой специальности, направленных для обучения в j-й УЦ, и запишем требования к уровню подготовки специалистов при разработке плана обучения в следующем виде:

$$P(x_{ij}) \geq P^{тр}, \qquad (11)$$

$$\text{где } P^{тр} = \prod_{i=1}^{a_i} P_i^{тр} \approx 1 - \sum_{i=1}^{a_i} Q_i^{тр}. \qquad (12)$$

Таблица 1

№ п/п	Вероятность ошибочных действий (Q_i)	Расчетные значения (P)		Погрешность при расчете приближенными методами (Δ_i, %)
		$P = \prod_{i=1}^{a_i}(1 - Q_i)$	$P \approx 1 - \sum_{i=1}^{a_i} Q_i$	
1	0,01	0,970299	0,970000	–0,03082
2	0,001	0,997002999	0,997000	–0,003008

Таким образом, с учетом выражений (5) – (7), получим неравенство

$$1-\sum_{i=1}^{a_i} Q_i(x_{ij}) \ge 1-\sum_{i=1}^{a_i} Q_i^{mp},$$

которое путем несложных преобразований может быть представлено в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{a_i} Q_i(x_{ij}) \le \sum_{i=1}^{a_i} Q_i^{mp}.$$

В этом случае ограничение, задающее требования к эффективности планов обучения в задаче целочисленного линейного программирования, можно записать в виде аналитической зависимости

$$\sum_{i=1}^{a_i} Q_{ij} \cdot x_{ij} \le \sum_{i=1}^{a_i} Q_i^{mp}, \tag{13}$$

где Q_{ij} – вероятность ошибочных и (или) несвоевременных действий i-го специалиста после обучения в j-м УЦ; x_{ij} – количество обучаемых i-ой специальности, направленных для обучения в j-й учебный центр; a_i – количество специалистов в группе переподготовки.

Графическая иллюстрация эффективности УЦ при обучении i-х специалистов представлена на рис. 2.

Графики, иллюстрирующие множество альтернатив при выборе планов обучения работников i-х специальностей в учебных центрах, отличающихся различной эффективностью программ обучения, представлены на рис. 3.

На рисунке 3 приняты следующие обозначения: $Q_{i0}=1-P_{io}$; $Q_i^{mp}=1-P_i^{mp}$ – соответственно, начальный и требуемый уровень обученности персонала, определяемые как вероятности ошибочных действий i-х специалистов предприятия до и после обучения; x_{ij} – количество обучаемых i-ой специальности, направленных для обучения в j-й учебный центр.

Соответственно, за счет приобретения в процессе обучения дополнительного объема знаний, умений и формирования навыков их применения, вероятность Q_i будет снижена на некоторую величину Δq_{ij} (см. рис. 3), непосредственно отражающую эффективность программы обучения в выбранном j-ом учебном центре.

Из представленных графиков видно, что в случае обучения всех специалистов в УЦ № 1, требования безопасности будут выполнены, цель достигнута, так как $Q_i'(x_{i1}) < Q_i^{mp}$, если же для обучения специалистов будет выбран УЦ № 2, то – нет, так как $Q_i''(x_{i2}) > Q_i^{mp}$. При этом в первом случае цель достигнута за счет более высокой эффективности плана, предусматривающего обучение специалистов в УЦ № 1 по сравнению с планом обучения в УЦ № 2, так как

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta q_{i1} \cdot x_{i1} > \sum_{i=1}^{3} \Delta q_{i2} \cdot x_{i2}.$$

Соответственно,

$$Q_i'(x_{i1}) < Q_i''(x_{i2}),$$

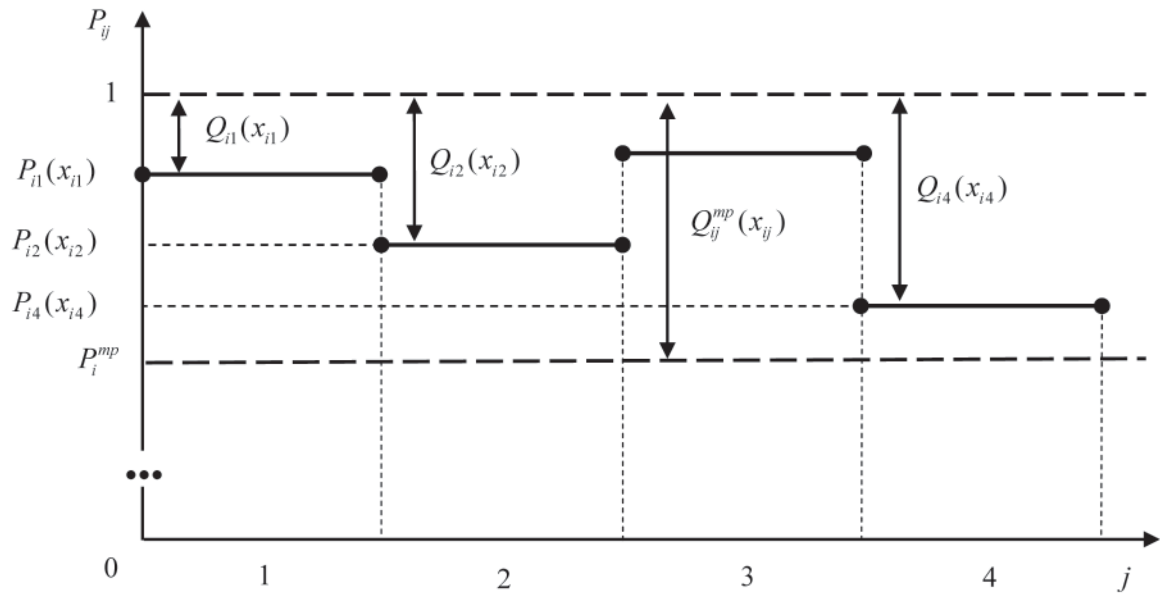

Рис. 2. Графическая иллюстрация эффективности учебных центров

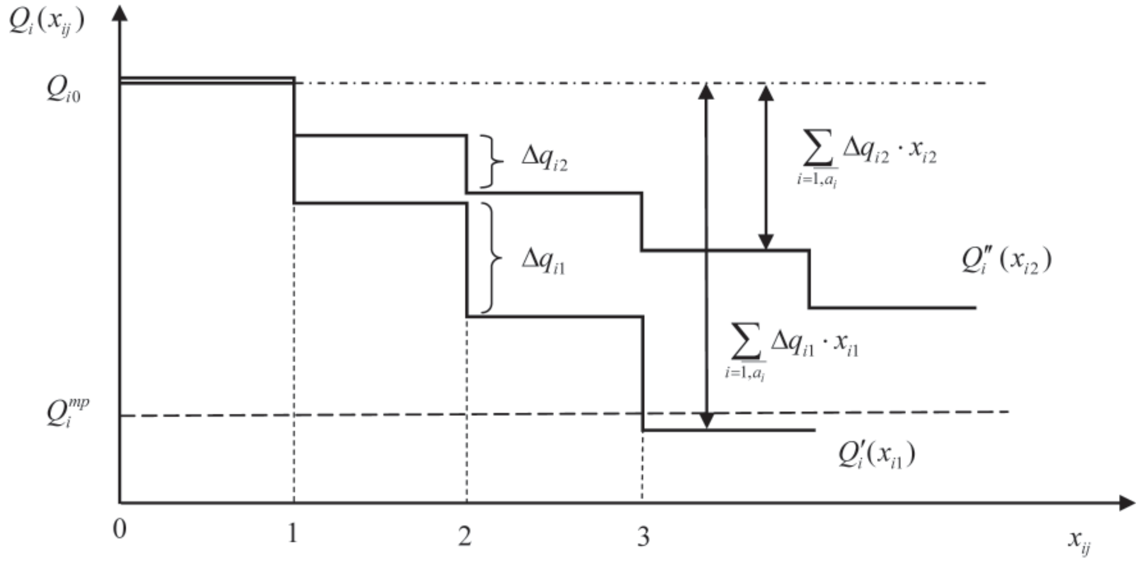

Рис. 3. Графическая иллюстрация эффективности планов обучения в учебных центрах

так как

$$Q_i'(x_{i1}) = Q_{i0} - \sum_{i=1}^{3} \Delta q_{i1} \cdot x_{i1};$$

$$Q_i''(x_{i2}) = Q_{i0} - \sum_{i=1}^{3} \Delta q_{i2} \cdot x_{i2}. \qquad (14)$$

Для наглядности на рис. 4 представлены планы обучения, при которых все работники одной специальности обучаются в одном из выбранных УЦ. Однако допустимое множество планов обучения может включать и планы, предусматривающие обучение работников одной специальности в различных учебных центрах.

Таким образом, предложенный методический подход к модификации ограничений, имеющих мультипликативную форму (5), позволяет в задаче оптимизации (1)–(4) представить левые части таких ограничений в виде линейных функций (13) относительно своих переменных.

Математическая постановка задачи оптимизации планов обучения специалистов предприятий

Математическая постановка задачи оптимизации планов обучения специалистов предприятий может быть записана в следующем виде: найти

$$\mathbf{X}_{(n\times m)} = \left\| x_{ij} \right\|_{(n\times m)}$$

из условия

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \qquad (15)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\ldots,n; \qquad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\ldots,m; \qquad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j; \qquad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{m} Q_{ij} \cdot x_{ij} \le Q_i^{mp}, \quad i = 1,2,\ldots,n; \qquad (19)$$

$$x_{ij},\ a_i, b_j \in z; \qquad (20)$$

$$a_i > 0,\ b_j > 0,\ c_{ij} > 0,\ Q_{ij} > 0,$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,m. \qquad (21)$$

Функция (15) представляет собой целевую функцию, а совокупность ограничений (16) – (21) определяет область допустимых значений x_{ij} при $i = 1,2,\ldots,n,$ $j = 1,2,\ldots,m.$ Общее число переменных равно $n \cdot m.$

Ограничение (16) задает требования по обязательному обучению (переподготовке) всех заявленных специалистов предприятия. Аналогично ограничение (17) задает требование по удовлетворению всех заявок на обучение в учебных центрах.

Множество $X = \{x_{ij}\}$ решений задачи оптимизации, удовлетворяющих ограничениям (16)–(21), представляет собой матрицу

$$\mathbf{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{(n\times m)} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

которая и является планом обучения специалистов предприятий в УЦ. Переменные x_{ij} матрицы (22) – количество i-х специалистов, направляемых на учебу в j-ый учебный центр.

Поскольку целевая функция (15) и ограничения (16)–(19) линейные относительно параметров оптимизации x_{ij}, то сформулированная задача оптимизации (15)–(21), по сути, представляет собой модифицированную двухиндексную транспортную задачу, относящуюся к классу задач целочисленного линейного программирования специального вида.

В силу дискретного характера задачи (15)–(21), графически ее можно представить в виде сети $G(S, L)$ (рис. 4).

Сеть $G(S, L)$ состоит из множества узлов $S = \{A_n, B_m\}$ и упорядоченных дуг $L = \{i, j\}$, которым соответствуют некоторая стоимость $c_{ij} > 0$ и показатели эффективности $\{Q_{ij}\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m.$

При формализации исходные данные и часть условий задачи могут быть сведены в табл. 2.

Транспортные задачи обладают специфическими свойствами, которые в известной мере определили разработку более простых методов их решения.

Доказано, что для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса (18). При этом значение целевой функции (15) ограничено снизу и сверху, если все c_{ij}, a_i и b_j ограничены, при этом $x_{ij} \le \min(a_i, b_j)$.

Однако на практике часто встречаются транспортные задачи линейного программирования нестандартного вида, для которых не выполняется условие баланса (18):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ne \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{23}$$

Такие задачи получили название задач с нарушенным балансом и для их приведения к стандартному виду разработаны специальные приемы.

Методы приведения нестандартных транспортных задач линейного программирования к стандартному виду

Рассмотрим типовые ситуации, которые приводят к нестандартным задачам и способы их решения.

1. Нередко в практике встречаются задачи типа транспортной, но с ограниченными пропускными способностями дуг (см. рис. 4). Например, в некоторых учебных центрах может

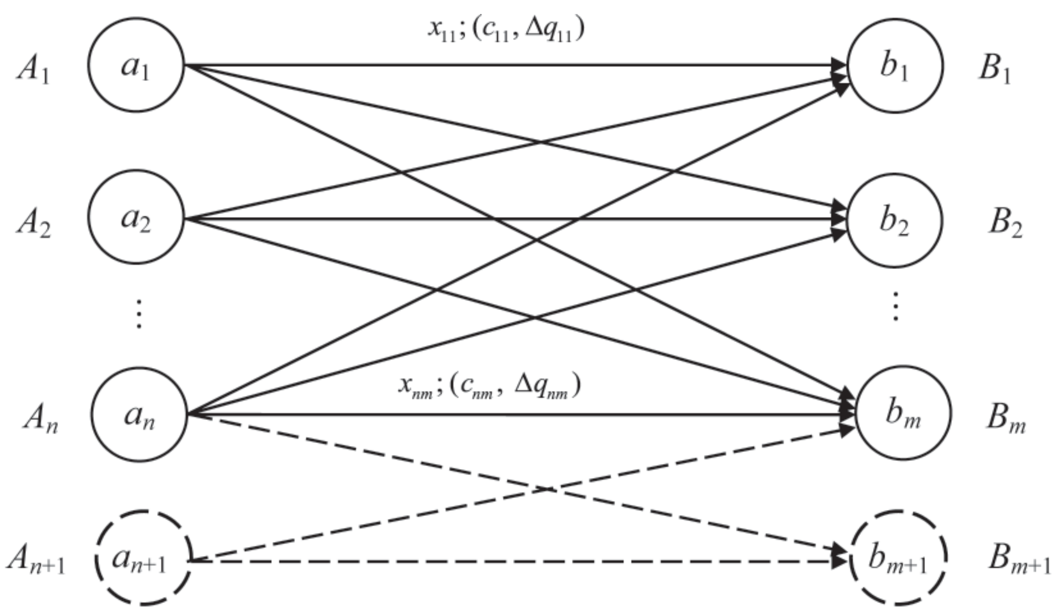

Рис. 4. Представительная сеть задачи оптимизации планов обучения

ПОДГОТОВКА И ПЕРЕПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ

Таблица 2

Стоимость и показатели эффективности обучения специалистов в учебных центрах

Учебные центры / Группы специалистов	B_1	B_2	B_3	…	B_m	B_j / a_i
A_1	c_{11}/Q_{11}	c_{12}/Q_{12}	c_{13}/Q_{13}	…	c_{1m}/Q_{1m}	a_1
A_2	c_{21}/Q_{21}	c_{22}/Q_{22}	c_{23}/Q_{23}	…	c_{2m}/Q_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}/Q_{n1}	c_{n2}/Q_{n2}	c_{n3}/Q_{n3}	…	c_{nm}/Q_{nm}	a_n
A_i / b_j	b_1	b_2	b_3	…	b_m	Количество обучаемых / Кол-во мест в УЦ

быть ограничено количество мест для приема обучаемых по некоторым специальностям. В таких задачах накладываются дополнительные ограничения $x_{ij} \le d_{ij}$, где d_{ij} – количество выделенных мест для обучаемых по i-ой специальности в j-м учебном центре. Такая задача может оказаться неразрешимой ввиду ограниченных возможностей УЦ (ограниченности пропускных способностей дуг).

Поэтому к ограничениям задачи (16), (17) добавляются следующие:

$$x_{ij} \le d_{ij}; \qquad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \ge a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} \ge b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (26)$$

Для установления совместимости всех этих ограничений строят любой план задачи. Если это удается сделать, то система уравнений совместна, иначе – задача неразрешима.

2. На практике наиболее часто встречается ситуация, когда оптимальное решение необходимо найти при условии, что общее количество мест в УЦ больше, чем количество кандидатов на обучение, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j. \qquad (27)$$

В этом случае вводится фиктивная группа специалистов A_{n+1} (так называемый фиктивный пункт отправления) с количеством обучаемых

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

При этом стоимость и эффективность обучения одного специалиста из группы A_{n+1} в любом УЦ B_m равны нулю, т.е.

$$c_{n+1,\, j} = 0,\ \Delta q_{n+1,\, j} = 0 \text{ для всех } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Можно доказать, что оптимальное решение этой задачи является также оптимальным решением для исходной задачи.

3. Возможны ситуации, когда требуется найти план обучения с наименьшими затратами при условии, когда кандидатов на обучение больше, чем количество мест в УЦ, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j. \qquad (28)$$

Для приведения такой задачи к сбалансированному виду дополнительно вводится фиктивный учебный центр B_{m+1} так называемый пункт назначения (см. рис. 4) с количеством мест

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

При этом предполагается, что стоимость и эффективность обучения одного специалиста из любой группы A_i в УЦ B_{m+1} равны нулю, т.е.

$$c_{i,m+1}=0,\ \ \Delta q_{i,m+1}=0 \text{ для всех } i=1,2,\ldots,n.$$

Соответственно, за невыполнение плана обучения (так как некоторые специалисты условно обучались в виртуальном УЦ) вводится дополнительный штраф, который может оцениваться размером риска из-за ошибочных действий необученных специалистов.

Обозначив размер штрафа за одного необученного специалиста величиной r_i, целевую функцию запишем в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}r_i\cdot y_i\to\min, \tag{29}$$

где $y_i=\sum_{j=1}^{m+1}x_{ij}-b_j$ – число кандидатов не прошедших обучение в УЦ.

При этом в условиях задачи число ограничений m заменяется на $m+1$, так как вводится дополнительное условие $y_i=\sum_{j=1}^{m+1}x_{ij}-b_j$ для всех $i=1,2,\ldots,n$.

4. Возможна ситуация, когда некоторые УЦ не могут обучать по всем специальностям, т.е. не всех обучаемых можно распределять по всем учебным заведениям, но при этом условия баланса выполняются.

Обозначим через k множество пар индексов (i,j) (см. рис. 4), которые отвечают узлам A_i и B_j связанными дугами (например, j-й УЦ имеет аккредитацию на право обучение по i-ой специальности); через k_i – набор индексов j, отвечающих тем узлам B_j (УЦ), которые связаны с узлами A_i (специалисты которых могут быть направлены на обучение в УЦ); через k_j – набор индексов i, отвечающих тем узлам A_i (специалистам), которые связаны с узлами B_j (УЦ имеют право на обучение по данной специальности). Тогда задача составления оптимального плана обучения сводится к минимизации целевой функции вида

$$\min_{x_{ij}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in k_i}c_{ij}\cdot x_{ij}=\min_{x_{ij}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in k_j}c_{ij}\cdot x_{ij}=\min_{x_{ij}}\sum_{(i,j)\in k}c_{ij}\cdot x_{ij} \tag{30}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j \text{ для } i\in k_j,\ j=1,2,\ldots,m; \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i \text{ для } j\in k_i,\ i=1,2,\ldots,n; \tag{32}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ (i,j)\in k;\ \ x_{ij}=0,\ (i,j)\notin k. \tag{33}$$

Задача для рассмотренного случая отличается от задачи стандартного вида, задаваемой условиями (16)–(18), тем, что ее переменные x_{ij}, отражающие несуществующие дуги (связи), полагаются равными нулю. Другими словами, к условиям основной задачи добавляются дополнительные требования $x_{ij}=0$ при $(i,j)\notin k$.

В качестве примера, иллюстрирующего возможности разработанных подходов, рассмотрим задачу оптимизации плана подготовки работников с учетом требований безопасности.

Пример решения задачи оптимизации с помощью программы MS Excel

Пусть на предприятии «Атомэнерго» необходимо разработать план обучения работников трех специальностей, связанных с эксплуатацией потенциально опасных объектов, объединенных в отдельные группы – A_1, A_2, A_3. Каждая группа специалистов состоит из определенного количества обучаемых $a_1=7$, $a_2=9$, $a_3=5$. На рынке образовательных услуг имеется три аккредитованных учебных центра – B_1, B_2, B_3. На планируемый период обучения количество свободных мест в УЦ ограничено $b_1=7$, $b_2=9$, $b_3=5$.

Количество обучаемых, их распределение по специальностям, количество свободных мест и стоимость обучения одного работника в УЦ, представлены в табл. 3.

Эффективности учебных центров с точки зрения формирования требуемых показателей безопасного выполнения ПОО для различных специальностей обучаемых представлены в табл. 4.

Тогда математическая постановка модифицированной целочисленной транспортной задачи с учетом предложенных преобразований может быть записана в следующем виде:
найти

$$\mathbf{X}_{(n\times m)}=\left\|x_{ij}\right\|_{(n\times m)}$$

из условия

$$7x_{11}+11x_{12}+29x_{13}+4x_{21}+5x_{22}+$$
$$+9x_{23}+5x_{31}+8x_{32}+13x_{33}\to\min_{x_{ij}\in\Delta_\beta} \tag{34}$$

Таблица 3

Специальности обучаемых	Стоимость обучения в учебных центрах – c_{ij} (у.е.)			Количество кандидатов на обучение (a_i)
	B_1	B_2	B_3	
A_1	7	11	29	7
A_2	4	5	9	9
A_3	5	8	13	5
Количество мест в УЦ (b_j)	6	8	7	$\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i = 21$

Таблица 4

Эффективности учебных центров для различных специальностей

Специальности обучаемых	Вероятность безопасного выполнения ПОО при обучении в УЦ – P_{ij}		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0,9989	0,998	0,9987
A_2	0,991	0,9988	0,9984
A_3	0,9987	0,9975	0,9961

при ограничениях:

$$\begin{cases} 1)\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7; \\ 2)\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 9; \\ 3)\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 5; \\ 4)\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6; \\ 5)\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8; \\ 6)\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7; \\ 7)\ 0,0011 \cdot x_{11} + 0,002 \cdot x_{12} + 0,0013 \cdot x_{13} \le 0,0513; \\ 8)\ 0,009 \cdot x_{21} + 0,0012 \cdot x_{22} + 0,0016 \cdot x_{23} \le 0,0346; \\ 9)\ 0,0013 \cdot x_{31} + 0,0025 \cdot x_{32} + 0,0039 \cdot x_{33} \le 0,0277; \\ 10)\ x_{ij} \ge 0\ (\forall i \in \{1,2,3\},\ \forall j \in \{1,2,3\}; \\ 11)\ x_{ij} - \textit{целые числа}\ (\forall i \in \{1,2,3\},\ \forall j \in \{1,2,3\}, \end{cases} \qquad (35)$$

где Δ_β – множество допустимых альтернатив планов обучения, формируемое системой ограничений (35).

Из системы ограничений (35) видно, что первые три ограничения соответствуют ограничению (16) общей постановки задачи (15)–(21), следующие три ограничения – ограничению (17). При этом в систему ограничений (35) не включено ограничение (18), что вполне допустимо, так как непосредственная проверка (см. табл. 3) сбалансированности задачи (34)–(35) показывает, что задача сбалансирована.

Для решения задачи оптимизации планов обучения персонала, формализованной в виде модифицированной двухиндексной транспортной задачи с помощью рабочего интерфейса и встроенных функций программы электронных таблиц MS Excel, необходимо выполнить ряд процедур.

Внешний вид диалогового окна мастера поиска решений с ограничениями для модифицированной задачи ЦЛП в среде MS Excel представлен на рис. 5. Результаты решения, полученные с помощью программы MS Excel, в аналитическом и графическом виде представлены на рис. 6.

Анализ полученного решения показывает, что с точки зрения обеспечения требуемых показателей безопасности эксплуатации ПОО и минимума затрат на обучение необходимо:

а) двух работников первой специальности направить на обучение в УЦ № 1 и пятерых – в УЦ № 3;

б) семерых работников второй специальности направить на обучение в УЦ № 2 и двух в УЦ № 3;

в) четырех работников третьей специальности направить на обучение в УЦ № 1 и одного – в УЦ № 2. Стоимость реализации плана обучения работников предприятия, полученного в результате решения задачи оптимизации, составит $C(X^*) = 240$ *у.е.*

Для оценки работоспособности, адекватности и чувствительности разработанных моделей к изменению условий решения задачи проведем сравнительный анализ полученных планов обучения работников при оптимизации как без учета показателей эффективности обучения УЦ и требуемых показателей безопасности деятельности специалистов (т.е. без ограничений 35.7, 35.8, 35.9; план X_1), так и с учетом данных ограничений (план X_2).

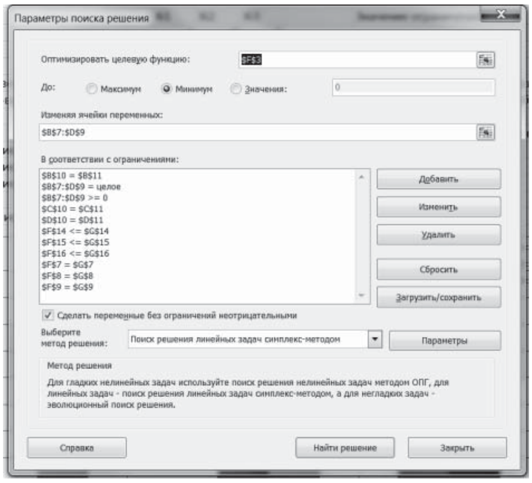

Рис. 5. Внешний вид диалогового окна в среде MS Excel мастера поиска решений модифицированной задачи ЦЛП

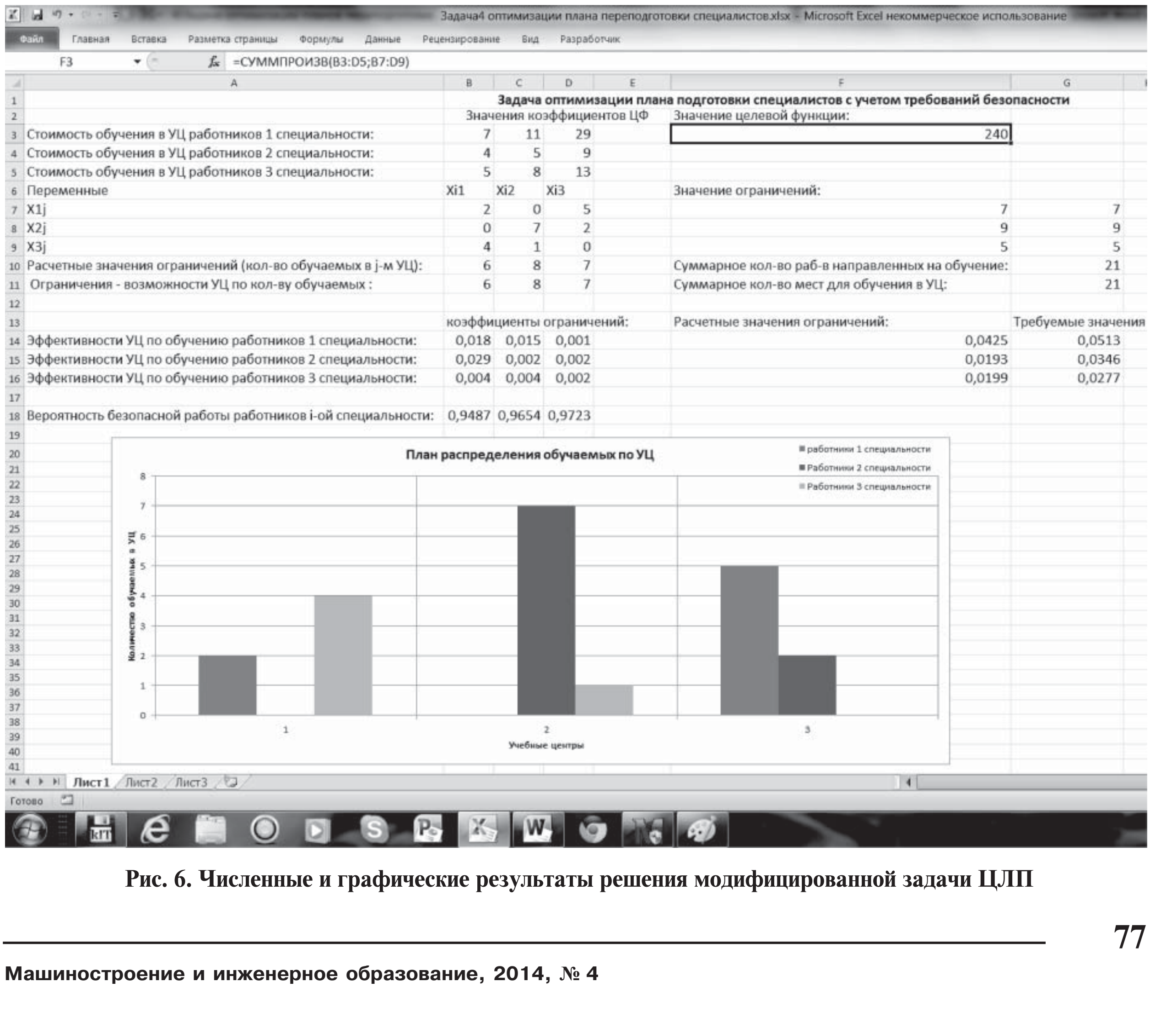

Рис. 6. Численные и графические результаты решения модифицированной задачи ЦЛП

Результаты решений задач в виде оптимальных планов распределения X_1 и X_2 обучаемых по УЦ представлены в матричной форме:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \ C(\boldsymbol{X}_1) = 166 \ у.е.;$$
$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C(\boldsymbol{X}_2) = 240 \ у.е. \qquad (36)$$

Анализ полученных решений показывает, что планы существенно отличаются друг от друга. При этом стоимость реализации второго плана обучения работников предприятия $[C(\boldsymbol{X}_2) = 240 \ у.е.]$ по отношению к стоимости первого плана обучения $[C(\boldsymbol{X}_1) = 166 \ у.е.]$ возросла на 44,6%.

Это обусловлено тем, что с целью выполнения ограничений (35.7), (35.8), (35.9) по требованиям безопасности эксплуатации ПОО потребовалось перераспределить обучаемых между учебными центрами, имеющими не только более высокие показатели эффективности, но и стоимость обучения. Однако в ситуации, когда цена ошибки специалиста очень высока, то повышение затрат на их обучение с лихвой окупается за счет снижения риска аварий и катастроф (предупреждения возможного материального ущерба в результате ошибочных действий персонала).

Заключение

Разработана математическая модель, позволяющая оптимизировать планы обучения специалистов предприятий с учетом требований безопасности производственных процессов по критерию минимума затрат. Особенностью модели является возможность непосредственно учитывать при оптимизации планов обучения (переподготовки) работников предприятий требования, предъявляемые к уровню обучения, устанавливаемые для различных категорий специалистов в зависимости от потенциальной опасности выполняемых работ (производственных процессов), а также возможности учебных центров с точки зрения эффективности, стоимости и времени обучения. Рассмотрены особенности ее формализации в виде двухиндексной модифицированной задачи целочисленного линейного программирования, а также методические подходы для приведения нестандартных задач линейного программирования к стандартному виду. Эффективность, адекватность и чувствительность моделей к исходным данным подтверждена результатами моделирования. Приведен пример и показан способ решения задачи оптимизации в среде MS Excel.

Список литературы

1. О реализации государственной политики в области условий и охраны труда в Российской Федерации в 2013 году. – М.: Министерство труда и социальной защиты Российской Федерации, 2014. – 54 с.
2. ГОСТ Р 12.0.007–2009. ССБТ. Система управления охраной труда в организации. Общие требования по разработке, применению, оценке совершенствованию. Дата введения – 2010-07-01. – М.: Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии, 2009. – 34 с.
3. *Майструк А.В.* Управление безопасностью эксплуатации сложных технических систем: Математические методы и практика их применения. – М.: ВА РВСН им. Петра Великого, 2007. – 256 с.
4. *Сигал И.Х.*, *Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. пособ. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.
5. *Грешилов А.А.* Математические методы принятия решений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 584 с.
6. *Гольштейн Е.Г.*, *Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1967. – 384 с.
7. *Корниенко В.П.* Методы оптимизации: Учебник / В.П. Корниенко. – М.: Высш. шк., 2007. – 664 с.
8. *Леоненков А.В.* Решение задач оптимизации в среде MS Excel. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 704 с.
9. *Острейковский В.А.* Теория надежности: Учеб. для вузов / В.А. Острейковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 463 с.

Материал поступил в редакцию 08.07.14

МАЙСТРУК
Александр Владимирович

E-mail: **maisav2981958@mail.ru**
Тел.: **(499) 232-36-61**

Доктор технических наук, профессор ВА РВСН им. Петра Великого, ФГБОУ ВПО «МГИУ», Почетный работник высшего профессионального образования РФ, лауреат премии МО РФ. Действительный член Академии военных наук РФ, академик Международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности. Сфера научных интересов: системный анализ и моделирование сложных технических систем, опасных процессов в техносфере. Автор более 150 научных трудов.