УДК 539.3

РАЗРУШЕНИЕ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ПОТОКОМ*

М.В. Юмашев, В.Б. Беднова, М.М. Вергазов, М.А. Юмашева

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния диска с центральным отверстием и его разрушения в условиях быстрого импульсного нагрева. Задача моделирует поведение материала после пробивания в нем отверстия лазерным лучом. Исходный материал облучаемого образца предполагался упруго-хрупким, но в локальной области воздействия лазера при сильном разогреве поверхности допускалось возникновение пластического течения. На основе приближенного метода решения уравнения теплопроводности получены аналитические выражения для полей напряжений. Отмечена возможность зарождения радиально направленных микротрещин в «холодной» области диска, в которой температура еще практически не успела измениться. Показано, что учет пластических деформаций в зоне нагрева оказывает значительное влияние на процесс возникновения и роста трещин.

Ключевые слова: *пластичность, микроразрушение, энергетические потоки*

Введение

В практически важных задачах лазерной резки или пробивания микроотверстий лазерным лучом возникают проблемы прочности элемента конструкции. В первую очередь при локальном сильном нагреве в материале возникают большие градиенты температуры, приводящие к деформациям и напряжениям, не совместимыми с сохранением сплошности материала.

На это указывают результаты экспериментальных исследований по лазерному воздействию на металлы и керамические материалы [1–3]. В работе [1] авторы обнаружили определенную задержку в возникновении макротрещин в образцах, подверженных лазерному воздействию. При воздействии лазерного импульса длительностью 10^{-3} с макротрещины возникают через некоторое время ($1{,}5 \cdot 10^{-3}$ с) после окончания действия лазерного импульса. Этот факт говорит о высокой инерционности источника напряжений, разрушающих образец. Как отмечено в [2], инерционность разрушения указывает на ее тепловой характер. Интересны результаты экспериментального исследования [3], выполненного на цилиндрических образцах, подвергнутых термическому удару. В равномерно нагретый стальной полый толстостенный цилиндр подается холодная жидкость. Отмечено, что в результате такого воздействия возникает трещина, занимающая от трети до половины толщины цилиндра.

Теоретическое подтверждение экспериментальных результатов было получено в аналитических моделях [4] и численно, например, в задаче численного моделирования кинетики разрушения при нагреве композитных оболочек [5].

Ниже с помощью аналитического приближенного метода решения уравнения теплопроводности, развитого в работах [6–8], на примере модельной задачи осесимметричного

* Работа проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-08-00999а.

нагрева диска в центральной круговой области, показана возможность возникновения зон макроразрушения при локальном импульсном воздействии.

Целью работы является изучение процесса деформирования и разрушения элемента конструкции, находящегося в условиях интенсивного локального импульсного воздействия лазерным лучом.

Приближенный метод решения уравнения теплопроводности

Рассмотрим бесконечный диск с круговым отверстием диаметра d (рис. 1). Цилиндрическая система координат (r',φ',z') введена согласно рис. 1, ось r' направлена от геометрического центра; (x',y',z') – декартова система координат. Считается, что толщина диска $2h$ мала ($h \ll d$). На поверхности $r' = d/2$ задается граничное условие по температуре θ:

$$\theta(r',\varphi',z',\tau)\big|_{r'=d/2} = \theta_0(\tau), \tag{1}$$

где θ_0 – температура на нагреваемой поверхности; τ – время.

Принимается, что температура изменяется только в направлении координатной оси r'.

Согласно приближенному методу решения параболических уравнений, основанному на введении фронта распространения возмущения и развитому в работах [6–9], для приближенного решения нестационарного уравнения теплопроводности вводится концентрическая окружность радиуса $l'(\tau), l' > d,$ на которой выполняются условия сопряжения границы прогретой и холодной зон:

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial r'}\right|_{r'=l'} = 0, \qquad \theta\big|_{r'=l'} = 0. \tag{2}$$

Здесь $l'(\tau)$ – фронт температурного поля, распространяющегося от области локального импульсного нагрева.

Введем безразмерные параметры:

$$T(r,t) = \frac{\theta-\theta^*}{\theta_m-\theta^*},\ r = \frac{2r'}{d},$$
$$l = \frac{2l'}{d},\ t = \frac{\tau}{\tau_0},\ \tau_0 = \frac{\rho\cdot c\cdot d^2}{4k}, \tag{3}$$

где θ^* – начальная температура диска; θ_m – температура плавления материала диска; d – внутренний диаметр; ρ – плотность материала;

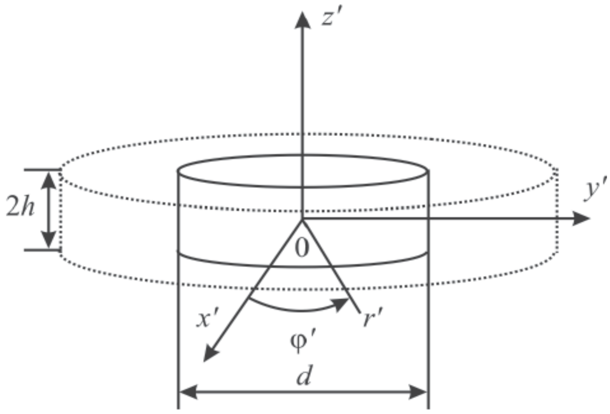

Рис. 1. Системы координат для тонкого диска

c – удельная теплоемкость; k – коэффициент теплопроводности.

Уравнение теплопроводности в безразмерных переменных в цилиндрической системе координат для одномерного случая принимает вид:

$$L(T) = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0. \tag{4}$$

Решение будем искать аналогично работе [10] в виде:

$$T(r,t) = \begin{cases} T_0\left(\dfrac{l(t)-r}{l(t)-1}\right)^2, 1 \le r \le l(t); \\ 0,\ r > l(t), \end{cases} \tag{5}$$

где T_0 – температура на нагреваемой поверхности.

Функция $l(t)$ находится из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности:

$$\int_1^{l(t)} L(T)dr = 0. \tag{6}$$

Подставляя (4) с учетом (5) в (6) и интегрируя, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения координаты температурного фронта от времени

$$(2-l)\frac{dl}{dt} = \frac{12}{l}, \tag{7}$$

которое решаем относительно функции $l(t)$

$$l^2 - \frac{l^3}{3} = 12t. \tag{8}$$

Из уравнений (5) и (8) полностью определяется температурное поле в бесконечном тонком диске с круговым отверстием.

Упругое решение

Определим напряжения и деформации в рассматриваемом тонком диске. Примем, что отверстие было образовано за счет мгновенного испарения материала, после чего на границе отверстия считается известной температура $\theta_0(t)$. Поскольку распределение температуры зависит только от радиальной координаты, а поверхность диска свободна от нагрузок, то, как показано, например в работе [11], в такой постановке радиальное перемещение $\tilde{u}$ будет являться решением следующего уравнения:

$$\frac{d}{dr'}\left[\frac{1}{r'}\frac{d(r'\tilde{u})}{dr'}\right] = \alpha(1+\nu)\frac{d\theta}{dr'}, \tag{9}$$

где α – коэффициент линейного расширения; ν – коэффициент Пуассона материала.

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$\tilde{u}(r') = \frac{(1+\nu)\alpha}{r'}\int_a^{r'}\theta r' dr' + C_1 r' + \frac{C_2}{r'}. \tag{10}$$

Поскольку граница диска свободна от нагрузок, постоянные C_1 и C_2 лучше получить, определив сначала напряжения.

Деформации ε_r и ε_φ выражаются через радиальное перемещение с помощью соотношений:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r'},\ \varepsilon_\varphi = \frac{\tilde{u}}{r'} + \frac{1}{r'}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi'}. \tag{11}$$

Используя выражение для радиального перемещения (10), из закона Гука получим зависимости для напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{r'} = -\frac{\alpha E}{r'^2}\int_{d/2}^{r'}\theta r' dr' + \frac{EC_1}{1-\nu} - \frac{EC_2}{(1+\nu)r'^2}, \tag{12}$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi'} = \frac{\alpha E}{r'^2}\int_{d/2}^{r'}\theta r' dr' + \frac{EC_1}{1-\nu} - \alpha E\theta + \frac{EC_2}{(1+\nu)r'^2}, \tag{13}$$

$$\tilde{\sigma}_{r'\varphi'} = 0, \tag{14}$$

где E – модуль упругости; $\tilde{\sigma}_{r'}$ – радиальное напряжение; $\tilde{\sigma}_{\varphi'}$ – окружное напряжение; $\tilde{\sigma}_{r'\varphi'}$ – касательное напряжение.

Граничные условия для рассматриваемой задачи внезапного нагрева свободного от нагрузок диска имеют вид:

$$\tilde{\sigma}_{r'}\big|_{r'=d/2} = 0, \tag{15}$$

$$\tilde{\sigma}_{r'}\big|_{r'\to\infty} = 0. \tag{16}$$

Учитывая граничные условия и вводя безразмерные напряжения

$$\sigma = \frac{\tilde{\sigma}}{E\alpha(\theta_m - \theta^*)}, \tag{17}$$

где $\tilde{\sigma}$ – размерная величина, приходим к следующим выражениям для безразмерных напряжений:

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^2}\int_1^r Trdr, \tag{18}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r^2}\int_1^r Trdr - T. \tag{19}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2.

Упругопластическое решение

В связи с сильным разогревом области, прилегающей к зоне импульсного воздействия, в ней могут возникать пластические деформации. Примем идеально-пластическую модель с условием пластичности в форме Треска:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_T, \tag{20}$$

где σ_T – безразмерный предел текучести сильно нагретого материала; σ_1, σ_3 – максимальное и минимальное главные безразмерные напряжения.

Учитывая результаты упругого решения, в нашем случае критерий Треска примет вид:

$$\left|\sigma_\varphi\right| = \sigma_T. \tag{21}$$

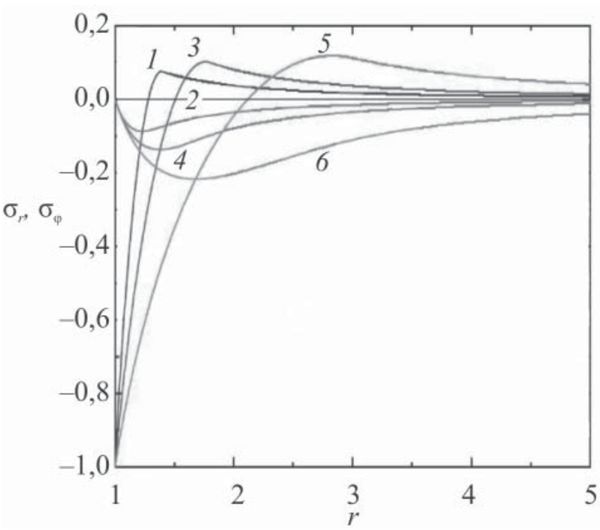

Рис. 2. Упругое решение для окружных σ_φ (*1*, *3*, *5*) и радиальных σ_r (*2*, *4*, *6*) безразмерных напряжений в тонком диске для трех моментов безразмерного времени: t = 0,027 (кривые *1*, *2*); t = 0,06 (кривые *3*, *4*) и t = 0,375 (кривые *5*, *6*)

Пусть также в пластической области ($1 < r < \lambda$, где $r = \lambda$ – координата, разделяющая пластическую и упругую области в диске, и которая является неизвестной функцией времени) выполняется уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \qquad (22)$$

Решая (22) с учетом (21) и с граничным условием

$$\sigma_r\big|_{r=1} = 0, \qquad (23)$$

получим распределение радиального напряжения в пластической области (индекс p соответствует области пластичности)

$$\sigma_r^p = \sigma_{\text{Т}}\left(1 - \frac{1}{r}\right),\ 1 \le r < \lambda. \qquad (24)$$

Таким образом, в упругой области ($r > \lambda$) выполняются соотношения типа (12) – (14) (индекс e соответствует области упругости)

$$\sigma_r^e = -\frac{1}{r^2}\int_\lambda^r Trdr + C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \qquad (25)$$

$$\sigma_\varphi^e = \frac{1}{r^2}\int_\lambda^r Trdr - T + C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \qquad (26)$$

а в области пластического течения, прилегающей к области нагрева, выполняются соотношения (21) и (24). Константы C_1, C_2 находятся из условий сопряжения на границе упругой и пластической области ($r = \lambda$)

$$\sigma_\varphi^e = \sigma_{\text{Т}},\ \sigma_r^e = \sigma_r^p \text{ при } r = \lambda. \qquad (27)$$

Тогда напряжения в диске в упругопластическом случае будут описываться следующими соотношениями:

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_{\text{Т}}\left(1 - \dfrac{1}{r}\right), & 1 \le r \le \lambda; \\ -\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_1^r Trdr + \dfrac{\lambda^2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^\lambda Trdr + \sigma_{\text{Т}}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)\right), & \lambda \le r \le l; \\ -\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_1^l Trdr + \dfrac{\lambda^2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^l Trdr + \sigma_{\text{Т}}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)\right), & r > l. \end{cases} \qquad (28)$$

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} \sigma_{\text{Т}}, & 1 \le r \le \lambda; \\ -T + \dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_1^r Trdr + \dfrac{\lambda^2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^\lambda Trdr + \sigma_{\text{Т}} - T(\lambda)\right), & \lambda \le r \le l; \\ \dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_1^l Trdr + \dfrac{\lambda^2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^l Trdr + \sigma_{\text{Т}}\right), & r > l. \end{cases} \qquad (29)$$

Сравнение упругопластического и упругого решений для σ_φ и σ_r для различных моментов безразмерного времени показано на рис. 3 и 4.

Применительно к экспериментам, описанным в [1], для образцов из карбида циркония, имеющего характеристики: $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ 1/град; E = 400 ГПа; θ_m = 3400°C; $\tilde{\sigma}_{\text{В}}$ = 300 МПа; θ^* = 20°C ($\tilde{\sigma}_{\text{В}}$ – предел прочности), используя (17), получим оценку для безразмерного предела прочности на растяжение $\sigma_{\text{В}} = 0{,}1$.

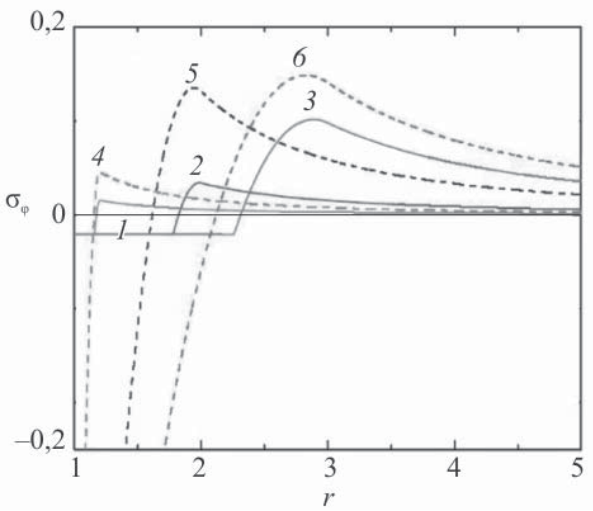

Рис. 3. Сравнение упругого (пунктирные линии *4–6*) и упругопластического (сплошные линии *1–3*) решений для окружных напряжений в тонком диске с круговым отверстием *r* = 1 для трех моментов безразмерного времени: *t* = 0,067 (кривые *1*, *4*), *t* = 1,67 (кривые *2*, *5*) и *t* = 6,67 (кривые *3*, *6*)

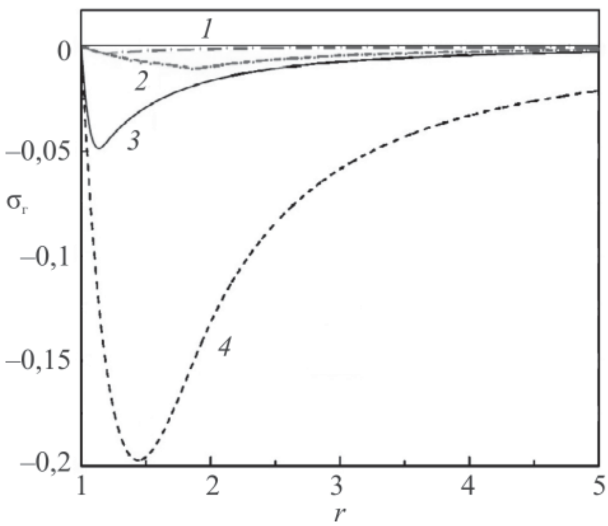

Рис. 4. Распределение безразмерных радиальных напряжений в тонком диске с круговым отверстием *r* = 1 для двух моментов безразмерного времени: *t* = 0,067 (кривые *1*, *3*) и *t* = 1,67 (кривые *2*, *4*)

Анализ графиков на рис. 3, 4 показывает, что окружные напряжения, максимум которых достигается в области «холодного» материала, близкой к границе теплового фронта, могут превысить предельное значение, и начнется процесс хрупкого разрушения.

Хрупкое разрушение внутри диска

Процесс хрупкого разрушения материала будем рассматривать, исходя из идеи фронта разрушения, развитой в работах [12–14]. Изложим один из возможных подходов к оценке зоны разрушения.

Наибольший интерес с точки зрения анализа возможности появления разрушения представляет напряжение σ_φ. При достижении значения прочности на растяжение в тонком диске возникает зона разрушения, размеры которой определим, используя модель, представленную в работах [13, 14].

Из анализа соотношений для напряжений, полученных ранее, следует, что максимум растягивающего напряжения σ_φ как функции безразмерной координаты r достигается при $r < l(t)$. Отметим, что абсолютный максимум безразмерного напряжения по переменным r и $l(t)$ может быть определен из решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial l} = 0. \tag{30}$$

Отсюда получим два алгебраических уравнения для нахождения критических значений r и l, при которых σ_φ имеет максимальное значение.

Если в определенный момент времени, т.е. при определенном значении параметра $l = l_p$, напряжение σ_φ достигнет предела прочности σ_B, то происходит образование зоны разрушения, границы которой $a(t)$ и $b(t)$ определяются из условия сопряжения для напряжений, которые вводятся ниже.

Получаем, что зона разрушения развивается мгновенно, охватывая некоторую область. Поэтому в расчетном анализе все пространство диска разбивается на три объема (рис. 5): *1* – сплошное тело, соответствующее $1 < r < a$; *2* – зона с радиальными трещинами, соответствующая $a < r < b$; *3* – сплошное тело, где $r > b$.

Итак, напряженное состояние диска при возникновении хрупкого разрушения определяется системой формул:

$$\sigma_r^1 = -\frac{1}{r^2}\int_1^r Trdr + C_1^1 - \frac{C_2^1}{r^2}, \tag{31}$$

$$\sigma_r^2 = \frac{C_1^2}{r^2}, \tag{32}$$

$$\sigma_r^3 = -\frac{1}{r^2}\int_1^r Trdr + C_1^3 - \frac{C_2^3}{r^2}, \tag{33}$$

$$\sigma_\varphi^1 = \frac{1}{r^2}\int_1^r Trdr + C_1^1 - T + \frac{C_2^1}{r^2}, \tag{34}$$

$$\sigma_\varphi^2 = 0, \tag{35}$$

$$\sigma_\varphi^3 = \frac{1}{r^2}\int_1^r Trdr + C_1^3 - T + \frac{C_2^3}{r^2}. \tag{36}$$

Пять неизвестных констант C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_1^3, C_2^3 и две функции времени $a(t)$, $b(t)$ найдем из следующих граничных условий и условий сопряжения на границах областей 1, 2, 3 (рис. 5):

$$\begin{gathered}\sigma_r^1\big|_{r=1} = 0,\ \sigma_r^1\big|_{r\to\infty} = 0,\ \sigma_r^1\big|_{r=a} = \sigma_r^2\big|_{r=a},\\ \sigma_r^2\big|_{r=b} = \sigma_r^3\big|_{r=b},\ \sigma_\varphi^1\big|_{r=a} = \sigma_p,\ \sigma_\varphi^3\big|_{r=b} = \sigma_p,\\ u^1\big|_{r=a} = u^2\big|_{r=a}.\end{gathered} \tag{37}$$

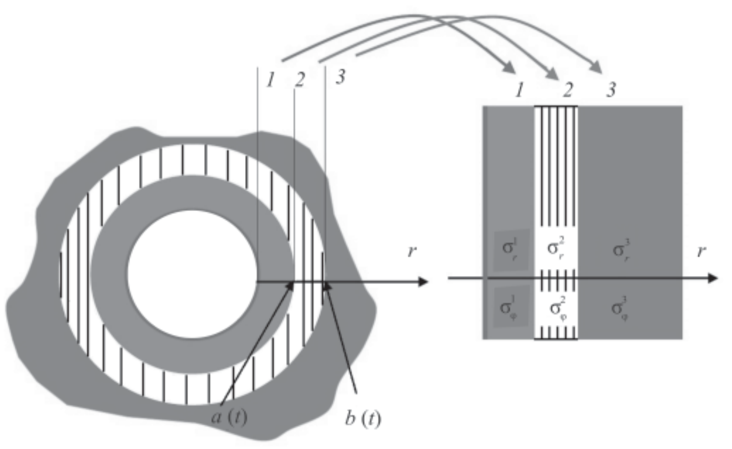

Рис. 5. Расположение трех расчетных зон для напряжений в диске с круговым отверстием

Численный анализ системы уравнений (31)–(36) при условиях (37) показал, что в момент времени l_p, когда σ_φ достигает максимального значения, мгновенно образуется зона разрушения весьма малого размера.

При $l_p + 0$ нарушается последнее условие (37). Поэтому при анализе процесса развития зоны разрушения будем считать $a = \text{const}$. Решая систему с этим условием, получим зависимость для определения b как функции времени. Результаты численных оценок развития зоны разрушения с течением времени представлены на рис. 6.

Проведенный выше анализ на простой модели импульсного нагрева диска показал, что учет пластичности в разогретой зоне приводит к уменьшению напряжений в диске, что сильно влияет на прочность. Следует ожидать, что рассмотрение одновременно факта образования зоны разрушения в холодной области и появление пластического течения в зоне нагрева приведет к существенному изменению в кинетике роста зоны разрушения. Система уравнений для такого случая станет еще более сложной. Уравнения системы (31)–(36), описывающие процесс разрушения в упругопластическом случае, должны быть рассмотрены вместе с системой (28), (29). Результаты расчетов упругопластического деформирования диска с одновременным ростом зоны разрушения показаны на рис. 7.

Анализируя результаты данного раздела, приходим к выводу, что учет пластичности в области нагрева существенно влияет на описание процесса разрушения.

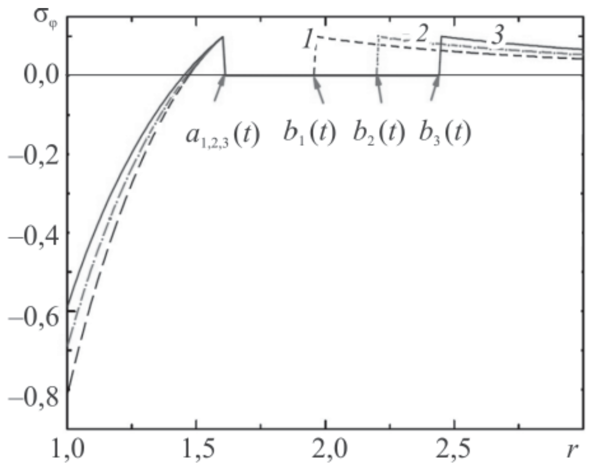

Рис. 6. Напряжения в диске для трех моментов времени *t* = 0,167 (кривая *1*); *t* = 0,24 (кривая *2*); *t* = 0,33 (кривая *3*) после образования зоны растрескивания в области $a(t) < r < b(t)$

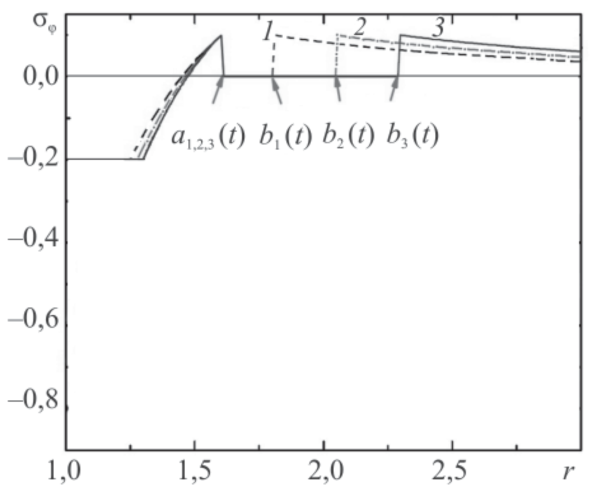

Рис. 7. Напряжения в диске для трех моментов времени *t* = 0,167 (кривая *1*); *t* = 0,24 (кривая *2*); *t* = 0,33 (кривая *3*) после образования зоны растрескивания в области $a(t) < r < b(t)$ в случае упругопластического состояния

Заключение

В работе с помощью аналитического приближенного метода решения уравнения теплопроводности на примере модельной задачи осесимметричного нагрева диска в центральной круговой области показана возможность возникновения зон макроразрушения при локальном импульсном воздействии. Анализ напряженного состояния облучаемого диска и его разрушение проведен с учетом возможности возникновения и развития пластических деформаций в зоне сильного прогрева.

Методом введения фронта разрушения получено решение задачи возникновения области разрушения и ее роста со временем.

Показано, что учет нелинейности свойств деформирования в области сильного нагрева приводит к значительному уменьшению растягивающих окружных напряжений в «холодной» области диска и к уменьшению размеров области разрушения. С другой стороны, пластические деформации вызывают изменения свойств материала и формы поверхности, что может вызвать нарушение механических характеристик дискового образца как элемента конструкций.

Список литературы

1. *Газуко И.В., Грязнов И.М., Миркин Л.И.* О разрушении карбида циркония лучом лазера // Проблемы прочности. 1978. № 2. С. 105–107.
2. *Рэди Дж.* Действие мощного лазерного излучения на вещество. – М.: Мир, 1975. – 360 с.
3. *Skelton R.P., Miles L.* Crack propagation in thick cylinders of ½ CrMo v steel during thermal shock // High Temp. Technol. 1984. Vol. 2. No. 1. P. 23–34.
4. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* К проблеме терморазрушения при быстром нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 128–135.
5. *Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К.* Численное моделирование процессов тепломассопереноса и кинетики напряжений в термодеструктирующих композиционных оболочках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 2. С. 43–59.
6. *Баренблатт Г.И.* О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации в упругом режиме // Изв АН СССР. 1954. № 9. С. 108–112.
7. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей. Деформирование и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во Моск. Ун-та. 1973. С. 63–68.
8. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во МГУ. 2000. – 178 с.
9. Biot M. A. New Method in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures // Journal of the Aeronautical Sciences. 1957. Vol. 24. P. 857–873.
10. *Юмашев М.В., Юмашева М.А., Краснова П.А.* Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность // Вестник Московского университета. 2010. № 4. С. 44–54.
11. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Изд-во «Наука», 1975. – 576 с.
12. *Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А.* Неустойчивость терморазрушения при стесненной деформации // Физико-химическая механика материалов. 2006. № 6. С. 55–60.
13. *Бахарев М.С., Миркин Л.М., Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Структура и прочность материалов при лазерном воздействии. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 224 с.
14. *Григорян С.С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // Прикл. мат. и мех. 1967. Т. 31. № 2. С. 643–669.

Материал поступил в редакцию 25.06.14

ЮМАШЕВ
Михаил Владиславович
E-mail: **yumashevmikhail@gmail.com**
Тел.: **8 (495) 939-37-54**

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: численное моделирование и аналитический расчет процессов разрушения в задачах теории упругости и пластичности. Автор более 60 публикаций.

БЕДНОВА
Вероника Борисовна
E-mail: **nicky-2005@mail.ru**
Тел.: **8 (495) 939-37-54**

Аспирантка кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: численное моделирование и аналитический расчет процессов разрушения в задачах теории упругости и пластичности. Автор 4 публикаций.

ВЕРГАЗОВ
Марат Марсович
E-mail: **marat.vergazov@gmail.com**
Тел.: **8 (495) 939-24-28**

Младший научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: численное моделирование и аналитический расчет процессов разрушения в задачах теории упругости и пластичности. Автор 13 публикаций.

ЮМАШЕВА
Марина Андреевна
E-mail: **marina.yum@ya.ru**
Тел.: **8 (495) 939-24-28**

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: численное моделирование и аналитический расчет процессов разрушения в задачах теории упругости и пластичности. Автор более 75 публикаций.